UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s8journaldemat01liou

BINDING LIST SEP 1 1921

I

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

Math
J.

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

PUBLIÉ DE 1875 A 1884
PAR H. RESAL

Huitième
~~SEPTIÈME~~ SÉRIE

PUBLIÉE

PAR CAMILLE JORDAN

AVEC LA COLLABORATION DE

G. HUMBERT, R. DE MONTESSUS DE BALLORE, E. PICARD

Huitième
TOME ~~QUATRIÈME~~ — ANNÉE 1918

(83e Volume de la Collection)

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1918

167181
15/11/21

QA
1
J684
Sér. 8
t. 1-3

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Les ondes électromagnétiques planes périodiques et le problème de leur réflexion et de leur réfraction;

PAR LOUIS ROY.

INTRODUCTION.

Le problème de la réflexion et de la réfraction des ondes électromagnétiques planes périodiques, à la surface séparative plane de deux diélectriques homogènes et isotropes, a été traité pour la première fois, à notre connaissance, par A. Potier [1]. Les formules obtenues par ce physicien coïncident avec celles qui expriment, selon Fresnel, les lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière à la surface séparative de deux milieux transparents. Aussi sa solution a-t-elle été acceptée par la plupart des auteurs.

Mais les conditions aux limites adoptées par A. Potier avaient été obtenues à partir de propositions litigieuses de Maxwell ou de ses

[1] J.-C. MAXWELL, *Treatise of Electricity and Magnetism*, traduction française, t. II, p. 507.

continuateurs. Au cours de ses recherches sur l'Électrodynamique, P. Duhem fut ainsi conduit à en reprendre l'établissement et à les appliquer à son tour au même problème; c'est par là qu'il termine le dernier Mémoire de la série qu'il publia de 1893 à 1896 dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*.

Ses conclusions sont les suivantes (1) :

« D'après ces nouvelles conditions limites, lorsqu'une onde électromagnétique plane, propageant une force électromotrice transversale et perpendiculaire au plan d'incidence, tombe sur la surface plane qui sépare deux milieux diélectriques, il y a une seule onde plane réfléchie et une seule onde plane réfractée; chacune d'elles propage une force électromotrice transversale et perpendiculaire au plan d'incidence; les formules qui lient la force réfléchie et la force réfractée à la force incidente sont identiques aux formules qui, selon Fresnel, lient la vibration réfléchie et la vibration réfractée à la vibration incidente, quand la lumière incidente est polarisée dans le plan d'incidence.

« Mais, lorsque l'onde incidente propage une force électromotrice transversale située dans le plan d'incidence, il n'est plus possible d'accorder les conditions aux limites par nous obtenues avec l'existence d'une seule onde réfléchie et d'une seule onde réfractée, propageant toutes deux une force électromotrice transversale. »

Aussi n'hésite-t-il pas à terminer son Mémoire par cette phrase (2) :

« Cette conséquence paraît condamner toute théorie électromagnétique de la lumière. »

Ces conclusions, inacceptables au point de vue de l'Optique, tenaient à ce que P. Duhem avait appliqué la théorie de Helmholtz sans y introduire une hypothèse capitale, appelée ultérieurement par lui *hypothèse de Faraday et de Mossotti* (3), et qui rétablit l'accord de la théorie avec les expériences de Hertz et les formules de Fresnel. Quelques années plus tard, il reprit le même problème (4), en se pro-

(1) P. Duhem, *Sur la propagation des actions electrodynamiques* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. X, B. 3, 1896).

(2) P. Duhem, *loc. cit.*, B. 82.

(3) P. Duhem, *Les théories électriques de J.-C. Maxwell*, p. 41.

(4) P. Duhem, *Sur la théorie électrodynamique de Helmholtz et la théorie électromagnétique de la lumière* (*Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles*, 2e série, t. V, 1901, p. 227).

posant d'établir d'abord les formules générales résultant de la théorie de Helmholtz et de ne faire qu'en dernier lieu l'hypothèse de Faraday et de Mossotti. Dans ce problème, qu'il traite en partant des équations du champ électrique, les données sont l'amplitude incidente longitudinale et les deux composantes, parallèle et perpendiculaire au plan d'incidence, de l'amplitude incidente transversale. Comme les inconnues sont les éléments correspondants relatifs aux ondes réfléchies et réfractées, leur nombre est égal à six ; mais les six conditions aux limites alors connues de la théorie de Helmholz et qui correspondent à celles de A. Potier sont insuffisantes pour les déterminer, car elles ne fournissent que cinq relations distinctes. Pour obtenir la sixième équation indispensable qui achèvera de déterminer le problème, P. Duhem admet *a priori* l'égalité des composantes tangentielles longitudinales réfléchie et réfractée. En faisant enfin l'hypothèse de Faraday et de Mossotti dans les formules obtenues, il retrouve celles de Fresnel.

Mais il ne faut pas voir, dans cette concordance, un argument en faveur de l'exactitude de la sixième relation posée *a priori* par P. Duhem. En effet, les champs longitudinaux disparaissent en vertu de l'hypothèse de Faraday et de Mossotti, en même temps que les six conditions aux limites primitives se réduisent à quatre distinctes. Comme il n'y a plus que quatre inconnues, le problème se trouve donc entièrement déterminé, sans qu'il y ait lieu de faire appel à une condition aux limites nouvelle.

Revenant sur ce sujet vers la fin de l'année 1915 et désireux d'obtenir des formules certaines indépendantes de l'hypothèse de Faraday et de Mossotti, nous traitâmes le problème par une méthode entièrement sûre mais indirecte, en partant des équations du potentiel vecteur total. Nous arrivâmes ainsi à des formules qui, ne s'accordant pas avec celles que P. Duhem avait antérieurement obtenues, prouvaient l'inexactitude de la condition aux limites supplémentaire dont cet auteur s'était servi. Mais le désir de parvenir aux mêmes résultats par la méthode directe, en partant des seules équations du champ, amena P. Duhem à découvrir la véritable condition aux limites supplémentaire qui achève de déterminer le problème (1). Celle-ci

(1) P. Duhem, *Sur l'Électrodynamique des milieux diélectriques* (*Comptes rendus*, t. 162, 1896, p. 381) ; *Sur l'Électrodynamique des milieux conducteurs* (*loc. cit.*, p. 337).

supposait les deux milieux non tous deux conducteurs: quelques jours après, nous l'étendions au cas général [1].

Tandis que P. Duhem utilisait cette nouvelle condition aux limites dans des recherches d'un ordre tout différent, que la mort ne lui a pas permis d'achever, nous l'appliquions de notre côté au problème de la réflexion et de la réfraction, qui lui avait donné naissance. Dans ses deux Mémoires, P. Duhem avait supposé les deux milieux non conducteurs, ce qui correspond en Optique au cas de la transparence parfaite, et les ondes incidentes uniformes, ce qui est analytiquement un cas très particulier. Or on sait que si l'on se borne à considérer des ondes planes périodiques, les équations de Maxwell relatives aux milieux conducteurs se ramènent à celles d'un milieu fictif non conducteur, dont le pouvoir inducteur spécifique serait imaginaire; de là une grande simplification, qui permet de traiter le problème de la réflexion métallique avec la même facilité que celui de la réflexion vitreuse. Comme les équations de Helmholtz, y compris la condition aux limites supplémentaire, jouissent précisément de la même propriété que celles de Maxwell, il devenait aisé de traiter le problème de la réflexion et de la réfraction sans imposer aux deux milieux d'autre condition que l'homogénéité et l'isotropie.

C'est à ce problème qu'est consacré le présent Mémoire.

Comme les ondes que nous considérons sont les ondes électromagnétiques planes les plus générales susceptibles d'être propagées par un milieu homogène et isotrope, nous avons cru bon d'en reprendre tout d'abord la théorie, en partant des équations du champ électrique. Lorsque le milieu est dénué de conductibilité, ces ondes deviennent évanescentes; les ondes uniformes, à la considération desquelles on se borne généralement en Optique, n'en sont qu'un cas extrêmement particulier.

Nous profitons des formules ainsi obtenues pour traiter également le cas des ondes latéralement limitées, d'après une méthode d'approximation due à M. Boussinesq. Les coefficients d'amplitude des composantes du champ électrique doivent alors, non seulement satisfaire aux conditions antérieures relatives aux ondes latéralement illimitées, mais encore être des fonctions analytiques d'une certaine variable complexe construite au moyen de deux variables réelles

---

(1) L. Roy, *Sur l'Électrodynamique des milieux absorbants* (*Comptes rendus*, t. 162, 1916, p. 468).

comptées respectivement suivant les normales au plan d'onde et au plan d'absorption.

Arrivons enfin à la théorie de la réflexion et de la réfraction par ondes planes périodiques. Dans l'exposé habituel de cette théorie, il y a un appel implicite à l'expérience, en ce sens qu'une onde incidente étant donnée, on admet *a priori* l'existence d'une onde réfléchie et d'une onde réfractée, alors que cette existence ne devrait, au contraire, résulter que de la théorie seule. Pour s'en affranchir il convient de se poser le problème de la façon suivante : si l'un des deux milieux est le siège d'une onde plane périodique d'orientation et de pulsation données, quelles autres ondes doit-on lui associer pour obtenir la solution simple la plus générale correspondante. On reconnaît ainsi que cette solution comprend, dans chaque milieu, deux ondes incidentes respectivement transversale et longitudinale et deux ondes réfléchies également transversale et longitudinale, les éléments directeurs de l'une de ces ondes déterminant ceux des sept autres. Les ondes réfléchies du second milieu coïncident avec les ondes réfractées de la théorie classique, mais les ondes incidentes de ce même milieu sont des ondes supplémentaires que cette théorie ne considère point, bien qu'elles s'imposent analytiquement au même titre que les précédentes. Il en résulte que, dans la théorie complète que nous exposons, le calcul des amplitudes est indéterminé, si l'on se donne seulement les amplitudes incidentes dans le premier milieu, comme cela suffit dans la théorie classique. En annulant les amplitudes incidentes dans le second milieu et en faisant l'hypothèse de Faraday et de Mossotti, on obtient des formules plus particulières, qui correspondent aux formules habituelles et qui redonnent, comme cas particulier, celles de Fresnel.

CHAPITRE I.

LES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES PLANES.

1. Réduction des équations générales des milieux homogènes et isotropes en repos à celles des milieux non conducteurs.

Considérons un système de corps homogènes et isotropes en repos susceptibles d'électrisation et pouvant être à la fois conducteurs,

diélectriques et magnétiques; ce système est rapporté à trois axes rectangulaires $Oxyz$ qui lui sont invariablement liés.

Nous savons que la détermination de l'état électrique et magnétique du système à un instant quelconque, c'est-à-dire la solution complète du problème général de l'Electrodynamique, se ramène au calcul du potentiel vecteur total en chaque point de ce système [1]. Nous savons également que, si l'on n'a en vue que le champ électrique et le champ magnétique, ces grandeurs peuvent être déterminées directement sans faire intervenir le potentiel vecteur total.

Conservant les notations de notre précédent Mémoire [2], soient :

ε la constante fondamentale des actions électrostatiques;
$\frac{a^2}{2}$ la constante fondamentale des actions électrodynamiques;
k la constante de Helmholtz;
ρ la résistivité d'un des corps du système;
$\varkappa$ son coefficient de polarisation diélectrique;
$K = 1 + 4\pi\varepsilon\varkappa$ son pouvoir inducteur spécifique;
μ sa perméabilité magnétique;
X, Y, Z les composantes du champ électrique au point (x, y, z) et à l'instant t;
X', Y', Z' les composantes du champ magnétique au même point et au même instant;

les équations indéfinies du champ électrique et du champ magnétique sont [3]

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{a^2 k}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\rho} + \frac{\rho K - k}{2\pi\rho}\frac{\partial Z}{\partial t}\right) - \frac{1}{2\pi\rho a^2}\frac{\partial \Delta X}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t^2}\left(\frac{X}{\rho} - \varkappa\frac{\partial X}{\partial t}\right) = 0,\\
&\frac{1}{a^2 k}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\rho} + \frac{\rho K - k}{2\pi\rho}\frac{\partial Y}{\partial t}\right) - \frac{1}{2\pi\rho a^2}\frac{\partial \Delta Y}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t^2}\left(\frac{Y}{\rho} - \varkappa\frac{\partial Y}{\partial t}\right) = 0,\\
&\frac{1}{a^2 k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\rho} + \frac{\rho K - k}{2\pi\rho}\frac{\partial Z}{\partial t}\right) - \frac{1}{2\pi\rho a^2}\frac{\partial \Delta Z}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{Z}{\rho} - \varkappa\frac{\partial Z}{\partial t}\right) = 0,
\end{aligned}\right.$$

---

(1) L. Roy, *L'Electrodynamique de Helmholtz-Duhem et son application au problème du mur et à la décharge d'un condensateur sur son propre diélectrique* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 3e série, t. VII, p. 231).

(2) L. Roy, *loc. cit.*, p. 221.

(3) L. Roy, *loc. cit.*, p. 235.

équations où l'on a posé

$$\zeta = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z};$$

$$(2) \qquad \frac{1}{2\pi\mu a^2}\Delta(X', Y', Z') = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial(X', Y', Z')}{\partial t} + \zeta\frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial t}.$$

Les équations indéfinies que vérifie le potentiel vecteur total sont d'ailleurs identiques comme forme aux équations (1).

Passons aux équations vérifiées en chaque point M de la surface séparative S de deux corps contigus 1 et 2; soient :

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ les cosinus directeurs de la demi-normale en M à la surface S menée vers l'intérieur du corps 1;

$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ les cosinus directeurs de la demi-normale en M à la surface S menée vers l'intérieur du corps 2.

En affectant de l'indice 1 les grandeurs relatives au corps 1, de l'indice 2 celles relatives au corps 2 et en représentant d'une manière générale et pour abréger par $\sum \alpha X$ la projection $\alpha X + \beta Y + \gamma Z$ du vecteur (X, Y, Z) sur la direction (α, β, γ), on a, en tout point M de la surface S, les équations aux surfaces séparatives

$$(3) \qquad \frac{4\pi\varepsilon}{\rho_1}\sum \alpha_1 X_1 + K_1\frac{\partial}{\partial t}\sum \alpha_1 X_1 = \frac{4\pi\varepsilon}{\rho_2}\sum \alpha_2 X_2 + K_2\frac{\partial}{\partial t}\sum \alpha_2 X_2,$$

$$(4) \qquad \frac{X_1 - X_2}{\alpha_1 \text{ ou } \alpha_2} = \frac{Y_1 - Y_2}{\beta_1 \text{ ou } \beta_2} = \frac{Z_1 - Z_2}{\gamma_1 \text{ ou } \gamma_2},$$

$$(5) \qquad \frac{4\pi\varepsilon}{\rho_1}\zeta_1 + K_1\frac{\partial\zeta_1}{\partial t} = \frac{4\pi\varepsilon}{\rho_2}\zeta_2 + K_2\frac{\partial\zeta_2}{\partial t},$$

$$(6) \qquad \mu_1\sum \alpha_1 X'_1 + \mu_2\sum \alpha_2 X'_2 = 0,$$

$$(7) \qquad \frac{X'_1 - X'_2}{\alpha_1 \text{ ou } \alpha_2} = \frac{Y'_1 - Y'_2}{\beta_1 \text{ ou } \beta_2} = \frac{Z'_1 - Z'_2}{\gamma_1 \text{ ou } \gamma_2},$$

le même indice devant figurer dans les trois dénominateurs des équations (4) ou (7).

D'ailleurs, les relations dites de Faraday, qui relient le champ magnétique au champ électrique, permettent de transformer les équations (6) et (7) en les suivantes :

$$(8) \qquad \sum \alpha_1\left(\frac{\partial Z_1}{\partial y} - \frac{\partial Y_1}{\partial z}\right) = \sum \alpha_2\left(\frac{\partial Z_2}{\partial y} - \frac{\partial Y_2}{\partial z}\right) = 0.$$

et

$$(9)\qquad \frac{\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\partial Z_1}{\partial y}-\frac{\partial Y_1}{\partial z}\right)-\frac{1}{\mu_2}\left(\frac{\partial Z_2}{\partial y}-\frac{\partial Y_2}{\partial z}\right)}{\alpha_1 \text{ ou } \alpha_2}$$

$$=\frac{\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\partial X_1}{\partial z}-\frac{\partial Z_1}{\partial x}\right)-\frac{1}{\mu_2}\left(\frac{\partial X_2}{\partial z}-\frac{\partial Z_2}{\partial x}\right)}{\beta_1 \text{ ou } \beta_2}$$

$$=\frac{\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\partial Y_1}{\partial x}-\frac{\partial X_1}{\partial y}\right)-\frac{1}{\mu_2}\left(\frac{\partial Y_2}{\partial x}-\frac{\partial X_2}{\partial y}\right)}{\gamma_1 \text{ ou } \gamma_2}.$$

qui, jointes aux précédentes (3), (4), (5), fournissent six équations aux limites distinctes.

Les équations aux limites que vérifie le potentiel vecteur total sont entièrement différentes de celles du champ électrique. Comme nous n'aurons pas à les utiliser, il nous suffit de savoir, pour l'objet que nous avons en vue, que la résistivité et le coefficient de polarisation diélectrique n'y figurent pas.

Cela posé, nous allons voir que les équations tant indéfinies qu'aux limites du champ électrique, du champ magnétique et du potentiel vecteur total peuvent être mises sous la forme de celles relatives à des corps non conducteurs, si l'on se borne à considérer des solutions simples constituées par les parties réelles d'expressions de la forme

$$(\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R})\, e^{\omega i(lx+my+nz-t)},$$

où l'on a posé $i=\sqrt{-1}$ et où ω est une constante positive, ou l, m, n sont des constantes généralement imaginaires et P, Q, R d'autres constantes généralement imaginaires aussi ou même des fonctions de x, y, z indépendantes de t. On convient de dire que ces solutions définissent des ondes planes périodiques simples de pulsation ω, de paramètres directeurs l, m, n et d'amplitude (P, Q, R).

Considérons donc, tout d'abord, les équations indéfinies (1) du champ électrique et du potentiel vecteur total et posons

$$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = \text{parties réelles de } (\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R})\, e^{\omega i(lx+my+nz-t)},$$

ce que nous écrirons plus simplement, pour abréger,

$$(10)\qquad (\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = (\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R})\, e^{\omega i(lx+my+nz-t)}.$$

Il vient

$$\frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial t} = i\varphi(X, Y, Z),$$

ce qui permet de mettre les équations (1) sous la forme

$$(11) \qquad (\mathcal{L}^2 - \mathcal{T}^2)\frac{\partial}{\partial(x, y, z)} = \mathcal{T}^2\Delta(X, Y, Z) + \frac{\partial^2(X, Y, Z)}{\partial t^2},$$

en posant

$$(12) \qquad \mathcal{L}^2 = \frac{1}{k}\frac{\mathcal{K}}{\frac{a^2}{2}(\mathcal{K}-1)}, \qquad \mathcal{T}^2 = \frac{1}{\frac{a^2}{2}(\mathcal{K}-1)\rho},$$

$$(13) \qquad \mathcal{K} = 1 + 4\pi\mathcal{H},$$

$$(14) \qquad \mathcal{H} = \chi\left(1 - \frac{i}{\omega\sigma\chi}\right).$$

On voit que les équations (11) sont celles d'un milieu non conducteur, dont le coefficient de polarisation diélectrique aurait la valeur imaginaire $\mathcal{H}$ définie par l'égalité (14).

Il en résulte, pour ce milieu fictif, un pouvoir inducteur spécifique imaginaire $\mathcal{K}$ donné par l'égalité (13) et des vitesses de propagation des perturbations longitudinales et transversales $\mathcal{L}$ et $\mathcal{T}$ également imaginaires donnés par les égalités (12).

On voit que les équations (11) sont analogues à celles des petits mouvements d'un solide isotrope dénué de viscosité; cette analogie est, comme on sait, le point de départ de la théorie électromagnétique de la lumière.

De même, si nous prenons pour le champ magnétique (X, Y, Z) des solutions de la forme (10), les équations indéfinies correspondantes (2) peuvent s'écrire

$$\mathcal{T}^2\Delta(X, Y, Z) = \frac{\partial^2(X, Y, Z)}{\partial t^2} = 0,$$

et l'on voit encore que ce sont celles d'un milieu fictif non conducteur de coefficient de polarisation diélectrique $\mathcal{K}$.

En ce qui concerne les équations aux surfaces séparatives, il n'y a à s'occuper que de celles où figurent les quantités ρ, χ ou K, c'est-à-dire que des équations (3) et (5). Or on a par exemple, d'après la

forme de solutions considérées,

$$\frac{\frac{4\pi\varepsilon}{\sigma}X + K\frac{\partial X}{\partial t}}{\frac{\partial X}{\partial t}} = \frac{4\pi\varepsilon}{\sigma}\frac{1}{i\omega} + K = 1 - 4\pi\varepsilon\lambda\left(1 - \frac{i}{\omega\sigma\lambda}\right) = \mathcal{K},$$

de sorte que ces équations prennent la forme

$$(15)\qquad \mathcal{K}_1\frac{\partial}{\partial t}\sum \alpha_1 X_1 + \mathcal{K}_2\frac{\partial}{\partial t}\sum \alpha_2 X_2 = 0,$$

$$(16)\qquad \mathcal{K}_1\frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial t} = \mathcal{K}_2\frac{\partial \mathcal{U}_2}{\partial t},$$

comme pour un milieu non conducteur.

Enfin, dans l'hypothèse de Faraday et de Mossotti [1], on sait qu'on a l'équation indéfinie

$$\frac{4\pi\varepsilon}{\sigma} + K\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = 0,$$

qui vérifie identiquement l'équation aux limites supplémentaire [illegible]. Cette équation devient ici

$$(17)\qquad \mathcal{K}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = 0 \quad \text{ou} \quad \mathcal{U} = 0,$$

comme pour un milieu non conducteur.

II. — Ondes planes latéralement illimitées.

On dit que les ondes planes périodiques représentées par les égalités

$$(18)\qquad X, Y, Z = P, Q, R \text{ [illegible]}$$

sont latéralement illimitées quand les trois coefficients d'amplitude P, Q, R sont des constantes. Voyons les conditions qu'imposent aux différents paramètres, qui figurent dans ces égalités, les équations

---

(1) L. Roy, *loc. cit.*, p. 240.

indéfinies

$$(11)\qquad (\zeta^2 - \tau^2)\frac{\partial \zeta}{\partial(x, y, z)} + \tau^2 \Delta(X, Y, Z) - \frac{\partial^2(X, Y, Z)}{\partial t^2} = 0,$$

auxquelles nous joindrons l'équation aux dilatations

$$(18)\qquad \zeta^2 \Delta \zeta - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0$$

obtenue en dérivant, respectivement par rapport à x, y z, les équations (11) et en les ajoutant membre à membre.

Substituons donc les expressions (10) dans les équations (11) et (18); on a tout d'abord

$$(19)\qquad \zeta = -i\omega \sum \mathrm{P} l e^{i\omega t} + \zeta e^{i\omega t} = 0,$$

puis

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\zeta^2}{\tau^2} - 1\right) l \sum \mathrm{P} l + \left(l^2 + m^2 + n^2 - \frac{1}{\tau^2}\right) \mathrm{P} = 0, \\ &\left(\frac{\zeta^2}{\tau^2} - 1\right) m \sum \mathrm{P} l + \left(l^2 + m^2 + n^2 - \frac{1}{\tau^2}\right) \mathrm{Q} = 0, \\ &\left(\frac{\zeta^2}{\tau^2} - 1\right) n \sum \mathrm{P} l + \left(l^2 + m^2 + n^2 - \frac{1}{\tau^2}\right) \mathrm{R} = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(21)\qquad \left(l^2 + m^2 + n^2 - \frac{1}{\zeta^2}\right) \sum \mathrm{P} l = 0.$$

On peut satisfaire de deux manières à cette dernière égalité : soit en posant

$$\sum \mathrm{P} l = 0,$$

et alors, pour que les trois coefficients P, Q, R ne soient pas tous nuls, les égalités (20) exigent qu'on ait en même temps

$$l^2 + m^2 + n^2 = \frac{1}{\tau^2},$$

soit en posant

$$l^2 + m^2 + n^2 = \frac{1}{\zeta^2},$$

ce qui réduit les égalités (20) à la double proportion

$$\frac{\mathrm{P}}{l} = \frac{\mathrm{Q}}{m} = \frac{\mathrm{R}}{n}.$$

Dans les deux cas, la pulsation ω est arbitraire.

Les ondes correspondant à la première solution sont dites *tranversales;* celles correspondant à la seconde solution sont dites *longitudinales*. Nous allons les étudier successivement.

I. *Ondes transversales.* — Ces ondes sont caractérisées par la solution

$$(22) \qquad l^2 + m^2 + n^2 = \frac{1}{\varepsilon^2}, \qquad \sum P l = 0$$

des équations (20) et (21).

Tout d'abord, les constantes l, m, n étant généralement imaginaires, nous pouvons regarder leurs parties réelles comme les composantes d'un vecteur $\frac{1}{\Omega}$ de cosinus directeurs α, β, γ et leurs parties imaginaires comme les composantes d'un autre vecteur h de cosinus directeurs $-a$, $-b$, $-c$; nous écrirons donc

$$(23) \qquad (l, m, n) = \frac{(\alpha, \beta, \gamma)}{\Omega} - i h (a, b, c),$$

égalités où $\frac{1}{\Omega}$ et h sont deux quantités positives ou nulles.

On sait, d'autre part [1], que la vitesse effective T de propagation des perturbations électromagnétiques transversales dans le milieu considéré a pour expression

$$T^2 = \frac{\varepsilon^2}{\frac{a^2}{\lambda}(K - 1)\sigma};$$

nous pouvons donc écrire, d'après les égalités (12), (13) et (14),

$$(24) \qquad \frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{1 - i\lambda}{T^2},$$

en posant

$$(25) \qquad \lambda = \frac{1}{\sigma \varepsilon^2}.$$

D'après cela, la première égalité (22) équivaut, en tenant compte des

---

[1] L. Roy, *loc. cit.*, p. 234.

égalités (23) et (24), aux deux suivantes :

$$(26)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\Omega^2} + h^2 = \dfrac{1}{T^2}, \\ \dfrac{h}{\Omega}\cos\Theta = \dfrac{\lambda}{T}. \end{cases}$$

où l'on a posé

$$(27)\qquad \cos\Theta = \alpha\gamma + \beta\delta + \gamma\varepsilon.$$

Comme le nombre λ n'est jamais négatif, la deuxième égalité (26) montre qu'il en est de même de $\cos\Theta$; l'angle Θ des deux vecteurs $\frac{1}{\Omega}$ et h est donc toujours compris entre o et $\frac{\pi}{2}$ et ne peut atteindre cette dernière limite que pour $\lambda = 0$, c'est-à-dire pour un milieu non conducteur.

Laissant provisoirement de côté le cas où λ est nul, les égalités (26) constituent deux équations qui déterminent sans ambiguïté $\frac{1}{\Omega}$ et h en fonction de l'angle Θ donné arbitrairement entre les limites précédemment indiquées et l'on obtient aisément

$$(28)\qquad \begin{cases} \dfrac{T}{\Omega} = \sqrt{\dfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{\lambda^2}{\cos^2\Theta}}\right)}, \\ Th = \sqrt{\dfrac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 + \dfrac{\lambda^2}{\cos^2\Theta}}\right)}. \end{cases}$$

Ces expressions montrent, lorsque Θ croît de o à $\frac{\pi}{2}$, que Ω décroît en tendant vers zéro, tandis que h croît et augmente indéfiniment quand Θ tend vers $\frac{\pi}{2}$.

Nous verrons que λ varie dans de très larges limites suivant la substance considérée. Si ρ est très petit, comme cela a lieu pour les métaux, λ a une valeur considérable, de sorte que Ω n'est qu'une très petite fraction de T, quel que soit Θ; si au contraire ρ est très grand, comme cela a lieu pour les corps isolants, λ est extrêmement petit, de sorte que Ω reste sensiblement égal à T, tant que Θ n'est pas très voisin de $\frac{\pi}{2}$. La figure représente les courbes de variation $\frac{\Omega}{T}$ (en traits

pleins) et de Th (en traits interrompus) en fonction de Θ, construites en coordonnées polaires pour quelques valeurs de λ.

Ω et h étant ainsi déterminés en fonction de Θ, explicitons la deuxième égalité (22) en posant à cet effet

$$(P, Q, R) = (U, V, W) + i(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}),$$

il vient d'après la première égalité (23),

$$Pl = \frac{U}{\Omega}\alpha + h\mathcal{U}a + i\left(-hUa + \frac{\mathcal{U}}{\Omega}\alpha\right).$$

Soient alors :

I le vecteur de composantes U, V, W ;

φ l'angle des deux vecteurs I et $\frac{1}{\Omega}$;

ψ l'angle des deux vecteurs I et h ;

$\mathfrak{s}$ le vecteur de composantes $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$;

Φ l'angle des deux vecteurs $\mathfrak{s}$ et $\frac{1}{\Omega}$;

Ψ l'angle des deux vecteurs $\mathfrak{s}$ et h ;

on a

$$\sum Pl = I\frac{\cos\varphi}{\Omega} + \mathfrak{s}h\cos\Psi + i\left(-Ih\cos\psi + \mathfrak{s}\frac{\cos\Phi}{\Omega}\right),$$

de sorte que la deuxième égalité (22) équivaut aux deux suivantes :

$$(29)\qquad \begin{cases} I\dfrac{\cos\varphi}{\Omega} + \mathfrak{s}h\cos\Psi = 0, \\ -Ih\cos\psi + \mathfrak{s}\dfrac{\cos\Phi}{\Omega} = 0. \end{cases}$$

Comme I et $\mathfrak{s}$ ne peuvent être tous les deux nuls, sans quoi il en serait de même de P, Q, R, il faut qu'on ait l'égalité

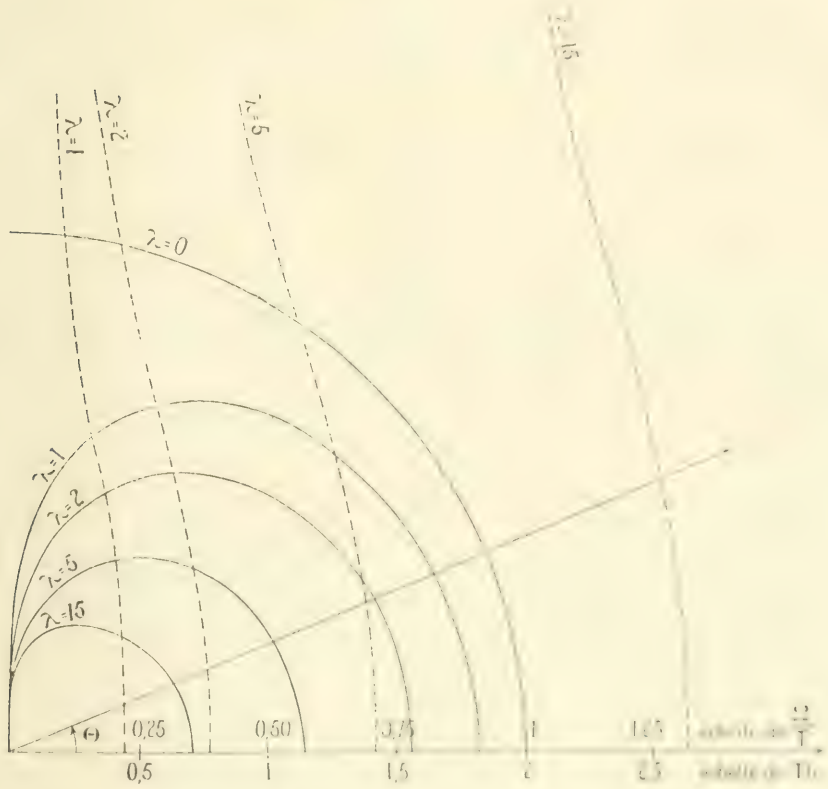
$$(30)\qquad \frac{\cos\varphi\cos\Phi}{\Omega} + h\cos\psi\cos\Psi = 0,$$

en vertu de laquelle trois seulement des quatre angles φ, ψ, Φ, Ψ sont arbitraires. Celle-ci étant supposée vérifiée, l'une des égalités (29) détermine le rapport des deux vecteurs I et $\mathfrak{s}$.

Dès lors, tenons compte dans les expressions (10) de l'égalité

$$P = \sqrt{U^2 + \mathcal{U}^2}\, e^{i\,\text{arc tang}\frac{\mathcal{U}}{U}}.$$

des deux autres analogues et des égalités (23); en prenant les parties réelles des seconds membres, nous obtiendrons finalement pour les



Courbes de variation de $\frac{\Omega}{T}$ (en traits pleins) et de Ω (en traits interrompus) en fonction de Θ pour quelques valeurs de λ.

trois composantes du champ électrique transversal

$$(31)\quad \begin{cases} X = \sqrt{U^2 + \mathcal{U}^2}\, e^{-\lambda(\omega - \Omega)\Theta} \cos\omega\left(t - \dfrac{\Omega x + \Omega y + \Omega z}{\Omega} + \dfrac{1}{\Omega}\operatorname{arctang}\dfrac{\mathcal{U}}{U}\right), \\ Y = \sqrt{V^2 + \mathcal{V}^2}\, e^{-\lambda(\omega - \Omega)\Theta} \cos\omega\left(t - \dfrac{\Omega x + \Omega y + \Omega z}{\Omega} + \dfrac{1}{\Omega}\operatorname{arctang}\dfrac{\mathcal{V}}{V}\right), \\ Z = \sqrt{W^2 + \mathcal{W}^2}\, e^{-\lambda(\omega - \Omega)\Theta} \cos\omega\left(t - \dfrac{\Omega x + \Omega y + \Omega z}{\Omega} + \dfrac{1}{\Omega}\operatorname{arctang}\dfrac{\mathcal{W}}{W}\right). \end{cases}$$

Ces égalités définissent une vibration elliptique parallèle au plan fixe

$$[illegible]$$

c'est-à-dire située dans un plan parallèle aux deux vecteurs I, $\mathfrak{H}$ et donnent pour la grandeur $H = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ de ce champ l'expression

$$(32) \quad H^2 = \frac{1}{2} e^{[illegible]} \left| 1 + \mathfrak{H}^2 - \sqrt{(1 - \mathfrak{H}^2)^2 + 4 I \mathfrak{H} \cos \varepsilon} \right| \cos^2 \alpha \left(t - \frac{z}{\Omega} - \frac{1}{2} \operatorname{arctang} \frac{2 I \mathfrak{H} \cos \varepsilon}{1 - \mathfrak{H}^2} \right) \Bigg| ,$$

ε désignant l'angle des deux vecteurs I et $\mathfrak{H}$. Il en résulte que les carrés du demi-grand axe et du demi-petit axe de l'ellipse, qui correspondent respectivement au maximum et au minimum du champ, ont pour valeurs

$$(33) \quad \frac{1}{2} e^{[illegible]} \left| 1 + \mathfrak{H}^2 \pm \sqrt{(1 - \mathfrak{H}^2)^2 + 4 I \mathfrak{H} \cos \varepsilon} \right| .$$

D'après les égalités (31), la phase de chaque composante est à chaque instant la même dans tout plan perpendiculaire à la direction (α, β, γ); ces plans s'appellent les *plans d'onde*; la quantité Ω, qui représente la vitesse à laquelle il faut se déplacer suivant la normale à ces plans pour que la phase reste constante quand t varie, s'appelle la *vitesse de propagation de l'onde*.

De même, d'après les expressions (33), l'amplitude du champ est constante dans tout plan perpendiculaire à la direction (a, b, c); ces plans s'appellent les *plans d'absorption*; la quantité h, qui mesure la rapidité du décroissement de l'amplitude quand on se déplace dans la direction (a, b, c) s'appelle le *coefficient d'absorption*; l'angle Θ est donc celui que font entre eux les plans d'onde et les plans d'absorption.

D'après les expressions (33), pour que la vibration soit circulaire, il faut et il suffit que le radical soit nul, c'est-à-dire qu'on ait

$$[illegible]$$

l'orientation du second vecteur est alors entièrement fixée d'après celle du premier.

De même, pour que la vibration soit rectiligne, il faut et il suffit

que le petit axe de l'ellipse soit nul, ce qui exige que les deux vecteurs I et $\mathfrak{J}$ aient même directrice. Dès lors, il résulte de l'égalité (30) que cette directrice est la perpendiculaire commune aux deux directions (a, b, c), (α, β, γ). Le champ électrique en chaque point de l'espace est donc dirigé suivant l'intersection du plan d'onde et du plan d'absorption qui passent par ce point.

II. *Ondes longitudinales.* — Ces ondes sont caractérisées par la solution

$$(34) \qquad l^2 = m^2 = n^2 = \frac{1}{\Omega^2}, \qquad \frac{P}{\rho} = \frac{Q}{m} = \frac{R}{n}$$

des équations (20) et (21).

Tout d'abord, on sait [1] que la vitesse effective L de propagation des perturbations électromagnétiques longitudinales dans le milieu considéré a pour expression

$$L^2 = \frac{\alpha}{h\frac{\alpha}{\rho}} \cdot \frac{K}{K-1},$$

nous pouvons donc écrire, d'après les égalités (12), (13), (14) et (15),

$$(35) \qquad \frac{1}{\Omega^2} = \frac{\rho - i\rho'}{L^2},$$

en posant

$$(36) \qquad \rho = \frac{1 + \frac{K-1}{K}\lambda^2}{1 + \left(\frac{K-1}{K}\right)^2\lambda^2}, \qquad \rho' = \frac{\frac{1}{K}}{1 + \left(\frac{K-1}{K}\right)^2\lambda^2}.$$

Si donc nous définissons encore l, m, n d'après les égalités (14), la première égalité (34) équivaut aux deux suivantes :

$$(37) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\Omega} = \dfrac{\rho}{L^2}, \\ \dfrac{1}{\Omega}\cos\Theta = \dfrac{1}{L^2}. \end{cases}$$

---

[1] L. Roy, *loc. cit.*, p. 254.

Θ étant encore défini par l'égalité (27). Le nombre ν n'étant jamais négatif, l'angle Θ des deux vecteurs $\frac{1}{\Omega}$ et h reste donc compris entre les mêmes limites o et $\frac{\pi}{2}$ que dans le cas des ondes transversales.

Laissant toujours provisoirement de côté le cas où λ, et par suite ν, serait nul, les égalités (37) déterminent sans ambiguïté $\frac{1}{\Omega}$ et h en fonction de Θ donné arbitrairement entre les limites indiquées et il vient comme précédemment

$$(38)\quad \begin{cases} \dfrac{L}{\Omega} = \sqrt{\dfrac{\mu}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + \dfrac{\nu^2}{\mu^2\cos^2\Theta}}\right)}, \\ Lh = \sqrt{\dfrac{\mu}{2}\left(-1 - \sqrt{1 + \dfrac{\nu^2}{\mu^2\cos^2\Theta}}\right)}. \end{cases}$$

Cela posé, les deuxièmes égalités (34) déterminent P, Q, R en fonction de l, m, n et d'une quantité arbitraire que nous désignerons par

$$\Delta = Ie^{i\omega\theta},$$

ce qui donne

$$(39)\qquad (P, Q, R) = (l, m, n)\,Ie^{i\omega\theta},$$

de sorte que les égalités (10) nous donnent pour les trois composantes du champ électrique longitudinal

$$(40)\quad \begin{cases} X = I\sqrt{\dfrac{\alpha^2}{\Omega^2} + a^2h^2e^{-h\omega(\alpha x + \beta y + \gamma z)}}\cos\omega\left(t - \dfrac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\Omega}\right) + \theta - \dfrac{1}{\omega}\operatorname{arctang} h\Omega\dfrac{a}{\alpha}\Big), \\ Y = I\sqrt{\dfrac{\beta^2}{\Omega^2} + b^2h^2e^{-h\omega(\alpha x + \beta y + \gamma z)}}\cos\omega\left(t - \dfrac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\Omega}\right) + \theta - \dfrac{1}{\omega}\operatorname{arctang} h\Omega\dfrac{b}{\beta}\Big), \\ Z = I\sqrt{\dfrac{\gamma^2}{\Omega^2} + c^2h^2e^{-h\omega(\alpha x + \beta y + \gamma z)}}\cos\omega\left(t - \dfrac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\Omega}\right) + \theta - \dfrac{1}{\omega}\operatorname{arctang} h\Omega\dfrac{c}{\gamma}\Big). \end{cases}$$

Ces égalités définissent une vibration elliptique parallèle au plan fixe

$$(\beta c - b\gamma)X + (\gamma a - c\alpha)Y + (\alpha b - a\beta)Z = 0,$$

c'est-à-dire perpendiculaire à l'intersection du plan d'onde et du plan d'absorption et donnent, pour la grandeur H de ce champ, l'expression qu'on obtient en remplaçant, dans l'égalité (32), I par $\frac{1}{\Omega}$, δ par h et

ε par $\pi - \Theta$; en tenant compte des égalités (37) il vient ainsi

$$(41)\quad H^2 = \frac{I^2}{2L^2} e^{-2h(\omega x + \lambda t)} \left[\sqrt{\gamma^2 + \frac{\gamma}{\cos^2\Theta}} + \sqrt{\gamma^2 - \gamma} \right.$$
$$\left. \cos 2\omega \left(t - \frac{\gamma x - \lambda y - z}{\Omega} - \varepsilon - \frac{1}{2\omega} \operatorname{arctang} \frac{\lambda}{\gamma} \right) \right]$$

et, par suite, pour les carrés des demi-axes de l'ellipse,

$$(42)\quad \frac{I^2}{2L^2} e^{-2h(\omega x + \lambda t)} \left(\sqrt{\gamma^2 + \frac{\gamma}{\cos^2\Theta}} \pm \sqrt{\gamma^2 + \gamma^2} \right).$$

Comme la quantité $\alpha^2 + \gamma^2$ ne peut être nulle pour aucun milieu, d'après les égalités (36), la vibration ne peut être circulaire. Pour qu'elle soit rectiligne, il faut et il suffit que les deux vecteurs $\frac{1}{\Omega}$ et h aient même directrice, c'est-à-dire qu'on ait $\Theta = 0$; les plans d'onde et d'absorption sont alors confondus et la vibration dirigée suivant leur perpendiculaire commune.

On obtiendrait enfin la solution générale par ondes planes périodiques latéralement illimitées en additionnant les solutions partielles (31) et (40).

III. — Ondes évanescentes et ondes uniformes.

Supposons maintenant que le nombre λ soit nul, ce qui aura lieu si le milieu considéré n'est pas conducteur; on aura, d'après les égalités (36),

$$\gamma = 1, \quad \alpha = 0,$$

de sorte que, d'après les égalités (24) et (35), les vitesses de propagation $\tilde{c}$ et $\tilde{\zeta}$ jusqu'ici imaginaires reprennent leurs valeurs réelles I et L; les égalités (26) et (37) deviennent d'autre part

$$(26)\quad \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\Omega^2} - h^2} = \frac{1}{I}, \\ \sqrt{2}\,\frac{h}{\Omega}\cos\Theta = 0, \end{cases} \qquad (37)\quad \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\Omega^2} - h^2} = \frac{1}{L}, \\ \sqrt{2}\,\frac{h}{\Omega}\cos\Theta = 0. \end{cases}$$

Considérons, par exemple, le premier groupe (26); comme l'angle Θ n'a de signification qu'autant que les deux vecteurs $\frac{1}{\Omega}$ et h ne sont pas nuls, on y satisfait de la façon la plus générale en faisant $\Theta = \frac{\pi}{2}$, ce qui vérifie la seconde équation; la première détermine alors $\frac{1}{\Omega}$ en fonc-

tion de h laissé arbitraire, ce qui donne

$$\Omega = \frac{T}{\sqrt{1 - T^2 h^2}}.$$

La vitesse de propagation de l'onde est donc susceptible d'une valeur quelconque comprise entre o et T. La limite inférieure o ne peut être atteinte puisque h devrait être infini. La limite supérieure T correspond à $h = 0$; d'après les égalités (29), les vecteurs I et $\mathfrak{z}$ sont alors situés dans le plan d'onde et il en est par suite de même du champ H, qui devient uniforme dans tout ce plan; de telles ondes sont appelées *ondes uniformes*. Quel que soit h, la vibration peut être elliptique, circulaire ou rectiligne.

Le second groupe (37′) conduit à des conclusions analogues : h étant arbitraire, la vitesse de propagation de l'onde est comprise entre o et L; l'expression (41) du champ devient

$$H^2 = \frac{I^2}{2L^2} e^{-2h\omega(\alpha x + \beta y + \gamma z)} \left[1 - 2I^2 h^2 - \cos 2\omega \left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\Omega} + \varepsilon \right) \right]$$

et l'on voit qu'il n'est rectiligne que si $h = 0$. Dans ce dernier cas, il est de plus uniforme dans le plan d'onde et, d'après les égalités (40), perpendiculaire à ce plan.

D'une manière générale, de telles ondes transversales ou longitudinales susceptibles d'être propagées par un milieu non conducteur sont appelées *ondes évanescentes*, quand la valeur correspondante de h n'est pas nulle. On sait qu'elles se sont présentées pour la première fois à Cauchy dans la théorie de la réflexion totale, mais, pendant longtemps, elles n'ont été considérées qu'à titre de cas singulier. Il est intéressant de remarquer que ces ondes sont, au contraire, les plus générales susceptibles d'être propagées par un milieu non conducteur ou, ce qui revient au même analytiquement, par un milieu élastique isotrope dénué de viscosité. Un tel milieu est donc susceptible d'une infinité de vitesses de propagation transversales et longitudinales comprises respectivement dans les intervalles (o, T), (o, L), dont les limites supérieures T et L correspondent précisément aux ondes uniformes. Cette remarque a été faite pour la première fois, à notre connaissance, par M. M. Brillouin [1].

---

[1] M. Brillouin, *Sur la propagation des vibrations dans les milieux absorbants isotropes* (*Comptes rendus*, t. 115, 1892, p. 808).

IV. — Valeurs numériques des nombres λ, μ, ν.

Avant d'aller plus loin, il est bon de nous rendre compte de la valeur numérique des nombres λ, μ, ν dans quelques cas particuliers et pour les valeurs extrêmes de ω susceptibles d'être réalisées.

Tout d'abord, si τ désigne la période de pulsation ω, Λ la longueur d'onde correspondante dans l'éther, où toutes les ondes uniformes électromagnétiques ou lumineuses se propagent avec la vitesse v, on a

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau}, \qquad \Lambda = \tau.$$

Comme on a, d'autre part,

$$\lambda = \frac{K-1}{4\pi\tau}, \qquad \frac{v^2}{\lambda} = \frac{v^2}{\frac{a^2}{\lambda} K_0 \mu_0}.$$

K_0, μ_0 désignant respectivement le pouvoir inducteur spécifique et la perméabilité magnétique de l'éther, l'expression (25) de λ devient

$$\lambda = a^2 \frac{K_0}{K-1} \frac{v\Lambda}{\tau} \mu_0.$$

Or, on peut faire $\mu_0 = 1$ à un très haut degré d'approximation, de sorte qu'en employant le système d'unités C.G.S. électromagnétiques où

$$\frac{a^2}{v} = 1, \qquad v = 3.10^{10}$$

et en supposant que le milieu considéré satisfasse à l'hypothèse de Faraday et de Mossotti, il vient

$$\lambda = 6 \frac{K_0}{K} \frac{\Lambda}{\tau} 10^{10}.$$

Le Tableau ci-après donne la valeur de λ, calculée d'après cette formule, pour quelques corps que nous avons rangés par ordre de résistivité croissante. Le calcul a été fait en prenant successivement pour Λ la longueur d'onde moyenne du spectre lumineux visible, puis la plus petite et la plus grande des longueurs d'onde électromagnétiques réalisées jusqu'ici. Si le pouvoir inducteur spécifique des métaux, qui nous est inconnu, n'est pas extrêmement grand par rapport à celui de l'éther, λ atteindrait l'ordre de 10^{10} pour l'argent, le

moins résistant des corps connus, et les très grandes longueurs d'onde. Ce nombre n'est au contraire que de l'ordre de 10^{-15} pour les corps extrêmement résistants et les très courtes longueurs d'onde.

Substances.	ρ (G.S. cm)	$\frac{k}{K}$	γ	$\lambda = 10^{-4}$ m.	γ	$\lambda = 10^{-6}$ m.	γ	$\lambda = 10^{-8}$ m.
Argent.....	$1,5.10^{7}$	∞	$\frac{k}{K}$	2.10^{-}	$\frac{k}{K}$	$2,4.10^{-}$	$\frac{k}{K}$	2.10^{-}
Mercure.....	$9,4.10^{7}$	∞	$\frac{k}{K}$	$3,2.10^{-2}$	$\frac{k}{K}$	$3,8.10^{-}$	$\frac{k}{K}$	$3,2.10^{-2}$
Eau.....	2.10^{5}	80	$1,9.10^{-}$		$2,3.10^{-}$		$1,9$	
Sélénium.....	8.10^{1}	6	$6,2.10^{-}$		-5.10^{-}		$6,2$	
Glace.....	10^{18}	3	10^{-12}		$1,2.10^{-}$		10^{-}	
Marbre.....	10^{3}	6	5.10^{-}		6.10^{-11}		5.10^{-}	
Huile d'olive....	10^{2}	3	10^{-11}		$1,2.10^{-11}$		10^{-}	
Soufre.....	10^{-}	4	-5.10^{-}		9.10^{-}		-5.10^{-}	
Verre.....	10^{-}	6	5.10^{-15}		6.10^{-15}		5.10^{-}	

Connaissant ainsi λ, les valeurs correspondantes de μ et de ν résultent des égalités (36), qui deviennent, en vertu de l'hypothèse de Faraday et de Mossotti,

$$\gamma = 1, \qquad \gamma = \frac{\frac{\gamma}{K}}{1 - \gamma}.$$

Les pouvoirs inducteurs spécifiques absolus nous étant inconnus, nous n'avons aucun moyen de calculer ν; mais comme ils sont très supérieurs à l'unité, d'après l'hypothèse de Faraday et de Mossotti, il en résulte que ν est d'un ordre de grandeur très inférieur à γ.

V. — Ondes planes latéralement limitées.

On dit que les ondes planes périodiques représentées par les égalités (10) sont latéralement limitées, quand les trois coefficients P, Q, R sont, non plus des constantes, mais des fonctions de x, y, z. Nous supposerons ces fonctions assez lentement variables pour qu'on puisse traiter leurs dérivées $\frac{\partial(P, Q, R)}{\partial(x, y, z)}$ comme des quantités infiniment petites, dont nous négligerons les carrés, les produits et les dérivées.

Considérons, par exemple, la dérivée

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \left\{ -i\omega P + \frac{\partial P}{\partial t} \right\} e^{-\omega t} \cdots\cdots\cdots.$$

comme on peut l'écrire

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x} = \left(\frac{1}{c^2} - 1\right) l - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathrm{P}x + \mathrm{Q}y + \mathrm{R}z\right),$$

on voit, suivant une remarque due à M. Boussinesq [1], qu'il n'y a qu'à remplacer, dans les égalités (20) et (21), l, m, n respectivement par $l + dl$, $m + dm$, $n + dn$, en posant

$$d(l, m, n) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial(x, y, z)}$$

et à négliger les carrés et produits de ces différentielles.

En posant alors

$$\xi = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial z}, \qquad \frac{\partial}{\partial s} = l\frac{\partial}{\partial x} + m\frac{\partial}{\partial y} + n\frac{\partial}{\partial z},$$

les égalités (20) et (21) deviennent

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right) l \sum \mathrm{P}l = (l^2 + m^2 + n^2 - \frac{1}{c^2})\mathrm{P} \\
&\qquad - \frac{i}{\omega}\left[\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\sum \mathrm{P}l - l\xi\right) - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial s}\right], \\
&\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right) m \sum \mathrm{P}l = (l^2 + m^2 + n^2 - \frac{1}{c^2})\mathrm{Q} \\
&\qquad - \frac{i}{\omega}\left[\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}\sum \mathrm{P}l - m\xi\right) - \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial s}\right], \\
&\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right) n \sum \mathrm{P}l = (l^2 + m^2 + n^2 - \frac{1}{c^2})\mathrm{R} \\
&\qquad - \frac{i}{\omega}\left[\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}\sum \mathrm{P}l - n\xi\right) - \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial s}\right],
\end{aligned}\right.$$

$$(44)\quad (l^2 + m^2 + n^2 - \frac{1}{c^2}) \sum \mathrm{P}l = \frac{i}{\omega}\left[(l^2 + m^2 + n^2 - \frac{1}{c^2})\xi - \frac{\partial}{\partial s}\sum \mathrm{P}l\right].$$

Nous avons ainsi, pour déterminer P, Q, R, non plus un système d'équations algébriques, mais un système d'équations aux dérivées partielles. Toutefois, les seconds membres étant des fonctions linéaires

---

[1] J. Boussinesq, *Théorie mathématique de la chaleur*, t. II, p. 37.

et homogènes de ces dérivées sont eux-mêmes des quantités très petites, de sorte que, pour calculer P, Q, R, nous pouvons procéder par approximations successives suivant la méthode indiquée par M. Boussinesq [1]. A une première approximation, négligeons les dérivées de P, Q, R; les seconds membres deviennent nuls et les égalités ci-dessus coïncident respectivement avec les égalités (20) et (21). Nous retrouvons donc, tout d'abord, les deux solutions

$$(33)\qquad l = m = n = \frac{1}{c^2}, \qquad \sum \mathrm{P}l = 0;$$

$$(34)\qquad l = m = n = \frac{1}{c^2}, \qquad \frac{\mathrm{P}}{l} = \frac{\mathrm{Q}}{m} = \frac{\mathrm{R}}{n},$$

relatives aux ondes latéralement illimitées et étudiées au paragraphe II. Mais tandis que P, Q, R étaient précédemment des constantes, ce sont ici plus généralement trois fonctions arbitraires de x, y, z lentement variables, assujetties seulement à vérifier les relations (22) ou (34).

La deuxième approximation consiste alors à remplacer P, Q, R par leurs valeurs de première approximation dans les seconds membres des égalités (43) et (44), en conservant pour l, m, n les mêmes valeurs que précédemment dans les deux membres. Si donc P, Q, R désignent les valeurs de première approximation, $\mathrm{P} + d\mathrm{P}$, $\mathrm{Q} + d\mathrm{Q}$, $\mathrm{R} + d\mathrm{R}$ celles de deuxième approximation, les égalités (43) et (44) deviennent, en vertu des égalités (20) et (21),

$$(45)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right) l \sum l\,d\mathrm{P} + \left(l + m + n - \frac{1}{c^2}\right) d\mathrm{P} \\
&\qquad - \frac{l}{v}\left[\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\sum \mathrm{P}l + l\xi\right) + \frac{d\mathrm{P}}{dt}\right], \\
&\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right) m \sum l\,d\mathrm{P} + \left(l + m + n - \frac{1}{c^2}\right) d\mathrm{Q} \\
&\qquad - \frac{l}{v}\left[\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}\sum \mathrm{P}l + m\eta\right) + \frac{d\mathrm{Q}}{dt}\right], \\
&\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right) n \sum l\,d\mathrm{P} + \left(l + m + n - \frac{1}{c^2}\right) d\mathrm{R} \\
&\qquad - \frac{l}{v}\left[\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}\sum \mathrm{P}l + n\zeta\right) + \frac{d\mathrm{R}}{dt}\right]
\end{aligned}\right.$$

[1] J. Boussinesq, *loc. cit.*, p. 172.

et

$$(46)\qquad \left(l^2+m^2+n^2-\frac{1}{\xi^2}\right)\sum l\,dP = -\frac{i}{\omega}\left[\left(l^2+m^2+n^2-\frac{1}{\xi^2}\right)\xi - i\frac{\partial}{\partial S}\sum Pl\right]$$

Il ne nous reste plus qu'à leur adjoindre successivement les égalités (22) et (34), qui correspondent respectivement aux ondes transversales et aux ondes longitudinales.

I. *Ondes transversales.* — En vertu des égalités (22), l'égalité (46) devient

$$(47)\qquad \sum l\,dP = -\frac{i}{\omega}\xi,$$

ce qui réduit les égalités (45) à

$$(48)\qquad \frac{\partial(P, Q, R)}{\partial S} = 0.$$

Or on a

$$(49)\qquad l\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\alpha}{\Omega}\frac{\partial U}{\partial x} + ah\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} + i\left(-ah\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\alpha}{\Omega}\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}\right),$$

de sorte que si l'on désigne par s et σ deux variables comptées respectivement suivant les directions (a, b, c) et (α, β, γ), c'est-à-dire si l'on pose

$$(50)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial s} = a\dfrac{\partial}{\partial x} + b\dfrac{\partial}{\partial y} + c\dfrac{\partial}{\partial z}, \\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial \sigma} = \alpha\dfrac{\partial}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial}{\partial y} + \gamma\dfrac{\partial}{\partial z}, \end{cases}$$

la première égalité (48) équivaudra aux deux suivantes :

$$(51)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \sigma} - h\Omega\dfrac{\partial \mathfrak{V}}{\partial s} = 0, \\[2mm] -h\Omega\dfrac{\partial U}{\partial s} - \dfrac{\partial \mathfrak{V}}{\partial \sigma} = 0, \end{cases}$$

d'après lesquelles U et $\mathfrak{V}$ vérifient la même équation aux dérivées partielles

$$(52)\qquad \frac{\partial^2(U, \mathfrak{V})}{\partial \sigma^2} + h^2\Omega\frac{\partial^2(U, \mathfrak{V})}{\partial s^2} = 0.$$

Les équations (51) et (52) ont été antérieurement obtenues par M. Boussinesq [1]. Celles-ci peuvent encore se simplifier en posant

$$s = h\Omega s$$

et en désignant par s une nouvelle variable ; elles deviennent en effet

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial V}{\partial \tau}, \qquad \frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial V}{\partial s};$$

$$\frac{\partial^2 (U, V)}{\partial \tau} = \frac{\partial (U, V)}{\partial s} = 0.$$

On voit donc, en définitive, que les égalités (48) expriment que les coefficients d'amplitude P, Q, R doivent être des fonctions analytiques de la variable complexe $s' + i\sigma$. D'ailleurs, si la condition est remplie pour deux des quantités P, Q, R, elle le sera également par la troisième en vertu de la relation $\sum P l = 0$. Nous allons voir qu'il résulte encore des égalités (51) que, si l'on connaît les fonctions P, Q, R en chaque point d'un plan quelconque, celles-ci se trouvent déterminées dans tout l'espace.

Prenons, en effet, ce plan comme plan des x, y et considérons, par exemple, la fonction P : pour $z = 0$, U et V sont des fonctions données de x, y, de sorte que les dérivées $\frac{\partial(U, V)}{\partial(x, y)}$ sont connues pour $z = 0$; dès lors, en tenant compte des égalités (50), les égalités (51) font connaître, pour $z = 0$, les deux dérivées $\frac{\partial(U, V)}{\partial z}$. On a ainsi, pour chacune de ces fonctions, deux conditions initiales qui, jointes à l'équation aux dérivées partielles (52) qu'elles vérifient, les déterminent dans tout l'espace.

En particulier, si les fonctions P, Q, R sont nulles en dehors d'une aire limitée du plan $z = 0$, il en est de même du champ électrique, de sorte que les ondes latéralement limitées que nous considérons constituent alors ce qu'on peut appeler *un pinceau électromagnétique transversal*.

On peut appeler, d'autre part, *rayon électromagnétique transversal* le lieu des points où l'amplitude du champ électrique reste

[1] J. Boussinesq, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XXIX, 1905, deuxième Partie, p. 143.

constante, abstraction faite de l'exponentielle d'extinction

$$e^{-\frac{\omega}{\Omega}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)};$$

si l'on néglige les termes complémentaires provenant des quantités infiniment petites $d(\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R})$, le champ a la même expression (12) que dans le cas des ondes latéralement illimitées, sauf que les quantités $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{z}$ sont maintenant des fonctions de x, y, z. Les parties principales des carrés des demi-axes de l'ellipse décrite par l'extrémité du vecteur H sont donc représentées par les expressions (13), de sorte que le lieu des points où ces axes restent constants, abstraction faite de l'exponentielle, est représenté par la famille de courbes

$$\mathfrak{l}^2 + \mathfrak{s}^2 + \sqrt{(\mathfrak{l}^2 - \mathfrak{s}^2)^2 - (2\mathfrak{l}\mathfrak{s}\cos\zeta)^2} = \mathrm{C},$$

$$\mathfrak{l}^2 + \mathfrak{s}^2 - \sqrt{(\mathfrak{l}^2 - \mathfrak{s}^2)^2 - (2\mathfrak{l}\mathfrak{s}\cos\zeta)^2} = \mathrm{C}',$$

C et C′ désignant deux constantes arbitraires. Chaque courbe de cette famille est précisément un rayon électromagnétique transversal.

Cela posé, il ne nous reste plus qu'à déterminer les trois quantités infiniment petites $d(\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R})$, seulement astreintes à vérifier l'égalité (17), dont le second membre est maintenant connu; deux des quantités $d(\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R})$ sont donc arbitraires. Posons alors

$$d(\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}) = d(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}) + \varepsilon\, d(x, y, z)$$

et soient :

$d\mathrm{I}$ le vecteur de correspondantes $d(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W})$;

φ' l'angle des deux vecteurs $d\mathrm{I}$ et $\frac{\mathrm{I}}{\Omega}$;

ψ' l'angle des deux vecteurs $d\mathrm{I}$ et h;

$d\mathrm{s}$ le vecteur de composantes $d(x, y, z)$;

Φ' l'angle des deux vecteurs $d\mathrm{s}$ et $\frac{\mathrm{I}}{\Omega}$;

Ψ' l'angle des deux vecteurs $d\mathrm{s}$ et h;

par un calcul analogue à celui que nous avons fait au paragraphe II, nous voyons, d'après l'expression de ε, que l'égalité (17) équivaut aux deux suivantes :

$$\frac{\cos\varphi'}{\Omega}\, d\mathrm{I} + h\cos\Psi'\, d\mathrm{s} = \frac{\varepsilon}{\omega}\left(\frac{dx}{dy} - \frac{dz}{dy} + \frac{dw}{dz}\right),$$

$$h\cos\psi'\, d\mathrm{I} + \frac{\cos\Phi'}{\Omega}\, d\mathrm{s} = \frac{\varepsilon}{\omega}\left(\frac{d\mathrm{U}}{dy} - \frac{d\mathrm{V}}{dx} - \frac{d\mathrm{W}}{dz}\right).$$

qui déterminent les deux vecteurs dI, dS en fonction des petites dérivées $\frac{\partial(L, M, \ldots, \mathcal{N})}{\partial(x, y, z)}$ et des quatre angles ξ, ψ, Φ, Ψ donnés arbitrairement sous la seule condition que la quantité

$$\frac{\cos\xi \cos\Phi}{\Omega^2} - h^2 \cos\psi \cos\Psi$$

soit différente de zéro.

Le problème des ondes transversales latéralement limitées est ainsi entièrement résolu.

II. *Ondes longitudinales.* — En vertu de la première égalité (34), l'égalité (46) devient

$$\frac{\partial}{\partial s} \sum Pl = 0,$$

de sorte que si l'on pose encore, d'après les deux autres égalités (34),

$$\frac{P}{l} = \frac{Q}{m} = \frac{R}{n} = \Delta, \tag{53}$$

on aura

$$\sum Pl = \frac{\Delta}{\Omega^2}$$

et par suite

$$\frac{\partial \Delta}{\partial s} = 0. \tag{54}$$

La quantité $\Delta = Le^{\omega\delta}$ est donc une fonction analytique de $s + i\sigma$ et, d'après ce qu'on a vu précédemment, il suffit de se la donner dans un plan pour qu'elle soit déterminée dans tout l'espace.

En particulier, si L est nul en dehors d'une aire limitée de ce plan, il en sera de même du champ électrique, de sorte que les ondes latéralement limitées que nous considérons, constitueront un pinceau électrique longitudinal.

Si l'on néglige encore les termes complémentaires provenant des quantités infiniment petites $d(P, Q, R)$, le champ a la même expression (41) que dans le cas des ondes latéralement illimitées, sauf que les quantités L et δ sont maintenant des fonctions de x, y, z. Les parties principales des carrés des demi-axes de l'ellipse décrite par l'extrémité du vecteur H sont donc représentées par les expressions (42), de sorte

que le lieu des points où ces axes restent constants, abstraction faite de l'exponentielle d'extinction, est représenté, non plus par une famille de courbes, mais par la famille de surfaces

$$\Delta = C,$$

C désignant une constante arbitraire. On ne peut donc plus ici, comme dans le cas des ondes transversales, parler de rayons électromagnétiques longitudinaux.

Cela posé, il ne nous reste plus qu'à déterminer les trois quantités infiniment petites $d(P, Q, R)$: d'après les égalités (54) et (54), on a

$$\Sigma = l\frac{\partial\Delta}{\partial x} + m\frac{\partial\Delta}{\partial y} + n\frac{\partial\Delta}{\partial z} = \frac{\partial\Delta}{\partial s} = 0,$$

$$\frac{d(P, Q, R)}{ds} = (l, m, n)\frac{\partial\Delta}{\partial s} = 0,$$

de sorte que les égalités (45) deviennent

$$\Sigma' l \sum l\,dP = dP = \frac{i}{\omega}\frac{\partial\Delta}{\partial x},$$

$$\Sigma' m \sum l\,dP = dQ = \frac{i}{\omega}\frac{\partial\Delta}{\partial y},$$

$$\Sigma' n \sum l\,dP = dR = \frac{i}{\omega}\frac{\partial\Delta}{\partial z}.$$

D'après l'égalité (54), qui en est une combinaison, elles se réduisent à deux distinctes et déterminent aussi deux des quantités $d(P, Q, R)$ en fonction de la troisième laissée arbitraire.

En particulier, si l'on impose à ces quantités la condition supplémentaire $\sum l\,dP = 0$, il vient les expressions très simples

$$d(P, Q, R) = \frac{i}{\omega}\frac{\partial\Delta}{\partial(x, y, z)},$$

d'après lesquelles les vecteurs dI et dS dérivent d'un potentiel.

VI. Cas d'un milieu très résistant

Quand le milieu considéré est très résistant, nous avons vu (§ IV) que λ est un nombre très petit et qu'il en est *a fortiori* de même de ω

Il y a donc lieu d'examiner les simplifications que cette circonstance introduit dans les résultats précédents.

Nous supposerons l'angle Θ suffisamment différent de $\frac{\pi}{2}$ pour que le nombre $\frac{\lambda}{\cos\Theta}$ soit lui-même très petit; il en sera donc *a fortiori* de même de $\frac{\lambda'}{\cos\Theta}$. Nous traiterons ces nombres λ, λ', $\frac{\lambda\lambda'}{\cos\Theta}$ comme des quantités très petites dont nous négligerons les carrés et produits.

Considérons déjà le cas des ondes latéralement illimitées : tout d'abord, au degré d'approximation adopté, les égalités (28) relatives aux ondes transversales se réduisent à

$$\Omega = 1 \qquad \Phi = \frac{\pi}{2} - \sqrt{1 - \cos\Theta};$$

le coefficient d'extinction est donc très petit. Dès lors, il résulte des égalités (29) que les angles φ et Φ sont très voisins de $\frac{\pi}{2}$; les vecteurs I et $\mathfrak{s}$ sont ainsi presque parallèles aux plans d'onde et il en est par suite de même de la vibration.

De même, les égalités (38) relatives aux ondes longitudinales se réduisent à

$$\Omega = 1 \qquad \Phi = \frac{\pi}{2} - \sqrt{1 - \cos\Theta};$$

le coefficient d'extinction est donc encore très petit. Dès lors, les radicaux qui figurent dans les égalités (40) peuvent être remplacés respectivement par

$$\frac{(\mathfrak{s}, \mathfrak{s}, \mathfrak{s}, 1)}{\Omega}.$$

ce qui montre que la vibration est sensiblement rectiligne et dirigée suivant la normale aux plans d'onde.

Passons au cas des ondes latéralement limitées : dans l'égalité (49), les termes en $h\frac{d(\mathfrak{s}, \mathfrak{s}, \mathfrak{s})}{dx}$ sont négligeables comme étant du second ordre de petitesse, de sorte qu'au degré d'approximation adopté, les paramètres directeurs l, m, n peuvent, dans le calcul de $\frac{d}{ds}$, être réduits à leurs parties principales $\frac{(\mathfrak{s}, \mathfrak{s}, \mathfrak{s}, 1)}{\Omega}$. Les égalités (48) et (54), qui

deviennent ainsi

$$\frac{\partial(P, Q, R)}{\partial \sigma} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial \sigma} = 0,$$

montrent alors que la propagation se fait très sensiblement suivant la normale aux plans d'onde. Les rayons électromagnétiques, courbes en général, sont donc ici très sensiblement rectilignes.

Remarquons enfin que cette propagation suivant la normale aux plans d'onde devient rigoureuse pour $h = 0$, c'est-à-dire pour les ondes uniformes latéralement limitées propagées par un milieu non conducteur.

CHAPITRE II.

LE PROBLÈME DE LA RÉFLEXION ET DE LA RÉFRACTION.

I. — Position du problème [1].

Considérons deux milieux homogènes et isotropes en repos confinant l'un à l'autre par le plan des x, y : l'un, que nous désignerons par l'indice zéro, occupe toute la région de l'espace où z est négatif; l'autre, que nous désignerons par l'indice 1, occupe toute la région de l'espace où z est positif.

Pris dans toute sa généralité, le problème de la réflexion et de la réfraction consisterait à déterminer, à l'instant t, l'état électrique et magnétique du système résultant d'une perturbation entretenue sur une surface donnée à partir de l'instant initial; dans le présent Mémoire, nous nous bornerons à étudier la solution simple la plus générale par ondes planes périodiques dont ce problème est susceptible.

Nous affecterons de l'indice 1 les quantités relatives au milieu 1; les quantités sans indice seront relatives au milieu zéro.

Cela posé, il résulte des égalités (10), (22) et (34) (Chap. I, § II) que la solution la plus générale par ondes planes périodiques des

---

[1] L. Roy, *Sur le problème de la réflexion et de la réfraction par ondes planes périodiques* (*Comptes rendus*, t. 166, [illegible]).

équations indéfinies (11) est, pour nos deux milieux,

$$(55)\qquad (X, Y, Z) = \sum (P, Q, R)\, e^{[illegible]}$$
$$= \sum (l', m', n')\, \Delta\, e^{[illegible]},$$

$$(55')\qquad (X_1, Y_1, Z_1) = \sum (P_1, Q_1, R_1)\, e^{[illegible]}$$
$$= \sum (l_1, m_1, n_1)\, \Delta_1\, e^{[illegible]}$$

avec

$$(56)\qquad l^2 + m^2 + n^2 = \frac{1}{\mathfrak{C}^2},$$
$$Pl + Qm + Rn = 0,$$

$$(57)\qquad l'^2 + m'^2 + n'^2 = \frac{1}{\mathfrak{C}'^2};$$

$$(56')\qquad l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = \frac{1}{\mathfrak{C}_1^2},$$
$$P_1 l_1 + Q_1 m_1 + R_1 n_1 = 0,$$

$$(57')\qquad l_1'^2 + m_1'^2 + n_1'^2 = \frac{1}{\mathfrak{C}_1'^2},$$

les amplitudes Δ et Δ_1 étant arbitraires et chaque signe $\sum$ indiquant la somme d'un nombre quelconque de termes analogues.

Mais l'existence de la surface séparative, qui astreint les expressions (55) et (55') à vérifier, pour $z = 0$, les conditions (4), (8), (9), (15) et (16), y apporte de grandes simplifications.

En effet, ces conditions aux limites étant des équations linéaires et homogènes par rapport à X, Y, Z; X_1, Y_1, Z_1 et à leurs dérivées, qui doivent être vérifiées pour $z = 0$, fournissent des relations linéaires et homogènes par rapport aux exponentielles successives

$$e^{[illegible]}, \ldots, e^{[illegible]}, \ldots; e^{[illegible]}, \ldots, e^{[illegible]}, \ldots$$

qui doivent être satisfaites quels que soient t, x, y. Or, comme nous ne cherchons que la solution simple la plus générale, toutes ces exponentielles doivent être identiques; cela exige que toutes les ondes partielles aient même pulsation ω et qu'on ait les relations

$$l = \ldots = l' = \ldots = l_1 = \ldots = l_1';$$
$$m = \ldots = m' = \ldots = m_1 = \ldots = m_1'.$$

Alors, en vertu des relations (56), (57), (56'), (57'), qui donnent pour n, n', n_1 et n'_1 les deux seules solutions $\pm n$, $\pm n'$, $\pm n_1$, $\pm n'_1$, on voit qu'il ne subsiste, dans le milieu zéro, que les quatre ondes de paramètres directeurs

$$l,\ m,\ n;\quad l,\ m,\ -n;\quad l',\ m',\ n';\quad l',\ m',\ -n'$$

et, dans le milieu 1, que les quatre ondes de paramètres directeurs

$$l_1,\ m_1,\ n_1;\quad l_1,\ m_1,\ -n_1;\quad l'_1,\ m_1,\ n'_1;\quad l'_1,\ m_1,\ -n'_1.$$

On peut donc dire que, si l'un des deux milieux est le siège d'une onde plane périodique de paramètres directeurs et de pulsation donnés, les expressions

$$(58)\quad \left\{\begin{aligned} X &= (P e^{i\,\mathrm{ton}\,z} + P' e^{i\,\mathrm{ton}\,z})\, e^{[\mathrm{ton}\,(l\,x+m\,y)]} \\ &\quad + l'(\Delta e^{i\,\mathrm{ton}\,z} + \Delta' e^{i\,\mathrm{ton}\,z})\, e^{[\mathrm{ton}\,(l\,x+m\,y)]}, \\ Y &= (Q e^{i\,\mathrm{ton}\,z} + Q' e^{i\,\mathrm{ton}\,z})\, e^{[\mathrm{ton}\,(l\,x+m\,y)]} \\ &\quad + m'(\Delta e^{i\,\mathrm{ton}\,z} + \Delta' e^{i\,\mathrm{ton}\,z})\, e^{[\mathrm{ton}\,(l\,x+m\,y)]}, \\ Z &= (R e^{i\,\mathrm{ton}\,z} + R' e^{i\,\mathrm{ton}\,z})\, e^{[\mathrm{ton}\,(l\,x+m\,y)]} \\ &\quad + n'(\Delta e^{i\,\mathrm{ton}\,z} - \Delta' e^{i\,\mathrm{ton}\,z})\, e^{[\mathrm{ton}\,(l\,x+m\,y)]}; \end{aligned}\right.$$

$$(58')\quad \left\{\begin{aligned} X_1 &= (P_1 e^{i\,\mathrm{ton}_1\,z} + P'_1 e^{i\,\mathrm{ton}_1\,z})\, e^{[\mathrm{ton}_1\,(l_1\,x+m_1\,y)]} \\ &\quad + l_1(\Delta_1 e^{i\,\mathrm{ton}_1\,z} + \Delta'_1 e^{i\,\mathrm{ton}_1\,z})\, e^{[\mathrm{ton}_1\,(l_1\,x+m_1\,y)]}, \\ Y_1 &= (Q_1 e^{i\,\mathrm{ton}_1\,z} + Q'_1 e^{i\,\mathrm{ton}_1\,z})\, e^{[\mathrm{ton}_1\,(l_1\,x+m_1\,y)]} \\ &\quad + m'_1(\Delta_1 e^{i\,\mathrm{ton}'_1\,z} + \Delta'_1 e^{i\,\mathrm{ton}'_1\,z})\, e^{[\mathrm{ton}_1\,(l_1\,x+m_1\,y)]}, \\ Z_1 &= (R_1 e^{i\,\mathrm{ton}_1\,z} + R'_1 e^{i\,\mathrm{ton}_1\,z})\, e^{[\mathrm{ton}_1\,(l_1\,x+m_1\,y)]} \\ &\quad + n_1(\Delta_1 e^{i\,\mathrm{ton}'_1\,z} - \Delta'_1 e^{i\,\mathrm{ton}'_1\,z})\, e^{[\mathrm{ton}_1\,(l_1\,x+m_1\,y)]}, \end{aligned}\right.$$

auxquelles on doit joindre les relations (56), (57), (56'), (57') et les suivantes :

$$(59)\quad \left\{\begin{aligned} l &= l' = l_1 = l'_1, \\ m &= m' = m_1 = m'_1; \end{aligned}\right.$$

$$(60)\quad \left\{\begin{aligned} P\,l &+ Q\,m + R\,n = 0, \\ P\,l &+ Q\,m - R\,n = 0, \\ P_1\,l_1 &+ Q_1\,m_1 + R_1\,n_1 = 0, \\ P_1\,l_1 &+ Q_1\,m_1 - R_1\,n = 0, \end{aligned}\right.$$

représentent la solution simple correspondante la plus générale par

ondes planes périodiques, dont le problème de la réflexion et de la réfraction soit susceptible.

Les égalités (59) jointes aux égalités (56), (57), (56'), (57') vont nous permettre de déterminer tout d'abord les orientations ainsi que les vitesses de propagation et les coefficients d'absorption de toutes les ondes en fonction de ces mêmes éléments relatifs à l'une d'entre elles. L'application des conditions aux limites nous donnera ensuite un certain nombre de relations entre les coefficients d'amplitude, qu'il faudra joindre aux précédentes (60). Nous verrons alors quels sont ceux de ces coefficients qu'il est nécessaire de se donner pour que le problème soit déterminé.

II. — Ondes incidentes et ondes réfléchies.

Considérons l'onde dont les paramètres directeurs sont

$$(l, m, n) = \frac{\alpha, \beta, \gamma}{\Omega} - ih(\alpha, \beta, \gamma) \tag{58}$$

et que nous appellerons, pour abréger, l'onde (l, m, n); en prenant pour plan zOx celui contenant la normale $O\nu$ aux plans d'onde correspondants, nous aurons $\beta = 0$. D'autre part, puisque l'onde $(l, m, -n)$ figure également dans les égalités (58), nous pouvons supposer γ positif, de sorte que, si nous prenons pour axe Ox la direction qui fait un angle aigu avec $O\nu$, la direction $O\nu$ sera située dans l'angle zOx et en posant $i = zO\nu$ (1), nous aurons

$$\alpha = \sin i, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \cos i. \tag{61}$$

Le paramètre m étant ainsi imaginaire pur, il en est de même de m', m_1, m'_1, d'après les égalités (59), de sorte qu'en posant

$$\left\{\begin{aligned} (l', m', n') &= \frac{(\alpha', \beta', \gamma')}{\Omega'} - ih'(\alpha', \beta', \gamma'), \\ (l_1, m_1, n_1) &= \frac{(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)}{\Omega_1} - ih_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), \\ (l'_1, m'_1, n'_1) &= \frac{(\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1)}{\Omega'_1} - ih'_1(\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1). \end{aligned}\right. \tag{62}$$

(1) La même lettre i désigne également le symbole $\sqrt{-1}$, mais il n'y a évidemment aucune confusion à craindre.

on a aussi

$$(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_1) = 0.$$

Tous les plans d'onde sont donc normaux au plan zOx appelé *plan d'incidence*.

Nous dirons que l'onde (l, m, n) est *l'onde transversale incidente* dans le milieu zéro, que i est *l'angle d'incidence* correspondant et que l'onde $(l, m, -n)$ est *l'onde tranversale réfléchie* dans le milieu zéro. La normale issue de O aux plans d'onde de cette dernière est symétrique de Oy par rapport à Ox; elle fait donc avec la direction des z négatifs un angle appelé *angle de réflexion* précisément égal à l'angle d'incidence i.

Soit alors i' l'angle compté positivement de Oz vers Ox que fait avec Oz la normale Oy' aux plans d'onde de l'onde (l', m', n'): on a

$$\eta' = \sin i', \qquad \zeta' = \cos i'$$

et, de même, i_1 et i'_1 ayant des significations analogues,

$$\eta_1 = \sin i_1, \qquad \zeta_1 = \cos i_1,$$
$$\eta'_1 = \sin i'_1, \qquad \zeta'_1 = \cos i'_1.$$

Les égalités (59) sont ainsi, d'après les égalités (62), équivalentes aux suivantes :

$$(63) \qquad \frac{\sin i}{\Omega} = \frac{\sin i}{\Omega} = \frac{\sin i_1}{\Omega_1} = \frac{\sin i_1}{\Omega_1},$$
$$ha = h'a' = h_1 a_1 = h'_1 a'_1,$$
$$hb = h'b' = h_1 b_1 = h'_1 b'_1$$

qui constituent la généralisation de la loi de Descartes.

En particulier, si le milieu zéro n'est pas conducteur et si l'onde (l, m, n) est uniforme, h est nul: de sorte que, si h_1 et h'_1 ne sont pas nuls, ce qui a lieu nécessairement si le milieu 1 est conducteur, les cosinus directeurs a_1, b_1, a'_1, b'_1 sont nuls. Les plans d'absorption dans le milieu 1 sont donc alors parallèles à la surface séparative.

D'après les égalités (63), $\sin i'$, $\sin i_1$, $\sin i'_1$ sont positifs: comme, d'autre part, les ondes $(l', m', -n')$, $(l_1, m_1, -n_1)$, $(l'_1, m'_1, -n'_1)$ figurent dans les égalités (58) et (58') en même temps que les ondes (l', m', n'), (l_1, m_1, n_1), (l'_1, m'_1, n'_1), nous pouvons supposer $\cos i'$, $\cos i_1$, $\cos i'_1$ également positifs; d'où il résulte que les angles i', i_1, i'_1 sont, comme l'angle i, compris entre 0 et

Dans ces conditions, nous dirons que :

L'onde (l', m', n') est *l'onde longitudinale incidente* dans le milieu zéro :

L'onde $(l', m', -n')$ est *l'onde longitudinale réfléchie* dans le milieu zéro ;

L'onde (l_1, m_1, n_1) est *l'onde transversale incidente* dans le milieu 1 :

L'onde (l_1, m_1, n_1) est *l'onde transversale réfléchie* dans le milieu 1 ;

L'onde $(l_1, m_1, -n_1)$ est *l'onde longitudinale incidente* dans le milieu 1 ;

L'onde (l'_1, m'_1, n'_1) est *l'onde longitudinale réfléchie* dans le milieu 1.

i' est *l'angle d'incidence longitudinale* dans le milieu zéro ; il est égal à *l'angle de réflexion longitudinale*, dans le même milieu, que fait avec la direction des z négatifs la normale aux plans d'onde de l'onde $(l', m', -n')$.

i_1 est *l'angle de réflexion transversale* dans le milieu 1 ; il est égal à *l'angle d'incidence transversale*, dans le même milieu, que fait avec la direction des z négatifs la normale aux plans d'onde de l'onde $(l_1, m_1, -n_1)$.

i'_1 est *l'angle de réflexion longitudinale* dans le milieu 1 ; il est égal à *l'angle d'incidence longitudinale*, dans le même milieu, que fait avec la direction des z négatifs la normale aux plans d'onde de l'onde $(l_1, m_1, -n_1)$.

Nous sommes donc conduits, en définitive, à considérer dans chaque milieu deux ondes incidentes, transversale et longitudinale, et deux ondes réfléchies, transversale et longitudinale.

Nous insistons sur cette spécification, en modifiant en partie la terminologie jusqu'ici adoptée, pour la raison suivante : dans la théorie de la réflexion et de la réfraction, telle qu'elle a été exposée jusqu'ici à notre connaissance et dont les ondes longitudinales se trouvent généralement exclues par la forme même des équations d'où l'on part, on admet que le mouvement, dans le milieu zéro, résulte de l'onde incidente (l, m, n) et de l'onde réfléchie $(l, m, -n)$, ce qui est bien conforme à ce que nous venons de voir ; mais dans le milieu 1, on ne considère *a priori* que l'onde (l_1, m_1, n_1), qu'on appelle *onde réfractée* parce qu'on la regarde physiquement comme le prolongement de l'onde (l, m, n) dans le second milieu, et l'on passe entiè-

rement sous silence la quatrième onde $(l_1, m_1, -n_1)$, dont la considération s'impose pourtant au même titre que les trois premières d'après l'analyse qui précède. Cette quatrième onde, à laquelle nous conduit logiquement une théorie complète, étant l'homologue de l'onde (l, m, n), il était naturel de lui donner le même nom d'*onde incidente*. De même, les ondes homologues $(l, m, -n)$, (l_1, m_1, n_1) devant naturellement aussi porter le même qnalificatif, du fait que nous convenions d'appeler encore la première *onde réfléchie* dans le milieu zéro, nous devions également appeler la seconde *onde réfléchie* dans le milieu 1 et non plus *onde réfractée*.

III. — Relations entre les éléments directeurs, les vitesses de propagation et les coefficients des ondes.

Cela posé, nous allons déterminer les éléments de ces différentes ondes en fonction des éléments de l'une d'entre elles, par exemple de l'onde transversale incidente (l, m, n) dans le milieu zéro, en commençant par les ondes $(l', m', \pm n')$.

D'après les égalités (59), l'égalité (57) peut s'écrire

$$n'^2 = \frac{1}{\mathfrak{L}^2} - l'^2 - m'^2.$$

Posons alors

$$C' = \frac{\cos i}{\Omega}, \qquad \mathfrak{S} = h\,\mathfrak{C}',$$

on aura

$$n' = C' - i\mathfrak{S}',$$

puis, remplaçons $\mathfrak{L}$, l, m par leurs expressions (35) et (23) ; en séparant le réel de l'imaginaire et en posant

$$(64)\quad \begin{cases} 2f = \dfrac{\mathfrak{L}}{L^2} - (a^2 + b^2)h^2 - \dfrac{\sin^2 i}{\Omega}, \\[2ex] 2g = \dfrac{\mathfrak{L}}{L^2} - 2ah\dfrac{\sin i}{\Omega}, \end{cases}$$

il viendra pour déterminer C' et $\mathfrak{S}'$ les deux équations

$$C'^2 - \mathfrak{S}'^2 = 2f,$$
$$C'\mathfrak{S}' = g.$$

On en déduit aisément sans ambiguïté, puisque C' n'est jamais

négatif,

$$(65)\qquad \begin{cases} C = \sqrt{f + \sqrt{f^2 + g^2}}, \\ \mathfrak{C} = \mathfrak{C}\sqrt{-f + \sqrt{f^2 + g^2}}, \end{cases}$$

le signe à prendre devant le dernier radical étant celui de g. Dès lors, les deux groupes de relations

$$(66)\qquad \begin{cases} \dfrac{\sin i}{\Omega} = \dfrac{\sin i}{\Omega}, \\ \dfrac{\cos i}{\Omega} = C; \end{cases}$$

$$(67)\qquad \begin{cases} a'h' = ah, \\ b'h' = bk, \\ c'h' = \mathfrak{C}, \end{cases}$$

donnent pour la vitesse de propagation et le coefficient d'absorption de l'onde considérée

$$(68)\qquad \frac{1}{\Omega'^2} = \frac{\sin^2 i}{\Omega^2} + C^2, \qquad h' = (a^2 + b^2)h^2 + \mathfrak{C}^2,$$

c'est-à-dire en développant

$$\frac{2}{\Omega'^2} = \frac{g}{L^2} + (a^2 + b^2)h^2 + \frac{\sin^2 i}{\Omega^2}$$
$$+ \sqrt{\left[\frac{g}{L^2} + (a^2 + b^2)h^2 - \frac{\sin^2 i}{\Omega^2}\right]^2 + \left(\frac{g}{L^2} - 2ah\frac{\sin i}{\Omega}\right)^2},$$
$$2h'^2 = -\frac{g}{L^2} + (a^2 + b^2)h^2 + \frac{\sin^2 i}{\Omega^2}$$
$$\sqrt{\left[\frac{g}{L^2} + (a^2 + b^2)h^2 - \frac{\sin^2 i}{\Omega^2}\right]^2 + \left(\frac{g}{L^2} - 2ah\frac{\sin i}{\Omega}\right)^2}.$$

Ω' et h' étant ainsi déterminés, les égalités (66) font connaître l'angle d'incidence i' et les égalités (67) les trois cosinus directeurs a', b', c'.

Dans le cas particulier où $g = 0$, les expressions (65) de C' et de $\mathfrak{C}$ deviennent

$$C = \sqrt{f + |f|}, \qquad \mathfrak{C}' = \mathfrak{C}\sqrt{-f + |f|};$$

nous avons donc deux cas à distinguer suivant le signe de f.

Si f est positif, il vient

$$C' = \sqrt{2f}, \qquad \varepsilon' = 0,$$

de sorte que les expressions (68) de Ω' et de h' deviennent

$$\frac{1}{\Omega'^2} = \frac{2}{L^2} = (a' + b^2)h', \qquad h' = (a^2 + b^2)h',$$

en même temps que c' est nul. Les plans d'absorption des ondes $(l', m', \pm n')$ sont donc confondus et perpendiculaires à la surface séparative des deux milieux.

Si f est négatif, il vient

$$C' = 0, \qquad \varepsilon' = \sqrt{-2f},$$

car on peut évidemment alors supposer ε' positif, de sorte que les expressions (68) de Ω' et de h' deviennent

$$\frac{1}{\Omega} = \frac{\sin i}{\Omega}, \qquad h' = \frac{2}{L^2} = \frac{\sin^2 i}{\Omega},$$

en même temps que $\cos i$ est nul. Les plans d'onde des ondes $(l', m', \pm n')$ sont donc confondus et perpendiculaires à l'axe Oz, suivant lequel s'effectue la propagation.

Plus particulièrement encore, g est identiquement nul si le milieu zéro n'est pas conducteur et si l'onde (l, m, n) est uniforme, puisqu'alors les quantités ν et h sont nulles. Si donc f est positif, h' est nul, de sorte que les ondes $(l', m', \pm n')$ sont uniformes; si au contraire f est négatif, h' n'est pas nul, de sorte que les ondes $(l', m', \pm n')$ sont évanescentes.

Passons aux ondes $(l_1, m_1, \pm n_1)$: on a, d'après les égalités (56) et (59),

$$n_1^2 = \frac{1}{\Omega_1^2} - l_1^2 - m_1^2,$$

de sorte qu'en posant

$$C_1 = \frac{\cos i_1}{\Omega_1}, \qquad \varepsilon_1 = h_1 \nu_1,$$

$$2f_1 = \frac{1}{\Omega_1^2} - (a^2 + b^2)h = \frac{\sin^2 i}{\Omega},$$

$$2g_1 = \frac{h_1}{\Omega_1} = ab\frac{\sin i}{\Omega},$$

on obtient, par un calcul analogue au précédent,

$$C_1 = \sqrt{f_1 - \sqrt{f_1^2 + g_1^2}},$$
$$C'_1 = \sqrt{-f_1 + \sqrt{f_1^2 + g_1^2}},$$

le signe à prendre devant le dernier radical étant celui de g_1. Les deux groupes de relations

$$(66') \quad \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\sin i_1}{\Omega_1}} = \dfrac{\sin i}{\Omega}, \\ \sqrt{\dfrac{\cos i_1}{\Omega_1}} = C_1; \end{cases}$$

$$(67) \quad \begin{cases} a_1 h_1 = ah, \\ b_1 h_1 = bh, \\ c_1 h_1 = C_1 \end{cases}$$

donnent ensuite

$$\frac{1}{\Omega_1^2} = \frac{\sin^2 i}{\Omega^2} + C_1^2, \qquad h_1^2 = (a^2 + b^2)h^2 + C_1^2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{2}{\Omega_1^2} = \frac{1}{T_1^2} + (a^2 + b^2)h^2 + \frac{\sin^2 i}{\Omega^2}$$
$$+ \sqrt{\left[\frac{1}{T_1^2} + (a^2 + b^2)h^2 + \frac{\sin^2 i}{\Omega^2}\right]^2 + \left(\frac{2}{T_1^2} + 2ah\frac{\sin i}{\Omega}\right)^2},$$

$$2h_1^2 = \frac{1}{T_1^2} + (a^2 + b^2)h^2 + \frac{\sin^2 i}{\Omega^2}$$
$$- \sqrt{\left[\frac{1}{T_1^2} + (a^2 + b^2)h^2 + \frac{\sin^2 i}{\Omega^2}\right]^2 + \left(\frac{2}{T_1^2} + 2ah\frac{\sin i}{\Omega}\right)^2}.$$

Les relations (66') et (67) font ensuite connaître i_1, a_1, b_1, c_1.

Considérons le cas particulier où $g_1 = 0$: si f_1 est positif, il vient comme précédemment

$$C_1 = \sqrt{2f_1}, \qquad C'_1 = 0,$$
$$\frac{1}{\Omega_1^2} = \frac{1}{T_1^2} + (a^2 + b^2)h^2, \qquad h_1^2 = (a^2 + b^2)h^2, \qquad c_1 = 0.$$

Les plans d'absorption des ondes (l_1, m_1, n_1) sont donc confondus et perpendiculaires à la surface séparative des deux milieux.

Si f_1 est négatif, il vient

$$C_1 = 0, \qquad \mathfrak{C}_1 = \sqrt{-2f_1},$$

$$\frac{1}{\Omega_1} = \frac{\sin i}{\Omega}, \qquad h_1^2 = -\frac{1}{T_1^2} + \frac{\sin^2 i}{\Omega^2}, \qquad \cos i_1 = 0.$$

Les plans d'onde des ondes $(l_1, m_1, \pm n_1)$ sont donc confondus et perpendiculaires à l'axe Ox suivant lequel s'effectue la propagation.

Plus particulièrement encore, g_1 est identiquement nul si les deux milieux 0 et 1 ne sont pas conducteurs et si l'onde (l, m, n) est uniforme, puisqu'alors les quantités λ_1 et h sont nulles. Si donc f_1 est positif, c'est-à-dire, en remarquant qu'alors $\Omega = T$, si $\sin i < \frac{T}{T_1}$, h_1 est nul, de sorte que les ondes $(l_1, m_1, \pm n_1)$ sont uniformes. Ceci correspond au cas dit de la *réfraction ordinaire*. Si au contraire f_1 est négatif, c'est-à-dire si $\sin i > \frac{T}{T_1}$, h_1 n'est pas nul, de sorte que les ondes $(l_1, m_1, \pm n_1)$ sont évanescentes. Ceci correspond au cas dit de la *réflexion totale*.

Enfin, les formules relatives aux ondes $(l_1, m_1, \pm n_1)$ se déduiraient de celles relatives aux ondes $(l', m', \pm n')$ par l'adjonction de l'indice 1 au bas des quantités

$$n', \mathfrak{L}, C, \mathfrak{C}, \rho, \lambda, L, a, b, c, h, \Omega.$$

IV. — Relations entre les coefficients d'amplitude; conditions pour que le problème soit déterminé.

Il ne nous reste plus qu'à appliquer les équations (15), (16), (4), (8), (9), spéciales à la surface séparative $z = 0$ des deux milieux, ce qui nous fournira un certain nombre de relations entre les amplitudes. Comme on a ici

$$(\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1) = 0, \qquad \rho = -1, \qquad \rho_1 = 0,$$

ces équations prennent la forme

$$\mathfrak{R} Z = \mathfrak{R}_1 Z_1,$$

$$\mathfrak{R} \frac{\partial U}{\partial t} = \mathfrak{R}_1 \frac{\partial U_1}{\partial t}.$$

et

$$X = X_1,$$
$$Y = Y_1,$$
$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y_1}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial y},$$
$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) = \frac{1}{\rho_1}\left(\frac{\partial Z_1}{\partial y} - \frac{\partial Y_1}{\partial z}\right),$$
$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) = \frac{1}{\rho_1}\left(\frac{\partial X_1}{\partial z} - \frac{\partial Z_1}{\partial x}\right).$$

Comme la cinquième résulte des deux qui la précèdent, nous n'avons là que six relations distinctes qui deviennent, en y remplaçant X, Y, Z; X_1, Y_1, Z_1 par leurs expressions (58) et (58') et en tenant compte des égalités (59),

$$(69)\qquad \begin{aligned} &\lambda(R - R_1 + n(\Delta - \Delta')) = \lambda_1(R_1 + R_1 - n_1(\Delta_1 - \Delta_1)), \\ &\frac{\lambda}{\rho_1}(\Delta - \Delta') = \frac{\lambda_1}{\rho_1}(\Delta_1 - \Delta_1'), \end{aligned}$$

$$(70)\qquad \begin{aligned} &\lambda(P - P_1 - l(\Delta - \Delta')) = P_1 - P_1 - l(\Delta_1 - \Delta_1'), \\ &\lambda(Q - Q_1 - m(\Delta - \Delta')) = Q_1 - Q_1 - m(\Delta_1 - \Delta_1'), \end{aligned}$$

$$(71)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{n_1 - Q - Q_1 - m(R - R_1)}{\rho} = \frac{n_1 - Q_1 + Q_1 + m(R_1 - R_1)}{\rho_1}, \\ &\frac{n_1 - P - P_1 + l(R - R_1)}{\rho} = \frac{n_1 - P_1 + P_1 + l(R_1 - R_1)}{\rho_1}. \end{aligned} \right.$$

Ces égalités jointes aux égalités (60), que nous écrirons

$$(60')\qquad \left\{ \begin{aligned} &P_1 l + Q_1 m + R_1 n_1 = 0, \\ &P_1 l + Q_1 m + R_1 n_1 = 0, \\ &P_1 l + Q_1 m + R_1 n_1 = 0, \\ &P_1 l + Q_1 m + R_1 n_1 = 0, \end{aligned} \right.$$

constituent dix relations linéaires et homogènes entre les seize coefficients d'amplitude

$$P_1, Q_1, R_1, P_1, Q_1, R_1, P_1, Q_1, R_1, P_1, Q_1, R_1,$$
$$\Delta, \Delta', \Delta_1, \Delta_1'.$$

Pour que le problème soit déterminé, il faut donc se donner six coefficients d'amplitude indépendants, c'est-à-dire non liés par une ou

plusieurs relations. On pourra, par exemple, se donner les amplitudes dans le milieu zéro, c'est-à-dire

$$\begin{gathered}\text{deux des coefficients } P,\ Q,\ R;\\ \text{deux des coefficients } P',\ Q',\ R';\\ \Delta \text{ et } \Delta';\end{gathered}$$

ou encore les amplitudes incidentes dans les milieux 0 et 1, c'est-à-dire

$$\begin{gathered}\text{deux des coefficients } P,\ Q,\ R;\\ \Delta\\ \text{deux des coefficients } P_1,\ Q_1,\ R_1;\\ \Delta_1.\end{gathered}$$

Si donc on ne se donnait que les amplitudes incidentes dans le milieu zéro, le problème serait indéterminé.

Cependant, dans la solution classique du problème de la réflexion et de la réfraction, on ne se donne que les amplitudes incidentes dans le milieu zéro et pourtant le problème apparaît comme entièrement déterminé. Cette apparence tient à ce fait qu'on supprime *a priori* les ondes incidentes $(l_1, m_1, -n_1)$, $(l_1, m_1, -n_1)$ dans le milieu 1, de sorte que tout se passe comme si l'on se donnait en outre

$$(P_1, Q_1, R_1, \Delta_1) = 0.$$

Remarquons, enfin, que si l'on se donne

$$\begin{gathered}\text{deux des coefficients } P,\ Q,\ R; \qquad \Delta = 0;\\ \text{deux des coefficients } P'_1,\ Q'_1,\ R'_1; \qquad \Delta_1 = 0,\end{gathered}$$

Δ' et Δ_1 ne sont pas nuls en général. L'absence d'ondes incidentes longitudinales n'entraîne donc pas celle d'ondes réfléchies longitudinales; de sorte que si l'on annulait *a priori* Δ' et Δ_1, sous le prétexte que Δ et Δ'_1 sont nuls, les équations deviendraient impossibles. C'est à cette difficulté que s'était heurté P. Duhem à la fin de son premier Mémoire.

V. — Expressions des amplitudes réfléchies en fonction des amplitudes incidentes dans l'hypothèse de Faraday et de Mossotti.

Nous allons faire le calcul des amplitudes réfléchies en fonction des amplitudes incidentes dans l'hypothèse de Faraday et de Mossotti, d'après laquelle l'équation (17) est vérifiée dans tout l'espace. Il résulte alors de l'expression de θ

$$\theta = \frac{i\theta_1}{\sigma^2}\Delta e^{[illegible]} + \Delta e^{[illegible]} e^{[illegible]},$$

déduite des égalités (58), et de celle analogue de θ_1 que les quatre amplitudes longitudinales

$$\Delta, \quad \Delta, \quad \Delta, \quad \Delta_1$$

sont nulles, de sorte qu'il ne subsiste dans les deux milieux que les ondes transversales.

D'autre part, l'expression (12) de τ^2 devient dans notre hypothèse

$$\tau^2 = \frac{\varepsilon}{\frac{a^2}{\rho}\kappa\rho},$$

ce qui change l'égalité (69) en la suivante :

$$(69') \qquad \frac{R + R'}{\rho\tau^2} = \frac{R_1 + R'_1}{\rho_1\tau_1^2}.$$

Or, celle-ci est une combinaison des égalités (72), comme on le voit en les multipliant respectivement par m et l, puis en les ajoutant membre à membre et en tenant compte des égalités (56), (56') et (60'). Nous remplacerons donc les égalités (72) par la suivante :

$$(71') \qquad \frac{n}{\rho}[m(P - P') - l(Q - Q')] = \frac{n_1}{\rho_1}[m(P_1 - P'_1) - l(Q_1 - Q'_1)],$$

obtenue en les multipliant respectivement par l et $-m$, puis en les ajoutant membre à membre.

Nous avons donc, en définitive, pour déterminer les amplitudes réfléchies

$$P', \; Q', \; R'; \quad P_1, \; Q_1, \; R_1$$

en fonction des amplitudes incidentes

$$P, Q, R; \quad P_1, Q_1, R_1$$

les six équations distinctes :

$$(69') \qquad \frac{R - R'}{p\bar{c}^2} = \frac{R_1 - R'_1}{p_1\bar{c}_1^2},$$

$$(70') \qquad \begin{cases} P - P' = P_1 - P'_1, \\ Q - Q' = Q_1 - Q'_1, \end{cases}$$

$$(71') \qquad \frac{n}{p}[m(P - P') - l(Q - Q')] = \frac{n_1}{p_1}[m(P_1 - P'_1) - l(Q_1 - Q'_1)],$$

$$(72') \qquad \begin{cases} P'l - Q'm - R'n = 0, \\ P'_1 l - Q'_1 m - R'_1 n_1 = 0, \end{cases}$$

à l'une desquelles nous pouvons substituer la combinaison

$$n(R - R') = n_1(R_1 - R'_1)$$

des égalités (60′), obtenue en tenant compte des équations (70′).

Cela posé, l'équation (69′) et la précédente déterminent tout d'abord R′ et R'_1 en fonction de R et de R'_1 et l'on obtient

$$(73) \qquad \begin{cases} (np\bar{c}^2 - n_1p_1\bar{c}_1^2)R' = (np\bar{c}^2 - n_1p_1\bar{c}_1^2)R - 2n_1p\bar{c}^2R'_1, \\ (np\bar{c}^2 - n_1p_1\bar{c}_1^2)R'_1 = 2np_1\bar{c}_1^2R - (np\bar{c}^2 - n_1p_1\bar{c}_1^2)R'_1. \end{cases}$$

Les équations restantes donnent ensuite

$$(74) \qquad \begin{cases} (np_1 + n_1p)P' = (np_1 - n_1p)P + 2n_1pP_1 \\ \qquad + 2pp_1\dfrac{l}{l^2 - m^2}\dfrac{n^2\bar{c}^2 - n_1^2\bar{c}_1^2}{np\bar{c}^2 - n_1p_1\bar{c}_1^2}(nR - n_1R'_1), \\ (np_1 - n_1p)Q' = (np_1 - n_1p)Q + 2n_1pQ_1 \\ \qquad - 2pp_1\dfrac{m}{l^2 - m^2}\dfrac{n^2\bar{c}^2 - n_1^2\bar{c}_1^2}{np\bar{c}^2 - n_1p_1\bar{c}_1^2}(nR - n_1R'_1), \\ (np_1 + n_1p)P'_1 = 2np_1P - (np_1 - n_1p)P_1 \\ \qquad + 2pp_1\dfrac{l}{l^2 - m^2}\dfrac{n^2\bar{c}^2 - n_1^2\bar{c}_1^2}{np\bar{c}^2 - n_1p_1\bar{c}_1^2}(nR - n_1R'_1), \\ (np_1 - n_1p)Q'_1 = 2np_1Q - (np_1 - n_1p)Q_1 \\ \qquad + 2pp_1\dfrac{m}{l^2 - m^2}\dfrac{n^2\bar{c}^2 - n_1^2\bar{c}_1^2}{np\bar{c}^2 - n_1p_1\bar{c}_1^2}(nR - n_1R'_1). \end{cases}$$

Par raison de symétrie, on passe d'ailleurs des expressions de P', Q', R' à celles de P_1, Q_1, R_1, en y permutant P et P_1, Q et Q_1, R et R_1; μ et μ_1, σ et σ_1, n et $-n_1$.

Ces formules (73) et (74) achèvent de résoudre le problème général de la réflexion et de la réfraction par ondes planes périodiques, que nous nous étions posé; dans le cas particulier où l'on a

$$(75) \qquad P = Q_1 = R_1 = 0,$$

elles deviennent, en tenant compte des égalités (56) et (56') et en supposant pour simplifier $\mu = \mu_1$,

$$P' = \frac{n - n_1}{n + n_1}\left(P + \frac{2ln}{l^2 + m^2 + nn_1} R\right),$$

$$Q' = \frac{n - n_1}{n + n_1}\left(Q + \frac{2mn}{l^2 + m^2 + nn_1} R\right),$$

$$R' = \frac{n - n_1}{n + n_1} \frac{l^2 + m^2 - nn_1}{l^2 + m^2 + nn_1} R;$$

$$P_1 = \frac{2n}{n + n_1}\left(P - \frac{l(n - n_1)}{l^2 + m^2 + nn_1} R\right),$$

$$Q_1 = \frac{2n}{n + n_1}\left(Q + \frac{m(n - n_1)}{l^2 + m^2 + nn_1} R\right),$$

$$R_1 = \frac{2n}{n + n_1} \frac{l^2 + m^2 - n}{l^2 + m^2 + nn_1} R.$$

Celles-ci correspondent aux formules de la théorie classique; si, de plus, les deux milieux sont dénués de conductibilité et si l'onde incidente est uniforme, elles conduisent aux formules de Fresnel. Mais il resterait à expliquer pourquoi c'est seulement le cas particulier exprimé par les égalités (75) qui correspond aux faits expérimentaux.

Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles [1] :

PAR GASTON JULIA.

INTRODUCTION.

Le Mémoire que je soumets au jugement de l'Académie est consacré à l'étude de l'itération d'une fraction rationnelle, $z_1 = \varphi(z)$, dans tout le plan des z. Il n'y avait sur ce sujet, hors l'étude locale, que deux Notes de M. Fatou aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 15 octobre 1906 et du 21 mai 1917. Les résultats qu'il donne, fort intéressants, ne sont que des exemples qui utilisent des propriétés *particulières* de la fonction à étudier. On verra que ces exemples étaient les plus simples qu'on pût imaginer. J'ai tâché, dans ce Mémoire, prenant une fraction $\varphi(z)$ quelconque, de donner des propriétés qui fussent indépendantes de telle ou telle de ses particularités. J'ai voulu descendre du général au particulier, et je n'ai donné des exemples que pour montrer la *réalisation* des possibilités qu'une analyse, stricte et avare d'hypothèses *a priori*, me révélait. L'Académie estimera si j'ai réussi.

De mon point de vue, c'est une étude plus qualitative en quelque sorte que j'entreprenais. Je cherchais à discerner quelles pourraient être toutes les circonstances susceptibles de surgir. On verra, dans la suite, qu'un grand nombre étaient ignorées jusqu'à ce jour. Je n'ai pas la certitude de les avoir toutes épuisées, faute de temps et aussi de connaissances. Avant tout, il fallait montrer, par des exemples, que les possibilités révélées par l'analyse étaient effectives. Les exemples que j'ai donnés, nullements artificiels et toujours choisis pour éclairer une idée, j'ai voulu aussi les étudier à fond. Cette étude n'a pas été infructueuse, comme le montreront, je l'espère, les exemples des deuxième, troisième et quatrième Parties de ce Mémoire. Mais elle a été longue,

[1] Mémoire couronné par l'Académie des Sciences de Paris : Grand Prix des Sciences mathématiques, 1918.

et mon temps était court. Il reste des questions à traiter. Je les indiquerai chaque fois que je le pourrai, sans être trop long.

La question qui domine cette étude est la suivante : *un point z étant donné dont les conséquents $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ forment un ensemble e, quelles sont les propriétés de l'ensemble e', dérivé de l'ensemble e.* L'étude locale avait abordé des cas où e' se composait d'un point ou d'un nombre fini de points (point limite à convergence régulière, et groupe circulaire limite). Plus généralement, ζ étant un point de e', un point limite de points de e, j'ai cherché dans quel domaine z pouvait varier de façon que ζ restât *fonction analytique de* z, sans singularités essentielles. Les exemples connus montraient que ζ pouvait être une constante dans une région du plan des z et une constante différente dans d'autres régions. Il fallait voir quels étaient les ensembles séparateurs, c'est-à-dire *l'ensemble de points tels que, z franchissant un tel ensemble, ζ cessât d'être fonction analytique de z.* Il fallait chercher les *singularités essentielles* de ζ considéré comme fonction de z. C'est l'objet de la première Partie de ce Mémoire.

M. Fatou avait montré sur des exemples (15 octobre 1906) que cet ensemble des singularités pouvait être parfait discontinu, ou continu linéaire. *Dans tous les cas, il contenait tous les points* $z = \varphi_p(z)$ où $|\varphi_p'(z)| > 1$.

Je résolus d'étudier *a priori*, dans le cas général, l'ensemble E des points $z = \varphi_p(z)$ $(p = 1, 2, \ldots, \infty)$ pour lesquels $|\varphi_p'(z)| > 1$. C'était un ensemble dénombrable. Les travaux de M. Montel sur les suites normales donnaient immédiatement des propriétés simples pour tout point P de E. *Dans tout cercle de centre* P, *les fonctions* $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z), \ldots, \varphi_n(z), \ldots$ [*itérées indéfinies de* $\varphi_1(z)$] *prennent à partir d'un certain rang toutes les valeurs complexes, sauf deux au plus et les cas où les valeurs exceptionnelles sont une ou deux sont définis nettement.* La comparaison de ce résultat avec le théorème classique de M. Picard sur les points singuliers essentiels me conduisait à penser que l'ensemble E, avec, naturellement, son dérivé E', constituait l'ensemble des singularités que je cherchais. Je reconnus que E' *contenait* E *et que* E' *était parfait :* tout point de E' possède d'ailleurs la propriété que nous venons de reconnaître aux points de E, et cette propriété *caractérise* les points de E'. J'étudiai *la structure de* E' *sans aucune* hypothèse restrictive *à priori*. E' pouvait être discontinu, ou continu linéaire, ou continu superficiel. Je montrai facilement les deux premières possibilités sur des exemples, et pour la troisième, je montrai

que E ne pouvait contenir une aire plane à deux dimensions sans contenir tout le plan. Par comparaison des éléments communs à la question présente et à celle qui vise la discontinuité propre ou impropre des *groupes automorphes* dans le plan, je fus conduit à penser que cette dernière éventualité pouvait se présenter, mais je n'ai pas réussi à la réaliser dans un exemple; les analogies sur lesquelles j'ai insisté prouvent, à tout le moins, qu'on ne pourra rejeter la possibilité pour E de recouvrir tout le plan que par une démonstration rigoureuse. Je n'ai pas réussi à la donner. En sorte que, sur ce point, je reste dans le doute. J'ai donné des critériums qui permettent, en pratique, de reconnaître les cas usuels où E n'est pas linéaire ou discontinu, et j'ai montré comment *la structure de* E′ *est la même dans toutes ses parties*. J'ai montré aussi, en particulier, sur les exemples de M. Fatou, comment la connaissance de propriétés particulières de $\varphi(z)$ pouvait être utilisée à étudier la structure E′.

Passant ensuite au cas où E′ ne contient pas tout le plan, je montrai, et c'est fondamental, que, dans toute région D ne contenant aucun point de E′, la suite des $\varphi(z)$ est normale, et par suite *tout point limite* ζ *de conséquents de* z *est fonction analytique de* z *dans* D. Le résultat cherché était donc acquis.

Tout point limite ζ de conséquents de z est fonction analytique de z tant que z ne rencontre aucun point de l'ensemble E′. *L'ensemble* E′ *constitue donc bien l'ensemble des singularités essentielles pour toute fonction limite de fonctions extraites de la suite de* $\varphi(z)$. Cette remarque rapproche du théorème de M. Picard le théorème que j'ai démontré sur les valeurs exceptionnelles de la suite des $\varphi(z)$ autour de tout pointde E′. La question posée se trouvait donc théoriquement résolue : si l'on considère les diverses régions que E′ délimite dans le plan (il n'y en a qu'une si E′ est partout discontinu) et si l'on connaît l'allure de la suite des $\varphi(z)$ dans une *partie arbitrairement petite* de chacune de ces régions, on connaîtra cette allure dans chacune des régions *considérée dans toute son étendue* : le problème revient à celui du prolongement analytique, toute fonction limite de fonctions $\varphi(z)$ étant analytique dans toute l'étendue de la région considérée. J'ai dit tout l'essentiel de la première Partie de mon Mémoire. Elle est d'ordre tout à fait général, comme on l'a vu.

Mais c'est là une solution *théorique* et l'on sait que ces solutions ne satisfont jamais pleinement. Poincaré disait avec beaucoup de finesse : « Il n'y a plus de problèmes résolus et d'autres qui ne le sont pas; il y a seulement des problèmes plus ou moins résolus, etc. »

Cet ensemble E′ qui, théoriquement, est bien défini, à l'aide de E dont la construction point par point exige déjà la résolution d'une infinité dénombrable d'équations algébriques, il fallait voir d'une façon nette ses propriétés géométriques. Cela n'est possible tout à fait que dans des cas extrêmement particuliers comme celui des fractions à *cercle fondamental*. Dans la plupart des cas, il faut se résigner à moins de précision. Il en est de même pour l'étude de *toutes les fonctions limites* de la suite des $\varphi_i(z)$ dans une des régions de plan que délimite E′. Je n'ai pu la faire qu'à partir de l'étude locale entamée par mes prédécesseurs, mais au prix d'hypothèses supplémentaires. J'ai en effet appliqué, dans la deuxième Partie de ce Mémoire, les résultats généraux obtenus dans la première, à l'étude de la *convergence régulière ou périodique vers un point ou un groupe circulaire limite* [c'est-à-dire les points $\zeta = \varphi(\zeta)$, $|\varphi'(\zeta)| < 1$ ou les groupes $\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_{p-1}$, définis par $\zeta = \varphi_p(\zeta)$, $\zeta = \varphi(\zeta_{-1})$, $|\varphi_p'(\zeta)| < 1$]. Supposer l'existence d'un tel point ou d'un tel groupe, est une hypothèse supplémentaire, car on peut facilement construire des fractions $\varphi(z)$ pour lesquelles toute racine de $z = \varphi(z)$ rend $|\varphi'(z)| > 1$. Je n'ai cependant réussi, ni à construire une fraction pour laquelle toute racine de $z = \varphi_p(z)$ rend $|\varphi_p'(z)| > 1$, quel que soit p, ni à montrer que pour toute fraction $\varphi(z)$ il y a nécessairement un nombre p et une racine de l'équation $z = \varphi_p(z)$ qui rende $|\varphi_p'(z)| < 1$. Il est facile, en prenant une fraction SINGULIÈRE à cercle fondamental par exemple, fraction pour laquelle le point-limite unique pour tout le plan, sauf E′ est un point de E′, de vérifier qu'on peut avoir, pour toute racine de $z = \varphi_p(z)$, $|\varphi_p'(z)| > 1$ quel que soit p (mais, dans le cas cité, il y en a une pour laquelle $\varphi'(z) = 1$).

Mais, en admettant l'existence d'un point-limite ou d'un groupe circulaire limite (ce qu'il est facile de reconnaître dans chaque cas particulier), on peut rechercher quel est le domaine de convergence vers ce point ou vers ce groupe, c'est-à-dire l'ensemble des points dont les conséquents tendent régulièrement vers le point-limite ou, périodiquement, vers les points du groupe circulaire limite. On montre que tout point limite, ou tout point d'un groupe circulaire limite est intérieur à une région R d'un seul tenant limitée par l'ensemble E′ [1] (je veux dire que tous ses points frontières sont points de E′) dont tout point intérieur a des conséquents qui tendent régulièrement vers le point-limite ou, périodiquement, vers les points du groupe circulaire limite.

---

[1] Ici E′ ne peut être que continu linéaire ou discontinu.

R sera le *domaine immédiat de convergence vers le point limite*; pour les groupes limites, l'ensemble des p domaines R relatifs aux p points du groupe sera le *domaine immédiat de convergence vers le groupe*.

C'est un résultat capital que tout domaine immédiat de convergence vers un point ou un groupe limite *contient un point critique de la fonction* $\psi(z)$ *inverse de* $\varphi(z)$, point qui est conséquent d'un point où $\varphi'(z) = 0$ également contenu dans le domaine immédiat considéré. D'où la *limitation du nombre des points et des groupes circulaires limites pour une fraction quelconque*.

Mais le *domaine total de convergence*, vers un point ou un groupe limite, peut être plus étendu que le domaine immédiat; il se compose alors d'une *infinité de régions séparées, sans connexion entre elles, séparées par* E', *toutes limitées par des points de* E'. Toutes ces régions sont antécédentes successives du domaine immédiat et le *domaine total* de convergence vers un point ou un groupe limite *a pour frontière tout l'ensemble* E'.

Il est facile, en étudiant la connexion d'un domaine immédiat, de prouver qu'il est simplement connexe ou d'un ordre de connexion infini. On en déduit, entre autres conséquences, que, *dès que le nombre des points limites dépasse* 2 (chaque point d'un groupe circulaire limite comptant pour un dans ce nombre), *un de ces points au plus aura un domaine total, d'un seul tenant, confondu avec son domaine immédiat, tous les autres ayant un domaine total formé d'une infinité d'aires*. La considération de la surface de Riemann $\mathfrak{R}$ de $\psi(z)$ est ici fort utile. Elle permet de se rendre compte des raisons naturelles de toutes ces particularités. Elle explique aussi la simplicité des résultats fournis par M. Faton dans ses deux Notes de 1906 et du 21 mai 1917. On traite aussi des exemples simples et déjà très généraux, assez variés. Puis on donne des exemples de circonstances nouvelles :

A. Domaine total à une infinité de pièces : 1° $\varphi_1 = \frac{[illegible]}{[illegible]}$ pour lequel on étudie à fond le groupement de ces domaines et la distribution de E' dans le plan; 2° Exemples tirés de la règle de Newton.

B. Pour la connexion des domaines immédiats, exemple

$$[illegible]$$

où, pour A assez grand, le domaine R [illegible] connexion infinie est [illegible]

par une infinité de continus linéaires distincts, deux à deux extérieurs.

Cf. $z_1 = z^2 - 2$ qui prouve que E peut être un continu linéaire non fermé : le segment $(-2, +2)$ de l'axe réel, par exemple. Il prouve aussi qu'un point critique de $\varphi(z)$ ainsi qu'un point où $\varphi(z) = 0$ peuvent être des points de E'.

Dans la troisième Partie, qui utilise les résultats de la deuxième, je me suis plus spécialement attaché à éclaircir la nature de E', lorsqu'on reconnaît que c'est un continu linéaire. M. Fatou, en 1906, s'aidant de considérations sur les équations fonctionnelles, donnait l'exemple $z_1 = \frac{z + z^2}{2}$ où E' n'était pas analytique; encore fallait-il en avoir une raison plus géométrique, indépendante des équations fonctionnelles, et voir pourquoi E' n'était pas analytique.

Je donne des exemples très généraux où, à l'aide d'hypothèses sur $\varphi(z)$ *qui sont des inégalités*, je réussis à montrer directement que E est une *courbe continue de Jordan fermée simple*. Il en est ainsi pour l'exemple $z_1 = \frac{z + z^2}{2}$ en particulier. Sur cette courbe de Jordan, les points de E, partout denses, sont, en général, *des points où la courbe n'a même pas de tangente*. [Il suffit qu'en ce point $z = \varphi(z)$, $\varphi'_p(z)$ ne soit pas réel, pour qu'on puisse affirmer l'absence de tangente; c'est bien là le cas général.]

Pour d'autres exemples, $z_1 = \frac{z + z^2 + z^3}{3}$ en particulier, je montre que E' est une courbe Γ *continue*, fermée, représentable par

$$z = f(t) + i g(t) \quad (a \leq t \leq b),$$

f et g étant continus dans (a, b), mais *ayant des points doubles partout denses sur elle-même*, formée par la réunion d'une infinité de courbes ε [1] dont *chacune est une courbe de Jordan simple* [illegible] tout point d'une courbe ε étant point limite de courbes ε qui sont extérieures à celle que l'on considère, et dont les dimensions tendent vers zéro. Je donne d'ailleurs (2e Partie) un schéma qui permet [illegible] représenter une telle courbe Γ.

Enfin dans la quatrième Partie, j'ai étudié complètement les convergences singulières vers un point-limite singulier

$$z = \varphi(z) \quad (\varphi'(z) = 1).$$

---

[1] Et par les points limites de ces courbes [illegible].

ou vers un groupe singulier issu de

$$\zeta = \varphi_n(\zeta), \qquad \varphi'(\zeta) = e^{i\theta}$$

θ étant réel et commensurable à 2π.

Un tel point ζ est toujours de E mais est limite des conséquents des points d'un domaine R, contigu à ζ, limité par E'. R s'appelle *domaine immédiat de convergence* vers ζ (même chose pour un groupe limite singulier). J'étends la notion de *domaine total* et je donne des exemples où ce domaine total compte une *infinité d'autres*. E' étant courbe continue à points doubles partout denses sur elle-même ($z_1 = z + z^2$) comme dans l'exemple $z_1 = \frac{-z^2 + z + 1}{2}$. Le domaine immédiat contient toujours, ici encore, un point critique de $\psi(z)$.

J'ai été moins heureux dans l'étude des points

$$\zeta = \varphi(\zeta), \qquad \varphi'(\zeta) = e^{i\theta}$$

lorsque θ est incommensurable à 2π, et je n'ai pu que réduire les possibilités à deux qui, pour un exemple donné, s'excluent mutuellement.

1° *Ou bien ζ n'est pas de* E'; alors c'est un *centre*, il est intérieur à une région R (¹) du plan, limitée par E', sillonnée de courbes analytiques qui entourent ζ, conservées par $z_1 = \varphi(z)$ et sur chacune desquelles les conséquents d'un point de cette courbe sont partout denses. Alors aussi l'équation de Schrœder

$$\Psi(\varphi(z)) = e^{i\theta}\Psi(z)$$

a une solution holomorphe dans tout R. *ζ n'est point limite pour les conséquents d'aucun point du plan.*

2° *Ou bien ζ est de* E', et l'on peut le reconnaître à ce que c'est un point limite pour les conséquents d'un *point critique* de la branche de $\psi(z)$ qui égale ζ au point ζ.

Je n'ai pu former d'exemple de fonction rationnelle $\varphi(z)$ ni pour 1°, ni pour 2°. Je reste donc ici encore dans le doute. Si la première possibilité pouvait se trouver vérifiée, on aurait un exemple où la suite des $\varphi(z)$ admet dans R une fonction limite *non constante* par

(¹) R, ni aucune des régions antécédentes de R, ne doivent alors contenir le point critique de $\psi(z)$.

exemple, z serait limite de fonctions $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, ..., d'indices convenablement choisis, de façon que $e^{n_1(z)}$, $e^{n_2(z)}$, ... tendent vers 1. Dans R on aurait un développement de z en série de fractions rationnelles qui convergerait uniformément dans toute aire intérieure à R. Ce sont là des résultats connus de la théorie des fonctions, mais intéressants à retrouver ici.

Il reste, on l'a déjà vu, bien des questions à traiter. J'aurais pu aussi appliquer les résultats obtenus ici aux équations fonctionnelles bien connues depuis les travaux de M. Kœnigs et de ses successeurs. Cela sortait de l'objet propre de ce Mémoire qui est l'étude de l'itération elle-même : peut-être reviendrai-je ultérieurement sur les questions ainsi laissées en suspens.

Préliminaires.

J'aurai besoin, dans le Mémoire qu'on va lire, de certains résultats de la théorie des fonctions qui ne sont pas tous classiques et dont la plupart sont, à l'heure actuelle, disséminés dans diverses revues ou publications mathématiques. Je vais donc, dans ces préliminaires, rappeler ces résultats en renvoyant le plus souvent aux Ouvrages originaux pour leur démonstration. J'ajouterai aussi quelquefois et plus particulièrement aux paragraphes 4 et 5 qui traitent de diverses questions de représentation conforme, certaines modifications ou additions aux résultats connus jusqu'ici qui me seront utiles dans la suite. J'ai pensé qu'ainsi se trouverait allégée l'exposition du Mémoire, et plus facile à suivre le développement propre de la question qu'il traite : itération des fractions rationnelles.

1. *Rappel de résultats connus sur l'iteration en général* (Voir Kœnigs, *Annales de l'École Normale supérieure*, 1884, Supplément n° 2 et n° 24, 25). — [illegible] est une fonction analytique de z dans une région R du plan qui contient une racine ζ de l'équation

$$[illegible]$$

pour laquelle $[illegible]$, on peut entourer ζ d'un cercle C_0 de centre ζ de rayon assez petit ζ tel que, si [illegible] on ait aussi

$$[illegible]$$

H étant un certain nombre positif compris entre [illegible]

ζ est dit point-limite à convergence régulière, car les conséquents z_i d'un point z quelconque intérieur à C

$$[\text{illegible}]$$

tendent vers ζ et vers ζ seulement.

2° Supposons que dans la région R où $\varphi(z)$ est analytique, on trouve un système de n points distincts $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-1}$ qui soit un *groupe circulaire limite*, c'est-à-dire tel que

$$\zeta_1 = \varphi(\zeta), \quad \zeta_2 = \varphi(\zeta_1) = \varphi(\zeta_2), \quad \ldots, \quad \zeta_{n-1} = \varphi(\zeta_{n-1}) = \varphi(\zeta_{n-1})$$
$$\zeta = \varphi(\zeta_{n-1}) = \varphi(\zeta) \quad \text{avec} \quad \varphi(\zeta) \neq \zeta_1, \ldots, \varphi(\zeta_{n-1}) \neq \zeta_{n-1}.$$

Les n points sont permutés circulairement par $[z, \varphi(z)]$. On démontre que tout point ζ_i du groupe est le centre d'un cercle C_i à l'intérieur duquel

$$\frac{\varphi(z) - \zeta_i}{\zeta - \zeta_i} \quad \text{H} \quad \text{[illegible]},$$

H étant entre 0 et 1.

On peut aussi entourer chacun des ζ_i d'un cercle C_i assez petit, intérieur à C_i, tel que si z est intérieur à C_i, ses conséquents z_1, $z_2, \ldots, z_{n-1}$ soient respectivement à l'intérieur de $C_{i+1}, C_{i+2}, \ldots, C_{i+n}$ pris dans l'ordre circulaire à partir de C_{i+1}. Si alors on part d'un point z intérieur à C_i, on revient avec z_n dans C_i et à une distance de ζ inférieure à celle de z à ζ $[|z_n - \zeta| < \text{H}|z - \zeta|]$; puis les points $z_{n+1}, z_{n+2}, \ldots$ tomberont comme $z_1, z_2, \ldots$ dans les cercles C_{i+1}, $C_{i+2}, \ldots$ mais plus près de $\zeta_{i+1}, \zeta_{i+2}, \ldots$ que $z_1, z_2, \ldots$. Les points z_1, $z_2, z_{2n} \ldots$ auront ζ_i et ζ_i seul pour limite; les points $z_1, z_{n+1}, z_{n+2}, \ldots$ auront ζ_{i+1} pour limite, etc.

La suite $z, z_1, z_2, \ldots$ convergera donc périodiquement vers chacun des points ζ du groupe circulaire limite.

2. *Les familles normales de fonctions analytiques.* — Cette notion a été introduite par M. Montel, dans différents Mémoires parmi

---

(1) On pose d'habitude

$$\text{[illegible]}$$

et l'on a

$$\text{[illegible]}$$

$z_1, \ldots, z_{n-1}$ étant les conséquents d'ordre [illegible]

les quels je citerai sa thèse, et deux Mémoires parus dans les *Annales de l'École Normale supérieure*, en 1912 et 1916. Elle s'est montrée féconde dans plusieurs questions de théorie des fonctions traitées par divers auteurs et par M. Montel lui-même dans les Mémoires précédents. On verra dans la première Partie de ce Mémoire que cette notion m'a été très utile.

M. Montel dit qu'une famille de fonctions analytiques est *normale* dans un domaine D, si, de toute suite infinie de fonctions de cette famille, on peut extraire une suite nouvelle convergeant uniformément à l'intérieur de D.

Il démontre (§ 2 à 6 du Mémoire de 1916) qu'une famille (F) de fonctions $f(z)$ bornées en un point, possède, si elle est normale, les propriétés suivantes :

1° Les fonctions sont bornées dans l'intérieur de D.

2° Les fonctions sont également continues dans l'intérieur de D.

3° Les fonctions $f(z) - a$ ont, pour chaque valeur de a, un nombre fini de zéros à l'intérieur de D, si a n'est pas une fonction limite.

Les fonctions bornées dans leur ensemble dans l'intérieur d'un domaine D forment une famille normale. Une famille de fonctions holomorphes dans le cercle de rayon 1, à l'intérieur duquel elles ne prennent ni la valeur 0 ni la valeur 1, est une famille normale [§ **10**]. Les valeurs exceptionnelles 0 et 1 peuvent être remplacées par deux autres valeurs finies distinctes quelconques.

Dans le Chapitre IV de son Mémoire de 1916, M. Montel envisage les familles normales de fonctions méromorphes, qui sont pour nous les plus intéressantes. Une famille (F) de fonctions $f(z)$ méromorphes dans un domaine D est dite *normale*, si, de toute suite infinie formée avec les fonctions de la famille, on peut extraire une suite nouvelle convergeant uniformément, dans le domaine ouvert D, vers une fonction limite. Cette fonction limite est une fonction méromorphe qui peut, dans certains cas, être une constante finie ou infinie (§ **27** et **28** du Mémoire cité, où la convergence uniforme est bien définie). Au paragraphe **31** on trouve le théorème fondamental : *Les fonctions $f(z)$ méromorphes dans le domaine D où elles ne prennent jamais les valeurs distinctes a, b, c, forment une famille normale.*

Aux paragraphes **33** et **34** on voit que, si les fonctions méromorphes d'une famille normale sont bornées en un point P du domaine D, il existe un cercle (c) de centre P tel qu'aucune des

fonctions de la famille n'ait de pôle à l'intérieur de (c). D'autre part, si D′ est un domaine complètement intérieur à D et contenant P, le nombre des pôles de chaque fonction contenus dans D′ est inférieur à un nombre fixe.

Je rappelle enfin qu'au Chapitre III du Mémoire de 1912, on trouve quelques intéressantes propositions sur la convergence des séries de fonctions holomorphes, qui sont toutes déduites du théorème fondamental suivant (§ **50**).

Soit une suite infinie de fonctions

$$f_1(z),\quad f_2(z),\quad \ldots,\quad f_n(z),\quad \ldots$$

holomorphes dans D et appartenant à une famille normale dans ce domaine.

1° Si la suite converge en une infinité de points intérieurs dans leur ensemble à D [1], elle converge dans tout le domaine;

2° Si la suite converge dans D, la convergence est uniforme dans l'intérieur de D.

3. *Rappel de notions sur les ensembles de points.* — On trouvera ces notions dans l'article de l'*Encyclopédie française des Sciences mathématiques* sur les ensembles de points, rédigé par M. Zoretti (t. II, vol. 1, fasc. 2) sous la rubrique : *Structure des ensembles fermés* (§ **10**, **11**, **12**, **13**, **14**).

On y verra ce qu'est un point *intérieur à un ensemble*, ce qu'est un ensemble *bien enchaîné entre deux de ses points*, ou *d'un seul tenant* entre ces points, un domaine ouvert (domaine W), une courbe de Jordan, etc.

Un point intérieur à un ensemble est tel que tous les points d'un cercle de rayon assez petit, ayant le point pour centre, appartiennent à l'ensemble. Les points frontières de l'ensemble ne sont pas intérieurs. Un domaine ouvert (domaine W) est un ensemble tel que :

1° Tout point de l'ensemble est *intérieur à l'ensemble*.

2° Deux points de l'ensemble peuvent toujours être joints par une ligne brisée dont tous les points appartiennent à l'ensemble.

Un ensemble bien enchaîné ou d'un seul tenant entre deux de ses

[1] C'est-à-dire ayant au moins un point limite intérieur à D.

points est tel que, quel que soit ε positif donné, on peut trouver une succession de points de l'ensemble commençant et finissant par les deux points donnés, et tels que la distance de chacun au suivant soit inférieure à ε.

Une ligne de Jordan simple est le lieu des points définis par des équations telles que

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad (0 \leq t \leq 1),$$

où l'on n'a jamais simultanément

$$f(a) = f(b), \quad g(a) = g(b),$$

sauf pour $a = b$.

C'est une ligne continue sans point double.

Elle est *fermée* lorsque les égalités

$$f(a) = f(b), \quad g(a) = g(b)$$

sont possibles simultanément pour $a = 0$, $b = 1$, et pour ces valeurs seulement.

M. Jordan a démontré ce résultat fondamental qu'une telle ligne fermée C divise le plan en deux régions, une dite *intérieure*, l'autre dite *extérieure* à C, et l'on ne peut tracer une ligne de Jordan simple, unissant un point extérieur à un point intérieur qui ne rencontre la courbe C en un point au moins.

4. *La représentation conforme des domaines simplement connexes sur l'intérieur d'un cercle. Propositions diverses sur la représentation conforme.* — On a souvent à considérer dans la théorie des fonctions des domaines qui se recouvrent eux-mêmes à la façon des surfaces de Riemann.

Dans son Mémoire *Sur l'uniformisation des fonctions analytiques* (*Acta*, t. XXXI), Poincaré les définit d'une façon bien précise (*voir* § **2**, définition des domaines D) de proche en proche par la méthode du prolongement analytique. Il définit ce qu'on appelle une ligne continue tracée dans un domaine, une ligne fermée, une aire continue dont tous les points font partie du domaine, et la frontière de cette aire. Le domaine est dit *simplement connexe* si toute courbe fermée tracée sur ce domaine est la frontière complète d'une aire continue dont tous les points font partie du domaine.

Il établit dans ce Mémoire qu'on peut faire la représentation con-

forme de l'intérieur du domaine soit sur l'intérieur d'un cercle, soit sur le plan entier moins le point à l'infini, soit sur le plan complété par le point à l'infini (¹). Dans un Mémoire du Tome LXXII des *Math. Annalen*, M. Carathéodory reprend le cas où le domaine se représente conformément sur l'intérieur d'un cercle. Si une fonction $f(z)$ est holomorphe dans un cercle C et sur ce cercle, le point $z_1 = f(z)$ décrit, lorsque le point z décrit l'intérieur de C, l'intérieur d'un domaine D simplement connexe limité par un seul contour analytique, et D est de l'espèce indiquée plus haut : il peut se recouvrir lui-même, et il se recouvre lui-même en général. La fonction $z_1 = f(z)$ établit une correspondance conforme entre l'intérieur de C et l'intérieur du domaine D. En particulier, si le domaine D est un domaine borné ne se recouvrant pas, et défini comme la limite pour $i = \infty$ d'une suite de domaines $D_1, D_2 \ldots$, ne se recouvrant pas, limités chacun par une courbe analytique fermée C_i, tels que D_i contient D_{i+1} à son intérieur, si $f_i(z)$ est la fonction qui fait correspondre conformément l'intérieur du cercle $|z| < 1$ à l'intérieur du domaine D_i [avec la condition que $f_1(0) = f_2(0) = \ldots$ et que $f_i(0)$ est réel], la suite des $f_i(z)$ converge uniformément vers une fonction limite $f(z)$ dans l'intérieur de $|z| < 1$; $f(z)$ est analytique dans $|z| < 1$ et représente conformément l'intérieur $|z| < 1$ sur l'intérieur de D.

On peut admettre des domaines D contenant le point à l'infini, en admettant pour $f(z)$ des pôles à l'intérieur du cercle de représentation, cela nous arrivera souvent dans la suite, $f(z)$ étant fraction rationnelle. On passera alors, si l'on veut, à la sphère de Riemann pour supporter la variable z et les divers domaines : c'est là une conception familière aux géomètres.

Dans deux remarquables Mémoires du Tome LXXIII des *Math. Annalen*, M. Carathéodory représente uniformément l'intérieur d'un domaine borné G simplement connexe, ne se recouvrant pas lui-même sur l'intérieur du cercle $|z| < 1$ et il étudie la correspondance entre les points frontières de $|z| = 1$ et les points frontière du domaine G. Cette étude a été reprise plus simplement par M. Lindelof (²).

(¹) Si le domaine a au moins deux points frontières distincts, [illegible] sur lequel se fait la représentation.

(²) LINDELOF, *Sur un principe général de l'Analyse et ses applications à la théorie de la représentation conforme*. Helsingfors [illegible].

La frontière de G est un continu linéaire [1], c'est-à dire un ensemble bien enchaîné entre deux quelconques de ses points. Un point P de la frontière de G est dit *accessible* par l'intérieur de G si l'on peut trouver une ligne de Jordan simple, dont tous les points, sauf P, soient intérieurs à G, joignant ce point P à un point intérieur à G; cette ligne peut se composer d'un nombre fini de segments de droites ou d'une infinité de segments ayant P pour seul point limite. Les points accessibles de la frontière sont *partout denses sur cette frontière*.

Un point accessible P de la frontière est dit *simple* sur cette frontière lorsque, quelle que soit la ligne de Jordan simple fermée L issue de P, dont tous les points sont *intérieurs* au domaine G (sauf P), la région *intérieure à* L ne renferme que des points intérieurs à G, et jamais de point frontière de G. Cette définition, moins générale que celle de M. Carathéodory (§ 44 du Tome LXXIII), est ce que devient cette dernière lorsqu'on l'applique aux points *accessibles* (*voir* par exemple LINDELÖF, § 14 du Mémoire cité, Helsingfors, 1915).

Une frontière dont tous les points sont accessibles et simples est une *courbe de Jordan simple fermée* (*voir* CARATHÉODORY, § 48 du Tome LXXIII, ou LINDELÖF, § 11, 12, 13, 14 du Mémoire de 1915, d'où cela résulte immédiatement).

M. Carathéodory a établi que l'on peut faire la représentation conforme de l'intérieur d'une courbe de Jordan simple fermée sur l'intérieur du cercle $|z| < 1$, et la correspondance ainsi établie entre les points de l'intérieur des deux courbes s'étend aux points frontières; il y a correspondance biunivoque et continue entre les points de la courbe de Jordan et ceux du cercle $|z| = 1$; si un point intérieur au cercle $|z| < 1$ tend continuement vers un point de ce cercle ($|z| = 1$), son image tendra continuement vers un point déterminé de la courbe de Jordan et réciproquement.

On a fait beaucoup de travaux sur les courbes de Jordan fermées. On sait qu'une telle courbe partage le plan en deux régions et que tout point de cette courbe est accessible par la région intérieure comme par la région extérieure. La réciproque a été établie. Tout continu linéaire divisant le plan en deux domaines sans point commun

---

[1] *Voir* par exemple SCHOENFLIES, *Die Entwickelung der Punktmannigfaltigkeiten*, 2e Partie, p. 115.

intérieur dont il est la frontière commune, et tel que tout point de ce continu soit accessible par l'intérieur de chacun des deux domaines, est une courbe de Jordan simple fermée (*voir* SCHOENFLIES, *loc. cit.*, § 11 et 12 du Chapitre V).

5. *Quelques lemmes de la théorie des fonctions.* — Soit une aire simple D du plan analytique limitée par une courbe simple C (un cercle, par exemple) et supposons qu'une fonction $f(z)$ soit analytique dans D et sur C. Lorsque z décrit l'aire D, le point $z_1 = f(z)$ décrit une aire D_1 simplement connexe limitée par une courbe analytique fermée C_1 transformée de C. En général D_1 se recouvrira elle-même à la manière déjà indiquée précédemment d'une surface de Riemann [cela arrivera si $f(z)$ prend la même valeur en deux points distincts de l'aire D]. Nous imaginons les feuillets de l'aire D_1 étalés sur le *même plan que* D, et nous nous préoccupons surtout des cas où *l'aire* D *est tout entière intérieure à l'aire* D_1, c'est-à-dire où l'on peut trouver un feuillet de D_1 (¹) sur lequel tous les points de D et de son contour soient des points *intérieurs à* D_1; il n'y a aucune équivoque possible là-dessus (et si même on avait pris pour D une aire se recouvrant elle-même, il serait encore possible de reconnaître si D est intérieur à D_1 en procédant, comme Poincaré le fait dans son Mémoire cité plus haut, par prolongement analytique à l'aide d'*éléments*).

Voici des exemples :

Dans les figures 1, 2, 3, D est *intérieur à* D_1; dans la figure 4, D n'est pas intérieur à D_1.

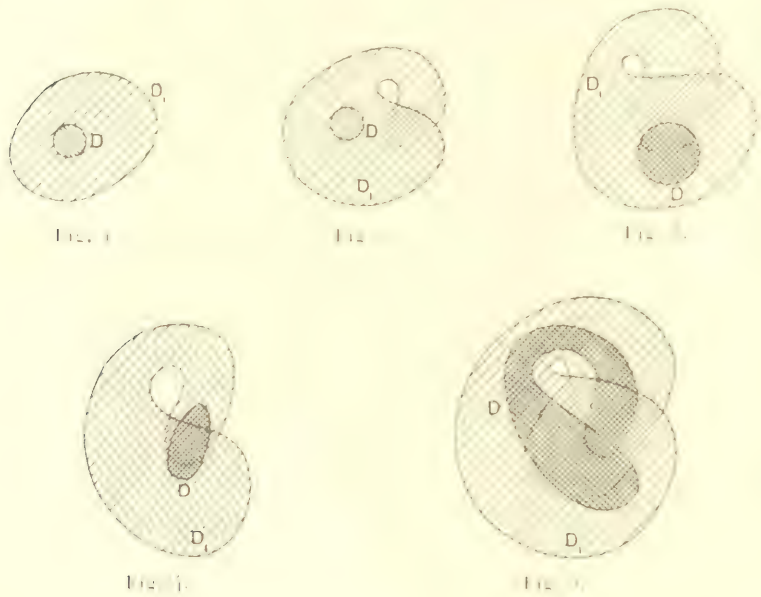
Dans la figure 5, D et D_1 sont des aires se recouvrant elles-mêmes et D est tout entière intérieure à D_1.

Il pourrait arriver que, dans D, la fonction $f(z)$ ait un pôle, alors l'aire D_1 serait une aire contenant le point à l'infini comme point intérieur, il n'y a rien là non plus d'essentiellement délicat. Mais, bien entendu, $f(z)$ n'a pas dans D ni sur C de point singulier essentiel. La relation $z_1 = f(z)$ établit donc une correspondance biunivoque et analytique entre les points intérieurs à D et les points intérieurs à D_1 (D_1, c'est essentiel, étant regardée comme ayant plusieurs feuillets et deux points de même affixe z_1 situés sur des feuillets différents étant

(¹) Le feuillet considéré D_1 n'aura donc pas de point de ramification à l'intérieur de D quand on suppose que D est une aire simple, à un seul feuillet, du plan analytique.

regardés comme deux points distincts de D_1) ainsi qu'entre les points de C et de C_1.

Il nous est loisible maintenant de faire une représentation conforme de l'intérieur de D_1 (¹), sur l'intérieur du cercle $|Z| \leq 1$ de façon que les points de C_1 correspondent biunivoquement et analytiquement aux



points de $|Z| = 1$. Alors D va être représenté conformément sur une aire ω simplement connexe à un feuillet, limitée par une courbe analytique ς fermée sans point double, toute intérieure au cercle $|Z| = 1$ que j'appelle cercle ς_1; j'appelle aussi ω_1 l'aire intérieure au cercle $|Z| \leq 1$.

Nous dirons qu'un point Z intérieur à ω_1 qui correspond à un point z intérieur à D_1 dans la représentation conforme de D_1 sur ω_1 est son *image*.

Si nous considérons alors deux points z et z_1 respectivement inté-

(¹) Si D_1 contenait le point à l'infini, il n'y aurait qu'à envisager l'aire correspondant à D_1 sur la *sphère de Riemann* pour bien se rendre compte de ce qu'est la représentation conforme du point à l'infini et de son voisinage sur le voisinage d'un point intérieur à ω_1.

rieurs à D et D_1 et qui se correspondent biunivoquement et analytiquement par la relation $z_1 = f(z)$, leurs images Z et Z_1 seront deux points respectivement intérieurs à ω et ω_1 qui se correspondront aussi biunivoquement et analytiquement par une relation $Z_1 = F(Z)$, qu'on

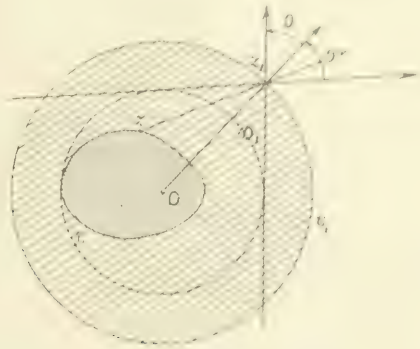


Fig.

pourra appeler *relation transformée de la relation* $z_1 = f(z)$ par la représentation conforme auxiliaire. F(Z) sera analytique et uniforme dans ω et sur ς, et sa fonction inverse sera analytique et uniforme dans ω_1 et sur ς_1. A tout point Z intérieur à ω correspond un point Z_1 et un seul intérieur à ω_1 et réciproquement : la correspondance est analytique et s'étend aux frontières ς et ς_1.

La transformation conforme auxiliaire a pour but essentiel de ramener les aires D et D_1 à des aires simples à un seul feuillet. Lorsque Z décrit le contour ς dans le sens positif, en ayant l'aire ω à sa gauche, Z_1 décrira le contour ς_1 également dans le sens positif en ayant l'aire ω_1 à sa gauche. Dans ces conditions, on sait que le nombre des racines de l'équation

$$F(Z) - Z = 0,$$

intérieures au contour ς est égal à la variation totale de l'argument de $F(Z) - Z$ lorsque Z décrit une fois le contour fermé ς dans le sens positif. [Il faut en effet remarquer que $|F(Z)|$ étant < 1 dans l'aire ω, la fonction $F(Z) - Z$ est holomorphe dans ω, et n'y a aucun pôle.] Il faut donc étudier la variation totale de $\arg(Z_1 - Z)$ quand Z décrit ς dans le sens positif.

Le cercle ς_1 a son centre à l'origine, et Z est toujours un point

intérieur au cercle $\mathcal{C}_1$; donc

$$\arg Z_1 - \theta < \arg(Z_1 - Z) < \arg Z_1 + \theta \qquad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

en définissant convenablement l'argument des nombres complexes précédents dans la position initiale de Z_1, *et en suivant ensuite ces arguments par continuité*. L'angle θ a une limite inférieure bien déterminée par ce fait que l'angle 2θ de bissectrice OZ_1 doit contenir à son intérieur le contour $\mathcal{C}$, quel que soit Z_1 sur $\mathcal{C}_1$. Puisque la variation totale de $\arg Z_1$ est égale à $+2\pi$, lorsque Z décrit $\mathcal{C}$ dans le sens positif, celle de $\arg(Z_1 - Z)$ sera aussi égale à $+2\pi$ dans les mêmes conditions.

Donc $F(Z) - Z = 0$ *a une racine et une seule à l'intérieur de* $\mathcal{C}$.

En soumettant le plan des Z à une substitution linéaire qui conserve le cercle $\mathcal{C}_1$, on peut supposer que cette racine a été amenée à l'origine, c'est-à-dire $F(0) = 0$.

Alors la fonction $Z_1 = F(Z)$ est telle que $Z = \Phi(Z_1)$, inverse de $F(Z)$, est une fonction holomorphe dans le cercle $\mathcal{C}_1$, $|Z_1| < 1$ et sur ce cercle; et l'on a

$$\Phi(0) = 0$$

$$|\Phi(Z_1)| < 1 \qquad \text{quel que soit} \qquad |Z_1| \leq 1,$$

puisque $Z = \Phi(Z_1)$ est toujours dans $\mathcal{C}$ ou sur $\mathcal{C}$ quand Z_1 est dans $\mathcal{C}_1$ ou sur $\mathcal{C}_1$. Si l'on développe $\Phi(Z_1)$ autour de l'origine, on a

$$\Phi(Z_1) = Z_1 \Phi'(0) + \frac{Z_1^2}{2!}\Phi''(0) + \ldots$$

avec

$$\Phi'(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}_1} \frac{\Phi(Z_1)\,dZ_1}{Z_1^2}$$

d'après la formule de Cauchy. Or, sur $\mathcal{C}_1$, on a

$$|Z_1| = 1 \qquad \text{et} \qquad |\Phi(Z_1)| < 1.$$

Donc

$$\left|\int_{\mathcal{C}_1} \frac{\Phi(Z_1)\,dZ_1}{Z_1^2}\right| \leq \int_{\mathcal{C}_1} |dZ_1| = 2\pi$$

Donc

$$|\Phi'(0)| < 1,$$

et par suite

$$\left|F'(0)\right| = \left|\frac{1}{\Phi'(0)}\right| > 1$$

en revenant à $F(Z)$.

En résumé, nous avons établi que

$$F(0) = 0, \qquad |F'(0)| \leqq 1.$$

Voici une deuxième démonstration de cette dernière inégalité, basée sur un lemme intéressant de représentation conforme.

Le domaine $\mathfrak{D}$ contient l'origine. Il est représenté conformément sur le cercle $|Z_1| \leqq 1$ à l'aide de la fonction

$$Z_1 = F(Z),$$

l'origine se correspondant à elle-même.

La fonction $F(Z)$ nulle à l'origine est égale à 1 en module sur $\mathfrak{C}$. Il est bon de remarquer que $F'(0) \neq 0$, car l'origine n'est pas point de ramification de $\mathfrak{D}_1$. La fonction $\log \frac{1}{F(Z)}$ devient infinie à l'origine comme $\log \frac{1}{Z}$ et sur $\mathfrak{C}$ sa partie réelle est nulle. Cette partie réelle est $\log \frac{1}{|F(Z)|}$, c'est une fonction harmonique de X, Y $(Z = X + iY)$ nulle sur $\mathfrak{C}$, qui devient infinie en O comme $\log \frac{1}{|Z|}$. C'est la fonction de Green du contour $\mathfrak{C}$ relativement à l'origine.

Si l'on développe $F(Z)$ autour de l'origine, on a

$$F(Z) = Z F'(0) + \frac{Z^2}{2!} F''(0) + \ldots$$

$$|F(Z)| = |Z| \left| F'(0) + \frac{Z}{2!} F''(0) + \ldots \right|$$

et

$$\log \frac{1}{|F(Z)|} = \log \frac{1}{|Z|} + \log \frac{1}{\left| F'(0) + \frac{Z}{2} F''(0) + \ldots \right|}$$

$$= \log \frac{1}{|Z|} + \log \frac{1}{|F'(0)|} + \textit{fonction harmonique nulle à l'origine.}$$

Donc $\log \frac{1}{|F'(0)|}$ est le terme constant du développement de la fonction de Green autour de l'origine.

Le contour $\mathfrak{C}$ étant intérieur au cercle $\mathfrak{C}_1$ $(|Z_1| = 1)$, on sait, d'après un lemme (¹) de M. Koebe (*Math. Annalen*, t. LXVII, p. 208) que le

(¹) Ce lemme suppose que le contour $\mathfrak{C}$ ne détourde pas $\mathfrak{C}_1$, mais il est vrai encore quand $\mathfrak{C}$ a des parties communes avec $\mathfrak{C}_1$.

terme constant de la fonction de Green est $< \Gamma$, Γ étant *négatif*, donc $|F'(0)| > 1$.

Revenons maintenant aux domaines D et D_1 qui se correspondent biunivoquement et analytiquement à l'aide de la relation $z_1 = f(z)$. Ce point $Z = 0$ de $\mathfrak{D}$ *qui coïncide avec son correspondant* $Z_1 = F(0) = 0$, est l'image d'un certain point ω de D qui *coïncide avec son correspondant* ω_1 *de* D_1. Cela veut dire que, si z est l'affixe de ce point ω, on a $z_1 = f(z) = z$, et *en plus* que le point ω_1 de D_1 ainsi correspondant au point ω de D est *sur le même feuillet que* D. Autrement dit, la correspondance biunivoque et analytique établie par $z_1 = f(z)$ entre les points extérieurs à D et les points extérieurs à D_1 possède *un point double* ω *et un seulement*.

Je répète que cela ne veut pas dire que l'équation $f(z) = z$ *n'ait qu'une racine dans* D, car il pourrait très bien arriver qu'un point z de D ait pour correspondant dans D_1 un point ayant un *affixe* $z_1 = f(z)$ *égal à* z, mais situé sur *un autre feuillet* de D_1 que celui sur lequel on a supposé que D était tracé. Cela arriverait par exemple si l'on pouvait trouver *plusieurs feuillets distincts de* D_1 recouvrant chacun complètement l'aire D, c'est-à-dire si, sur plusieurs feuillets distincts de D_1, le cylindre projetant la courbe C qui limite D découpait des aires d'un seul tenant simplement connexes projetées sur D *complètement intérieures à* D_1 (*voir* la figure 7).

Il est donc établi que l'équation $f(z) - z = 0$ a une racine ζ au moins dans D. Si de plus on remarque que

$$\frac{dz_1}{dz} = \frac{dz_1}{dZ_1}\frac{dZ_1}{dZ}\frac{dZ}{dz} \quad (1)$$

Z_1 étant l'image de z_1 et Z celle de z, on voit que, au point $Z = 0$, image de $z = \zeta = f(\zeta)$, on a

$$\frac{dz_1}{dZ_1} = \frac{dz}{dZ},$$

(1) Il ne peut pas y avoir de difficulté pour les dérivées $\frac{dz_1}{dZ_1}$ et $\frac{dz}{dZ}$, puisque le feuillet de D_1, qui contient D, n'a pas de point de ramification intérieur à D. Une telle difficulté ne serait d'ailleurs pas très gênante, seulement il faudrait alors substituer à l'aire simple D une aire simplement connexe formée de plusieurs feuillets *identiques à* D, superposés, et ramifiés entre eux afin que l'ensemble de ces feuillets fît bien une aire simplement connexe intérieure à D_1.

puisque $Z = Z_1 = 0$, et par suite

$$\left(\frac{dz_1}{dz}\right)_\zeta = \left(\frac{dZ_1}{dZ}\right)_0.$$

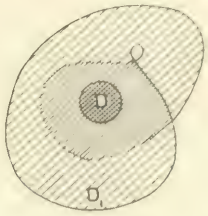


Fig. 2.

et comme

$$\left(\frac{dZ_1}{dZ}\right)_0 = F_1'(0),$$

on a

$$\left|\frac{dz_1}{dz}\right|_\zeta = |f'(\zeta)| > 1.$$

Donc l'équation $f(z) - z = 0$ a une racine ζ au moins dans D et l'on a en ζ

$$|f'(\zeta)| > 1.$$

Ce lemme nous sera fort utile dans la suite.

Lemme de Schwarz. — Il se trouve dans les *Œuvres* de Schwarz, t. II, p. 109 :

« Si $f(z)$ est holomorphe pour $|z| < 1$ et si, dans tout ce domaine $|z| < 1$, on a

$$|f(z)| < 1, \quad \text{avec} \quad f(0) = 0,$$

on a pour tout point z, $0 < |z| < 1$, l'inégalité

$$|f(z)| < |z|,$$

sauf dans le cas où $f(z)$ est une fonction linéaire $ze^{i\theta}$, auquel cas

$$f(z) = |z|.$$

En effet [1], par hypothèse, la fonction $\varphi(z) = \frac{f(z)}{z}$ est régulière

[1] *Voir* Carathéodory, *Math. Annalen*, t. LXXII, § 1.

pour $|z| < 1$: quel que soit ρ positif et < 1, le module de $\varphi(z)$ dans le domaine $|z| \leq \rho$ atteint son maximum pour $|z| = \rho$. On a donc, pour $|z| \leq \rho$,

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq \frac{1}{\rho},$$

puisque sur $|z| = \rho$, $|f(z)| \leq 1$. Donc, pour $|z| \leq \rho$,

$$|f(z)| \leq \frac{|z|}{\rho}.$$

Ceci a lieu quel que soit ρ positif < 1. On a donc en tout point intérieur $|z| < 1$,

$$|f(z)| \leq |z|.$$

Si $\varphi(z)$ n'est pas constante, on ne peut avoir en un point intérieur $|f(z)| = |z|$, car il y aurait des points intérieurs où $|f(z)|$ serait $> |z|$, ce qui contredit l'inégalité précédente. L'égalité $|f(z)| = |z|$ en un point intérieur n'est possible que si $|\varphi(z)| = 1$, $\varphi(z)$ étant constant, c'est-à-dire si $f(z) = ze^{i\theta}$, et alors elle a bien lieu en tout point intérieur au cercle $|z| < 1$.

On peut en outre conclure qu'à l'origine on a $|f'(0)| \leq 1$, sauf dans le cas banal où $f(z) = ze^{i\theta}$.

C'est évident si $f'(0) = 0$. On peut donc se borner au cas où $f'(0) \neq 0$: alors si l'on envisage un cercle C *assez petit*, de centre O, limitant une aire D, $z_1 = f(z)$ décrira, lorsque z décrira D, une aire simple D_1, à un seul feuillet, limitée par une courbe analytique fermée C_1, et contenant l'origine. Et comme $|f(z)| \leq |z|$, l'aire D_1 sera *toute intérieure à l'aire* D. Le lemme que nous avons précédemment démontré permet donc de conclure qu'à l'origine on a

$$|f'(0)| \leq 1.$$

Il est clair que si l'on part d'un point quelconque z, intérieur au cercle fondamental $|z| < 1$, les conséquents successifs $z_1 = f(z)$, $z_2 = f(z_1)$, ... de z auront O et O seul pour point-limite $\|z_n\| \leq \|z_{n-1}\|$, hors le cas banal où $f(z) = ze^{i\theta}$. Ce cas banal est d'ailleurs *le seul cas* où la fonction $f(z)$ établit une correspondance biunivoque et analytique entre les points intérieurs au cercle, l'origine étant conservée par la correspondance; ceci est bien connu depuis Poincaré. Dans tous les autres cas, lorsque z décrit l'intérieur $\mathcal{D}$ du cercle $|z| < 1$,

$z_1 = f(z)$ décrit l'intérieur d'une surface de Riemann $\mathfrak{D}_1$ simplement connexe, contenant l'origine, et dont tous les points intérieurs sont intérieurs au cercle $|z| < 1$. La frontière de $\mathfrak{D}_1$ peut coïncider en tout ou partie avec la frontière de $\mathfrak{D}$.

Bornons-nous maintenant au cas où la frontière de $\mathfrak{D}_1$ serait intérieure à $\mathfrak{D}$, c'est-à-dire où l'on aurait pour $|z| = 1$, $|f(z)| < 1$, en supposant, si l'on veut, $f(z)$ analytique même sur $|z| = 1$. Alors il est clair que la variation de l'argument de $z_1 - z = f(z) - z$, lorsque z décrit le cercle $\mathfrak{C}(|z| = 1)$, sera égale à 2π; et $f(z) - z$ aura une racine, et une seule, dans $\mathfrak{C}$, qui est zéro. Ceci suggère la généralisation suivante, utile dans bien des questions d'itération, quand on envisage le problème général et non plus seulement le problème local.

Imaginons que z décrivant une aire simple Δ, limitée par une courbe analytique Γ, le point $z_1 = f(z)$, $f(z)$ étant analytique dans Δ et sur $\mathfrak{C}$, décrive une surface de Riemann simplement connexe Δ_1 dont tous les points, y compris la frontière Γ_1 qui est une courbe analytique fermée, soient intérieurs à l'aire Δ. Alors la représentation conforme de Δ sur l'aire $\mathfrak{D}$ du cercle $|z| \leqq 1$, montre :

1° Que l'équation $z = f(z)$ a une racine et une seule ζ à l'intérieur de Δ;

2° Que l'on a $|f'(\zeta)| < 1$;

3° Que les conséquents successifs $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ d'un point quelconque z pris dans Δ ou sur Γ, tendent régulièrement vers ζ.

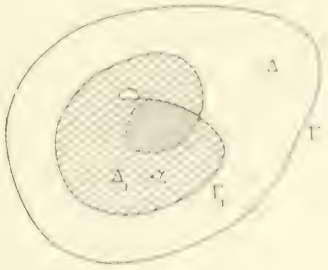


Fig. 3.

Voici des extensions du lemme de Schwarz sur lesquelles il n'est pas nécessaire d'entrer dans beaucoup de détails de démonstration.

Le lemme de Schwarz affirme que, hors le cas banal $f(z) = e^{i\theta}z$,

si z décrit l'intérieur du cercle $|z| \leqq \rho < 1$, $z_1 = f(z)$ décrit une surface de Riemann *toute intérieure à ce cercle* : $|f(z)| < \rho$.

Si l'on suppose maintenant que pour $|z| < 1$ on a encore $|f(z)| < 1$, mais que le point ζ invariant $f(\zeta) = \zeta$ n'est plus l'origine, mais un autre point *intérieur* au cercle $|\zeta| < 1$, on verra bien facilement que, si ζ' désigne le point symétrique de ζ par rapport au cercle $|z| = 1$, on aura dans le cercle

$$\left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right| \leqq \rho_0,$$

ρ_0 étant la valeur constante $\left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right|$ pour $|z| = 1$, $\rho_0 = |\zeta|$:

$$\left|\frac{f(z)-\zeta}{f(z)-\zeta'}\right| < \left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right|,$$

quel que soit $\rho < \rho_0$, sauf dans le cas où

$$\frac{f(z)-\zeta}{f(z)-\zeta'} = e^{i\theta}\frac{z-\zeta}{z-\zeta'},$$

c'est-à-dire le cas où $f(z)$ est homographique, auquel cas on a toujours

$$\left|\frac{f(z)-\zeta}{f(z)-\zeta'}\right| = \left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right|.$$

Cela veut dire que, lorsque z décrit l'intérieur d'un cercle C quelconque du faisceau défini par les deux points-cercles ζ et ζ' (points limites ou points de Poncelet), cercle C intérieur à $|z| < 1$, le point $z_1 = f(z)$ reste *à l'intérieur de ce cercle* C sans jamais venir sur ce cercle, et décrit une surface de Riemann simplement connexe contenant ζ, *toute intérieure à* C [hors le cas où $f(z)$ est linéaire]. S'affranchissant de l'hypothèse qu'il existe un point ζ invariant dans $|z| < 1$, hypothèse qui peut très bien n'être pas vérifiée [*voir* plus loin les fractions $\varphi(z)$ à cercle fondamental $|z| = 1$ pour lesquelles $\varphi(z) = z$ a toutes ses racines sur ce cercle], on envisagera un point quelconque ζ et son symétrique ζ' par rapport au cercle $|z| = 1$. Alors il est clair que, si $\zeta_1 = f(\zeta)$ est la valeur correspondante à ζ et ζ'_1 le symétrique de ζ_1 par rapport au cercle $|z| = 1$ (¹), la fonction

$$\varphi(z) = \frac{f(z)-\zeta_1}{f(z)-\zeta'_1}\,\frac{|\zeta_1|}{\zeta_1}$$

(¹) On suppose bien entendu que ζ_1 n'est pas sur le cercle $|z| = 1$.

est une fonction de la variable $u = \frac{1}{\zeta}\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}$, qui est nulle pour $u = 0$ $(z = \zeta)$ et qui, pour $|u| < 1$, est toujours < 1. On a donc, dans le cercle,

$$\left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right| \quad \rho < |\zeta|,$$

qui est un cercle quelconque du faisceau (ζ, ζ') intérieur à $|z| < 1$

$$\left|\frac{f(z)-\zeta_1}{f(z)-\zeta_1'}\right| < \left|\frac{\zeta_1}{\zeta}\right| \left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right|,$$

sauf le cas où $f(z)$ serait homographique et conserverait l'intérieur du cercle $|z| < 1$, auquel cas le signe $<$ est à remplacer par le signe $=$.

Ce fait s'énonce plus simplement si l'on transforme, par une substitution linéaire convenable, l'intérieur de $|z| < 1$ en l'intérieur du demi-plan analytique supérieur $[\mathfrak{I}(z) =$ partie imaginaire de $z > 0]$. On voit alors immédiatement que, si $z_1 = f(z)$ transforme tout point z de ce demi-plan $[\mathfrak{I}(z) > 0]$ en un point z_1 du demi-plan $[\mathfrak{I}(z_1) > 0]$, si ζ est un point quelconque du demi-plan $[\mathfrak{I}(\zeta) > 0]$ et $\zeta_1 = f(\zeta)$ pour lequel $\mathfrak{I}(\zeta_1) > 0$, en désignant par ζ' et ζ_1' les valeurs conjuguées de ζ et ζ_1 il est visible qu'on aura

$$\left|\frac{f(z)-\zeta_1}{f(z)-\zeta_1'}\right| < \left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right|$$

tant que

$$\left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right| \quad \rho < 1$$

quel que soit $\rho > 1$, sauf dans le cas où $f(z)$ est une fonction linéaire du type $\frac{az+b}{cz+d}$ conservant le demi-plan supérieur

Pour une telle fonction homographique, on aurait toujours

$$\left|\frac{f(z)-\zeta_1}{f(z)-\zeta_1'}\right| = \left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right|$$

et, d'ailleurs,

$$\frac{f(z)-\zeta_1}{f(z)-\zeta_1'} = \frac{z-\zeta}{z-\zeta'} \cdot e^{i\theta}.$$

Remarque. — Si l'on avait affaire à une fonction $f(z)$ qui conserve à la fois l'intérieur et l'extérieur du cercle C $|z| = 1$, c'est-à-dire telle qu'à tout point z intérieur corresponde $z_1 = f(z)$ intérieur, à z' symé-

trique de z par rapport à C et extérieur corresponde un point z'_1 symétrique de z_1 par rapport à C, et à tout point du cercle un point du cercle [exemple : les fractions à cercle fondamental de M. Fatou (*Comptes rendus*, 21 mai 1917)] et si l'origine et l'infini étaient points doubles de la transformation $z_1 = f(z)$, on aurait, hors le cas banal où $z_1 = ze^{i\theta}$,

$$|f(z)| < |z| \quad \text{(pour tout point intérieur)}$$

et, évidemment,

$$|f(z)| > |z| \quad \text{(pour tout point extérieur)},$$

le cercle C étant évidemment axe de symétrie pour la transformation.

Extension nouvelle du lemme de Schwarz. — On a analysé précédemment comment se comportait dans le cercle $|z| \leq 1$ la transformation $z_1 = f(z)$ lorsque cette transformation transforme en lui-même *l'intérieur du cercle* en laissant invariant un point *intérieur*.

Il peut arriver, comme je l'ai dit plus haut, que la transformation ne laisse invariants que des points situés *sur la circonférence* du cercle $|z| = 1$.

Je vais indiquer maintenant comment, ici encore, on peut analyser l'allure de la transformation *dans le cercle*.

Je suppose, d'abord, que ce cercle a été transformé par une substi-

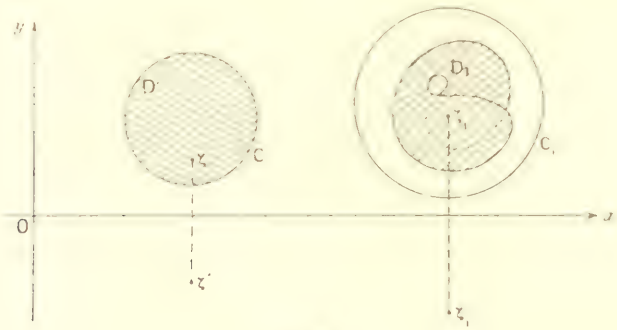


Fig. 6.

tution linéaire auxiliaire dans le demi-plan analytique supérieur $\mathcal{I}(z) > 0$.

Alors $z_1 = f(z)$ sera supposée une fonction analytique dans le

demi-plan supérieur, et nous supposerons qu'elle transforme l'axe réel en lui-même, que tout point z situé au-dessus de l'axe réel se transforme en un point z_1 situé au-dessus de l'axe réel. Nous la supposons donc analytique et réelle sur l'axe réel, donc elle s'étendra au demi-plan analytique inférieur par la méthode des symétries, mais c'est là une question accessoire.

Nous avons vu que, si ζ est un point du demi-plan supérieur et ζ_1 son correspondant $\zeta_1 = f(\zeta)$, lorsque z décrit l'intérieur et la circonférence du cercle C, $\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}}\right| \leqq \rho < 1$ (¹), on a

$$\left|\frac{f(z)-\zeta_1}{f(z)-\bar{\zeta}_1}\right| < \left|\frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}}\right|,$$

hormis le cas banal où $f(z)$ est homographique ($\bar{\zeta}$ et $\bar{\zeta}_1$ sont conjugués de ζ et ζ_1). Cela veut dire que si z est intérieur à C ou sur sa circonférence, $z_1 = f(z)$ est *intérieur* au cercle C_1 défini par

$$\left|\frac{z_1-\zeta_1}{z_1-\bar{\zeta}_1}\right| \leqq \rho.$$

Les deux cercles C et C_1 sont homothétiques par rapport à un point de l'axe réel et dans cette homothétie ζ et ζ_1 se correspondent. *Le rapport des rayons de* C *et* C_1 *est égal au rapport des ordonnées de* ζ *et* ζ_1.

Imaginons que ζ *tende vers un point* τ *de l'axe réel*, le cercle C conservant un rayon fini R; alors ζ_1 tendra vers un point τ_1 de l'axe réel (²) $[\tau_1 = f(\tau)]$. Il est visible que, sur l'axe réel, $f'(z)$ est réelle et positive (³); donc ζ et ζ_1 tendant vers τ et τ_1, on conclut que le rapport

$$\frac{\text{ordonnée de } \zeta_1}{\text{ordonnée de } \zeta}$$

tend vers une limite bien déterminée qui est égale à $f'(\tau)$.

Il n'est pas difficile de conclure dans ces conditions que, C tendant vers une position limite Γ qui est un cercle de rayon R tangent en τ à l'axe réel, C_1 tendra vers une position limite Γ_1 qui est un cercle de rayon $Rf'(\tau)$ tangent en τ_1 à l'axe réel. Et il est encore facile de voir

(¹) ρ est un nombre quelconque < 1.

(²) On peut toujours supposer τ et τ_1 à distance finie.

(³) Sans être nulle.

que lorsque z décrit l'intérieur de la circonférence du cercle Γ, $z_1 = f(z)$ décrira un domaine Δ_1 qui *n'aura aucun point extérieur à* Γ_1, mais qui *a priori* pourrait très bien avoir des points sur Γ_1. L'hypothèse contraire : celle où Δ_1 aurait des points extérieurs à Γ_1 conduirait à une contradiction; envisageant en effet un cercle $\mathcal{C}$ infiniment voisin de Γ et situé au-dessus de Ox, auquel correspondrait un cercle $\mathcal{C}_1$ infiniment voisin de Γ_1, $\mathcal{C}_1$ devrait toujours contenir z_1 lorsque z est dans $\mathcal{C}$; et ceci ne serait pas vrai lorsque z_1 serait voisin d'un point de Δ_1 extérieur à Γ_1 donc extérieur à $\mathcal{C}_1$.

On peut cependant affirmer que, lorsque z décrit l'intérieur de la circonférence du cercle Γ, z_1 décrit un domaine qui n'a, en commun avec Γ_1 que le point τ_1, lorsque $f(z)$ n'est pas homographique.

On vient de voir en effet que, lorsque z décrit l'intérieur de la circonférence du cercle Γ de rayon R qui, évidemment, est un cercle *quelconque* tangent en τ à l'axe réel), z_1 décrit un domaine dont tous les points sont à l'intérieur ou sur la circonférence de Γ_1, circonférence de rayon $R_1 = Rf'(\tau)$ tangent en τ_1 à OX. Cela veut dire que la partie imaginaire de la fonction $\frac{1}{f(z)-\tau_1}$ est, à l'intérieur ou sur la circonférence de Γ, $\leq$ à une certaine limite négative qui est

$$-\frac{1}{R_1} = -\frac{1}{Rf'(\tau)},$$

$$\mathcal{I}\left(\frac{1}{f(z)-\tau_1}\right) \leq -\frac{1}{Rf'(\tau)} \quad (^1).$$

Or lorsque z décrit l'intérieur de Γ, on a

$$\mathcal{I}\left(\frac{1}{z-\tau}\right) \leq -\frac{1}{R},$$

le signe $<$ étant remplacé par $=$ quand z vient sur Γ.

Donc *lorsque z décrit la circonférence* Γ, on aura

$$\mathcal{I}\left[\frac{1}{f(z)-\tau_1} - \frac{1}{(z-\tau)f'(\tau)}\right] \leq 0.$$

---

(1) Car, évidemment, le point $\frac{1}{z_1-\tau_1}$, lorsque z_1 est dans Γ_1 est dans le demi-plan

$$\mathcal{I}\left(\frac{1}{z_1-\tau_1}\right) \leq -\frac{1}{R_1}.$$

La fonction

$$\mathfrak{I}\left[\frac{1}{f(z)-\tau_1}-\frac{1}{(z-\tau)f'(\tau)}\right]$$

est une fonction harmonique et régulière en tout point intérieur à Γ, et en tout point de Γ, sauf peut-être au point $z=\tau$.

Or, en ce point, on a

$$\begin{aligned} f(z)-\tau_1 &= f(z)-f(\tau)-(z-\tau)f'(\tau)+\frac{(z-\tau)^2}{2!}f''(\tau)+\ldots \\ &= (z-\tau)f'(\tau)[1+\lambda(z-\tau)+\ldots]. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(z)-\tau_1} &= \frac{1}{(z-\tau)f'(\tau)}\,\frac{1}{1+\lambda(z-\tau)+\ldots} \\ &= \frac{1}{(z-\tau)f'(\tau)}[1-\lambda(z-\tau)+\ldots], \end{aligned}$$

la quantité entre parenthèses étant régulière autour de $z=\tau$.

Donc

$$\frac{1}{f(z)-\tau_1}-\frac{1}{(z-\tau)f'(\tau)}=-\frac{\lambda}{f'(\tau)}+\ldots$$

le second membre étant régulier autour de $z=\tau$.

Donc

$$\mathfrak{I}\left[\frac{1}{f(z)-\tau_1}-\frac{1}{(z-\tau)f'(\tau)}\right]$$

est harmonique régulière autour de $z=\tau$.

Cette fonction, si elle n'est pas constamment $=0$ sur Γ, sera donc <0 à l'intérieur de Γ puisque, sur Γ, elle est ≤ 0.

On aura donc, *en tout point intérieur à* Γ,

$$\mathfrak{I}\left[\frac{1}{f(z)-\tau_1}\right]<\mathfrak{I}\left[\frac{1}{(z-\tau)f'(\tau)}\right].$$

Cette inégalité ne peut devenir une égalité que si

$$\mathfrak{I}\left[\frac{1}{f(z)-\tau_1}-\frac{1}{(z-\tau)f'(\tau)}\right]$$

est $=0$ sur tout Γ, alors ladite quantité est nulle dans tout Γ et évi-

demment $f(z)$ est une fonction homographique :

$$\frac{1}{f(z)-\tau_1} = \frac{1}{(z-\tau)f'(\tau)} + k,$$

k étant une constante réelle quelconque.

Donc, *hormis le cas où $f(z)$ est homographique*, on a, en tout point intérieur à Γ,

$$\Delta\left|\frac{1}{f(z)-\tau_1}\right| \leq \Delta\left|\frac{1}{(z-\tau)f'(\tau)}\right|.$$

Cette inégalité est donc valable *en tout point situé au-dessus de* Ox, car on peut trouver un cercle Γ tangent en τ à Ox et contenant ce point z.

Et elle prouve, ce qu'il fallait démontrer, que le domaine Δ_1 décrit par z_1 quand z décrit l'intérieur de la circonférence d'un cercle Γ tan-

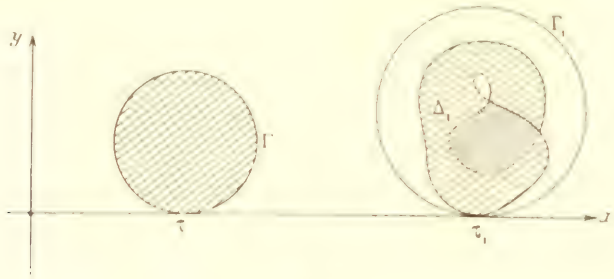


FIG. 1.

gent en τ à Ox, de rayon R quelconque est *intérieur* au cercle Γ_1 de rayon $R f'(\tau)$ tangent en τ_1 à Ox, sans avoir avec la circonférence de Γ_1 d'autre point commun que τ_1 lui-même.

Application. — Voici une application de cette proposition à la question de l'itération : $f(z)$, satisfaisant aux hypothèses précédentes, sera une fonction rationnelle ou une fonction entière conservant chacun des demi-plans analytiques $\mathcal{I}(z) > 0$ et $\mathcal{I}(z) < 0$.

Si τ est un point double de la transformation $z_1 = f(z)$ situé sur Ox, on aura

$$\tau_1 = f(\tau) = \tau.$$

Si, en outre, on a $0 < f'(\tau) \leq 1$, il est clair que tout cercle Γ tan-

gent en τ à Ox *deviendra un domaine* Δ_1, *intérieur à* Γ, *n'ayant avec* Γ *que* τ *comme point commun*. Tout point z de Γ, distinct de τ, devient un point de z_1, *intérieur à* Γ; z_1 donnera un point $z_2 = f(z_1)$ intérieur au cercle mené par z_1 et τ tangent en τ à Ox, ... On voit *que la suite* $z, z_1, z_2, \ldots$ *tend régulièrement vers le point* τ *pour lequel* $\tau = f(\tau)$, $0 < f'(\tau) \leq 1$, quel que soit le point z initial pris dans le demi-plan supérieur (non sur Ox).

Ceci démontre très simplement les résultats énoncés par M. Fatou (*Comptes rendus*, 21 mai 1917) pour les fractions $\varphi(z)$ à cercle fondamental pour lesquelles, *sur le cercle*, se trouve un point $\zeta = \varphi(\zeta)$ tel que $|\varphi'(\zeta)| \geq 1$: tout point intérieur ou tout point extérieur au cercle a des conséquents successifs qui *tendent régulièrement vers* ζ. On verra plus loin que les deux cas $|\varphi'(\zeta)| < 1$ et $|\varphi'(\zeta)| = 1$ se distinguent l'un de l'autre profondément.

Remarque. — Toutes les hypothèses faites plus haut sur la fonction $f(z)$ ne sont pas également indispensables : voici des hypothèses plus générales qu'on peut faire pour donner au lemme de Schwarz l'extension qui nous a servi dans l'application précédente; ces hypothèses sont d'un ordre aussi général que celles qu'on fait dans le lemme de Schwarz lui-même :

Soit $f(z)$ une fonction analytique *à l'intérieur* d'un cercle C du plan des z qu'on peut toujours supposer être le demi-plan $\mathcal{I}(z) > 0$; supposons en outre :

1° Que tout point z intérieur à C soit transformé en un point $z_1 = f(z)$ *intérieur à* C *ou situé sur* C.

$$\mathcal{I}[f(z)] > 0 \quad \text{en tout point} \quad \mathcal{I}(z) > 0$$

2° Qu'un point O du cercle C reste invariant, par exemple l'origine

$$f(0) = 0.$$

3° Que $f(z)$ soit holomorphe dans une petite région autour de ce point [1]. (On ne suppose rien d'autre sur C ailleurs qu'en O.)

---

[1] Il suffit même de supposer que $f(z)$, holomorphe dans C, admet quand z tend vers O *dans* C une dérivée première et une dérivée seconde finies et continues de façon qu'on puisse écrire

$$z_1 = zf(z) = z\left[\frac{f'(0)}{z} + \varepsilon(z)\right],$$

$\varepsilon(z)$ étant *holomorphe dans* C et tendant vers zéro lorsque z tend vers O dans C.

Alors il faut nécessairement que $f'(0)$ soit *réelle et positive* pour que la condition (1°) soit vérifiée autour de l'origine.

On se rend compte immédiatement que tous les raisonnements faits pour la démonstration du lemme étendu que nous avons donné plus haut, valent ici encore, c'est-à-dire qu'en tout point intérieur à C, $\delta(z) > 0$, on a

$$\delta\left(\frac{1}{f(z)}\right) < \delta\left(\frac{1}{zf'(0)}\right),$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu que si $f(z)$ est homographique.

Donc, *lorsque z décrit l'intérieur et le contour d'un cercle quelconque* T *de rayon* R *intérieur à* C, *tangent en* O *à* C, z_1 *décrit un domaine* Δ_1 *dont tous les points, y compris les points frontières (sauf* O*) sont intérieurs à un cercle* T_1, *tangent en* O *à* C, *et de rayon* $R_1 = Rf'(0)$. Δ_1 est tangent en O à C.

En particulier, si $f'(0) = 1$, Δ_1 est tout entier intérieur à Γ, sauf en O où Δ_1 touche Γ.

Ainsi énoncé, le lemme nous sera fort utile plus loin.

6. *Rappel de notions sur les fonctions algébriques.* — Soit $\varphi(z)$ une fonction rationnelle quelconque; $\psi(z)$ la fonction algébrique inverse de $\varphi(z)$. Posant $\varphi(z) = z_1$, on a $z = \psi(z_1)$. Envisageons la surface de Riemann $\mathcal{R}$ étalée sur le plan des z, relative à $\psi(z)$; φ étant de degré k, $\mathcal{R}$ a k feuillets, et $z = \psi(z_1)$ est une fonction uniforme sur $\mathcal{R}$ prenant toujours des valeurs *distinctes* en deux points *distincts* de $\mathcal{R}$, quand bien même ces points auraient même affixe z_1.

A une valeur de z_1 correspondent k valeurs de z, distinctes ou confondues, ses k antécédents.

I. Imaginons que z_1 décrive l'intérieur d'*une aire* Δ_1 *du plan analytique* Δ_1 étant d'un seul tenant, et limitée par un ou plusieurs contours analytiques. Pour voir quelles sont les aires décrites par l'ensemble des antécédents de z, il suffit d'étudier les points de la surface de Riemann $\mathcal{R}$ qui se projettent sur le plan analytique en un point intérieur à l'aire Δ_1. Plusieurs cas sont possibles.

1° Il peut arriver que ces points forment sur $\mathcal{R}$, k aires s_1 d'un seul tenant, distinctes, superposées, chacune ayant un seul feuillet, étant identique à Δ_1. Ceci arrivera si et seulement si, partant d'un point quelconque z_1 intérieur à Δ_1 avec une détermination quelconque de

$\psi(z_1)$ et y revenant par un chemin quelconque intérieur à Δ_1, on retrouve en z_1 la même détermination de $\psi(z_1)$. Alors *aucun point de ramification de $\psi(z)$ ne peut être intérieur à Δ_1*, mais cette condition n'est sûrement suffisante que si Δ_1 est limitée par un seul contour.

Alors chacun des k antécédents de z_1 représente une fonction holomorphe de z_1 dans Δ_1 et décrit une aire simple Δ, limitée par des contours analytiques, aire à un seul feuillet. Les k aires Δ ainsi obtenues sont ***deux à deux extérieures***, elles ne peuvent avoir en commun que des points frontières, et *ceci n'arrive que si la frontière de Δ contient un point de ramification de $\psi(z)$*. L'intérieur de chacune des k aires s_1 de $\mathcal{R}$ se trouve représenté conformément sur l'intérieur d'une Δ_1 par la fonction $\psi(z)$.

2° Il peut arriver que ces points forment sur $\mathcal{R}$ moins de k aires distinctes chacune d'un seul tenant, à cause de ce fait que l'une de ces aires peut être à plus d'un feuillet. Ceci se produira quand, partant d'un point z_1 intérieur à Δ_1 avec une certaine détermination de $\psi(z_1)$ on pourra décrire un *chemin intérieur à Δ_1 qui ramène en z_1 une autre détermination de $\psi(z_1)$ que la détermination initiale*. Cela voudra dire que l'on pourra passer d'un point P de $\mathcal{R}$, projeté à l'intérieur de Δ_1, à un point P′ superposé à P, situé sur un autre feuillet de $\mathcal{R}$ que P, par un chemin continu tracé sur $\mathcal{R}$ dont tous les points se projettent à l'intérieur de Δ_1. P et P′ appartiendront donc à une aire située sur $\mathcal{R}$, d'un seul tenant, comptant au moins deux feuillets dont les points se projettent à l'intérieur de Δ_1.

Ce fait se produira certainement quand l'aire Δ_1 contiendra au moins un point de ramification de $\psi(z)$. Mais cela n'est pas nécessaire. Si l'on envisage en effet une fonction $\varphi(z)$ du deuxième degré, relativement à laquelle $\psi(z)$ compte deux points critiques ζ_1, ζ_2 et si l'on considère deux courbes fermées C_1 et C_2 dont chacune sépare ζ_1 et ζ_2, courbes qui ne se coupent pas, elles délimitent un anneau $(C_1 C_2)$ qui constitue une aire Δ_1 doublement connexe. Il est visible que les points de $\mathcal{R}$ projetés à l'intérieur de Δ_1 forment une seule et unique aire, d'un seul tenant, à deux feuillets superposés, et limitée par chacune des courbes C_1 et C_2.

Quoi qu'il en soit, si l'on envisage p aires s_1 ($p \leqq k$) ainsi découpées dans la surface de Riemann de $\psi(z)$ il est visible que l'ensemble des k antécédents de z_1 décrira, lorsque z_1 décrira l'intérieur de Δ_1, un ensemble de p aires Δ, chacune étant d'un seul tenant, à un seul feuillet, et fournissant une représentation conforme d'une des aires s_1

sur le plan z. Ces p aires Δ sont deux à deux extérieures, elles ne peuvent avoir en commun que des points frontières, et seulement dans le cas où la fontière de Δ, passe par un point de ramification de $\psi(z)$.

Il pourra arriver en particulier que, partant d'un point z_1, intérieur à Δ, avec une détermination quelconque de $\psi(z_1)$, on puisse tracer un chemin intérieur à Δ, qui ramène en z_1 *toute autre détermination de* $\psi(z_1)$. Alors l'ensemble des points de $\mathcal{R}$, projetés à l'intérieur de Δ_1 formera *une seule aire* s_1, d'un seul tenant, à k feuillets superposés (ici $p = 1$). Partant d'un point P de $\mathcal{R}$ projeté dans Δ_1, on pourra parvenir en chacun des $k - 1$ points de $\mathcal{R}$ superposés à P, en décrivant un chemin continu tracé sur $\mathcal{R}$ dont les points se projettent dans l'aire Δ_1. Il est clair alors que, lorsque z_1 décrira l'intérieur de Δ_1, l'ensemble de ses k antécédents décrira une seule aire Δ du plan des z (aire à un seul feuillet) qui sera une représentation conforme de l'aire s_1 à k feuillets.

En résumé, lorsque z_1 décrira l'aire Δ_1, l'ensemble de ces k antécédents décrira p ($p \leqq k$, p pouvant être $= 1$) aires distinctes Δ du plan des z, chacune à un seul feuillet d'un seul tenant, limitée par des contours analytiques [avec peut-être des points anguleux quand la frontière de Δ_1 passera par des points critiques de $\psi(z)$]. Ces p aires sont deux à deux extérieures; elle ne peuvent avoir en commun que des points frontières en nombre fini et seulement quand la frontière de Δ_1 passe par un point critique de $\psi(z)$.

II. Considérons deux aires Δ_1 et Δ'_1 du plan analytique, Δ_1 *étant intérieure à* Δ'_1. z_1 décrivant Δ_1 l'ensemble de ses k antécédents décrira p aires distinctes Δ du plan z ($1 \leqq p \leqq k$), et il est clair que lorsque z_1 décrira l'aire Δ'_1, l'ensemble de ses k antécédents décrira p' aires distinctes Δ' du plan z, p' étant $\leqq p$. De plus chaque aire Δ sera intérieure à une aire Δ'. Il pourra arriver que p' soit $< p$, et que deux aires Δ distinctes soient intérieures à une même aire Δ'.

III. Si l'on considère maintenant deux aires Δ_1 et Δ'_1 du plan analytique *extérieures l'une à l'autre*, l'ensemble des k antécédents d'un point z_1 qui décrit Δ_1 décrira p aires distinctes Δ du plan z, et lorsque z_1 décrira Δ'_1, cet ensemble d'antécédents décrira p' aires distinctes Δ' du plan z. Il est bien certain que *chacune des* Δ *est extérieure à chacune des* Δ', et si Δ_1 et Δ'_1 n'ont pas de point frontière commun, aucune des Δ ne pourra même avoir de point frontière commun avec

une Δ'. Nous utiliserons ce résultat plus tard, dans la formation des domaines de convergence vers les points limites à convergence régulière $[\zeta = \varphi(\zeta), |\varphi'(\zeta)| < 1$. Nous verrons immédiatement que les domaines relatifs à deux tels points limites distincts *ne peuvent avoir aucun point intérieur commun.*

PREMIÈRE PARTIE

Étude générale de l'itération d'une substitution rationnelle. Ensemble des points singuliers de l'itération

7. Dans tout le cours du Mémoire, nous désignerons par $\varphi(z)$ la fraction rationnelle dont il s'agit d'étudier l'itération; nous poserons

$$z_1 = \varphi(z),$$

$$z_2 = \varphi[\varphi(z)] = \varphi_2(z), \quad \ldots \quad z_n = \varphi[\varphi_{n-1}(z)] = \varphi[\varphi_{n-2}(z)].$$

Les points $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ s'appellent les *conséquents* d'ordre 1, 2, ..., n, ... de z. Inversement, z est *antécédent* d'ordre 1 de z_1, et antécédent d'ordre n de z_n. Un point quelconque admet k antécédents si φ est une fraction de degré k. Les fonctions rationnelles $\varphi_2(z), \ldots, \varphi_n(z), \ldots$ seront dites les *itérées de* $\varphi(z)$.

Le problème de l'itération consiste à étudier la suite $z, z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ et principalement à étudier l'*ensemble dérivé* de l'ensemble dénombrable précédent, et *comment cet ensemble dérivé dépend du choix de z, élément initial.*

Ce problème n'a été étudié jusqu'ici qu'au point de vue local; logiquement, cette restriction s'explique par la façon dont une fonction analytique $\varphi(z)$ est définie en général: par une série de puissances convergeant au voisinage d'un certain point; si l'on veut que les conséquents successifs d'un point z puissent se définir de proche en proche, il faut que les valeurs z_1 que prend $f(z)$ dans le domaine où elle est définie ne sortent pas de ce domaine : d'où, avec presque tous les auteurs qui se sont occupés jusqu'ici de la question, la préocupation d'étudier les conséquents au voisinage seul des points ζ racines de $z = f(z)$ pour lesquels $|f'(z)| < 1$ par exemple; c'est qu'alors les valeurs de $|z_1 - \zeta|$ sont $< |z - \zeta|$, pourvu que $|z - \zeta|$ soit assez petit

et par suite les conséquents successifs restent dans la région voisine de ζ où $f(z)$ est définie [1].

Pour étudier l'itération de z quel que soit z dans le plan analytique, il faut que $f(z)$ et toutes ses itérées soient parfaitement définies pour tout point du plan. Il faut pour cela que seul le point à l'infini puisse être un point essentiel de $f(z)$. Et ceci conduit à supposer que f est une *fonction rationnelle* ou une *transcendante entière*. Dans ces deux cas seulement, quel que soit z à distance finie il a des conséquents bien définis, et le problème a un sens.

Nous supposerons donc pour l'étude générale en vue, que la fonction à itérer est *rationnelle* $z_1 = \varphi(z)$. On verra de soi-même quelles seront celles de nos conclusions qui s'étendront à l'itération des transcendantes entières. φ étant rationnel, *le point à l'infini sera assimilé à un point ordinaire quelconque*, c'est-à-dire que l'on considérera le *plan complet* [2].

Une première remarque à faire est la suivante : toutes les itérées $\varphi_2(z), \ldots, \varphi_n(z), \ldots$ sont rationnelles, et si l'on suppose (en laissant de côté le cas où φ est du premier degré, cas bien facile et bien connu) que φ est d'un degré $k > 1$, leurs degrés respectifs sont $k^2, k^3, \ldots, k^n, \ldots$. *Aucune n'est identique à z*. Cela se voit tout simplement en remarquant qu'un point *arbitraire* du plan aura k antécédents d'ordre 1, k^2 antécédents d'ordre 2, ..., k^n antécédents d'ordre n, ...

Les études locales ont montré l'importance des groupes circulaires de points $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-1}$ racines des équations $z = \varphi_n(z)$ lorsque pour un de ces groupes on a

$$|\varphi_n'(\zeta_1)| = |\varphi_n'(\zeta_2)| \ldots = |\varphi_n'(\zeta_{n-1})| = |\varphi_n'(\zeta_1 \ldots \zeta_{n-1})| < 1$$

Un tel groupe est appelé *groupe circulaire limite*. On a

$$[illegible]$$

Mais on ne trouve rien dans la littérature du sujet qui se réfère, par exemple, à une racine de $z = \varphi(z)$ lorsque $|\varphi'(\zeta)| > 1$. Les auteurs qui ont traité le point de vue local passent tout de suite, dans ce cas,

---

(1) Ces points $z = f(z)$ où $|f'(z)| < 1$ sont dits points limites à convergence régulière.

(2) Quelquefois on préfère alors prendre la sphère de Riemann comme support de la variable z.

à la fonction inverse $z = \psi(z_1)$ pour laquelle $z = \psi(\zeta)$ et $|\psi'(\zeta)| < 1$, ce qui ramène tout de suite au cas précédent (point limite ou groupe limite), mais *pour* $\psi(z)$ et *non pour* $\varphi(z)$; on a ainsi des indications sur certains *antécédents* d'un point z voisin de ζ, non sur ses *conséquents*. La suite va pourtant nous révéler des propriétés profondes et extrêmement intéressantes de pareils points.

Envisageons l'ensemble des équations

$$z = \varphi(z), \qquad z = \varphi_2(z), \qquad \ldots \qquad z = \varphi_n(z) \qquad \ldots$$

aucune d'elles n'est identité. Chacune a un nombre fini de racines et M. Kœnigs a défini ce qu'il fallait entendre par racine primitive [1] d'une équation

$$z = \varphi_n(z)$$

ainsi que par groupe circulaire de racines attaché à ζ. Nous appellerons $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-1}$ les n racines d'un tel groupe. Elles sont distinctes et l'on a

$$\zeta_1 = \varphi(\zeta), \qquad \zeta_2 = \varphi(\zeta_1), \qquad \ldots \qquad \zeta_{n-1} = \varphi(\zeta_{n-2}), \qquad \zeta = \varphi(\zeta_{n-1})$$
$$\varphi_n'(\zeta) = \varphi_n'(\zeta_1) = \ldots = \varphi_n'(\zeta_{n-1}) = \varphi'(\zeta)\varphi'(\zeta_1)\ldots\varphi'(\zeta_{n-1}).$$

La substitution $[z, \varphi(z)]$ permute circulairement les racines d'un groupe.

8. *L'ensemble* E. — Appelons E *l'ensemble dénombrable* formé des racines primitives ζ de toutes les équations

$$z = \varphi_n(z) \text{ [2]} \quad (n = 1, 2, \ldots \infty) \qquad [\varphi_1(z) = \varphi(z)]$$

pour lesquelles on aura

$$|\varphi_n'(\zeta)| > 1.$$

---

(1) M. Kœnigs dit quelquefois qu'une telle racine « appartient à l'indice n » car elle n'est racine d'aucune équation $z = \varphi_p(z)$ pour un indice $p < n$.

(2) Si au lieu de partir de la substitution $z_1 = \varphi(z)$ pour définir l'ensemble E des $z = \varphi_n(z)$ où $|\varphi_n'(z)| > 1$, on partait de la substitution

$$z_1 = \Phi(z) = \varphi_1(z)$$

pour former l'ensemble ε des $z = \Phi_n(z)$ où $|\Phi_n'(z)| > 1$, les deux ensembles E et

9. 1° *Existence.* — Pour ne pas raisonner dans le vide, il importe d'abord de prouver que E contient toujours des points.

Prenons donc $z = \varphi(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, P et Q étant deux polynomes de degré k (¹). Ses racines $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{k+1}$ sont celles de l'équation

$$P - zQ = 0.$$

Si $Q = a_0 z^k + \ldots$, on a

$$R = P - zQ = -a_0 z^{k+1} + \ldots$$

Or,

$$\varphi'(\zeta_i) = \left(\frac{P}{Q}\right)'_{\zeta_i} = 1 + \left(\frac{R}{Q}\right)'_{\zeta_i}.$$

Et les ζ_i étant racines de $R(z) = 0$, on a

$$\left(\frac{R}{Q}\right)'_{\zeta_i} = \frac{R'(\zeta_i)}{Q(\zeta_i)}.$$

Donc,

$$\varphi'(\zeta_i) = 1 + \frac{R'(\zeta_i)}{Q(\zeta_i)}. \tag{1}$$

Rappelons-nous, d'autre part, qu'à cause de

$$\frac{Q(z)}{R(z)} = \frac{a_0 z^k + \ldots}{-a_0 z^{k+1} + \ldots},$$

on obtient, en décomposant $\frac{Q}{R}$ en fractions simples, la relation bien connue

$$\boxed{\sum \frac{Q(\zeta_i)}{R'(\zeta_i)} = -1} \tag{2}$$

---

et ζ sont identiques car toute racine de $z = \varphi_p(z)$ ou $|\varphi_p(z)| > 1$ satisfait à

$$z - \varphi_{np}(z) = \Phi_p(z),$$

et l'on a

$$\Phi_p(z) = |\varphi_{np}(z)|.$$

Donc $|\Phi_p(z)| > 1$ pour cette racine; de plus, toute équation $z = \Phi_p(z)$ est une $z = \varphi_k(z)$ $(k = np)$ et $|\Phi_p(z)| = |\varphi_{kp}(z)|$.

(¹) On peut toujours, en faisant au besoin sur z et z_1 une même substitution homographique, supposer que $P(z)$ et $Q(z)$ sont du même degré k, degré de la fraction rationnelle.

A un point M_i d'affixe $\varphi(\zeta_i)$, pour lequel $|\varphi'(\zeta_i)| < 1$ correspond par (1) un point N_i d'affixe $\frac{Q(\zeta_i)}{R'(\zeta_i)}$ situé dans le demi-plan,

$$\mathcal{R}(z) = \text{partie réelle de } z < -\frac{1}{2};$$

si $|\varphi'(\zeta_i)| > 1$, N_i est dans le demi-plan $\mathcal{R}(z) > -\frac{1}{2}$, et réciproquement.

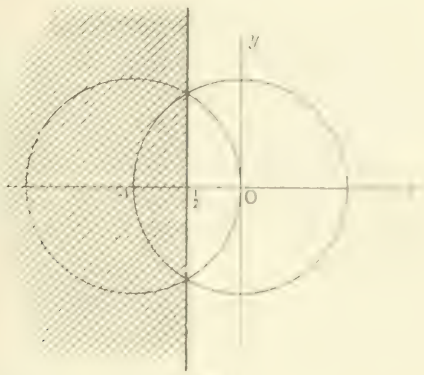


Fig. 1.

La relation (2) prouve que les $k+1$ points $N_1, N_2, \ldots, N_{k+1}$ ont pour centre de gravité le point d'affixe $-\frac{1}{k+1}$ qui est dans le demi plan $\mathcal{R}(z) > -\frac{1}{2}$, donc, un au moins des points N_i est dans ce demi-plan, et non sur sa frontière [1].

Il y a donc une au moins des valeurs $\varphi'(\zeta_i)$ qui est en module > 1, E contient donc sûrement des points [2].

Remarque. — Lorsque P et Q sont de même degré k, comme on peut toujours le supposer, le point à l'infini ne peut être racine de

$$z - \varphi(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

---

[1] La même relation montre que tous les N_i peuvent être dans le demi-plan $\mathcal{R}(z) > -\frac{1}{2}$, c'est-à-dire *qu'il peut n'y avoir aucun point limite à convergence régulière*.

[2] *Voir* la note additionnelle à la fin du Mémoire.

On peut même, l'ensemble des racines des équations $z = \varphi_n(z)$ étant dénombrable, supposer que le point à l'infini du plan n'appartient pas à cet ensemble : il suffit pour cela d'envoyer à l'infini, par une même substitution homographique convenable sur z et z_1, un point n'appartenant pas à l'ensemble précédent.

Ceci n'a rien d'essentiel d'ailleurs, puisque, dans notre étude, le point à l'infini ne se distingue en rien de tout autre point du plan (lorsque φ est rationnel); l'avantage formel qu'on peut retirer de l'hypothèse précédente est de pouvoir parler, sans ambiguïté possible, de la valeur de $\varphi_n'(\zeta)$ en tout point ζ racine de $z = \varphi_n(z)$: si ζ pouvait être le point à l'infini, il faudrait quelques précautions de langage, et par exemple, on conviendrait que $\varphi_n'(\zeta)$ en ce point a même valeur qu'en tous les points du groupe circulaire $\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$ auquel appartient le point à l'infini ζ. Cette convention est naturelle : si l'on soumet le plan z à une transformation homographique quelconque

$$(S) \qquad \frac{\partial Z_1 - \varphi}{\partial Z_1 - \varphi} \qquad \frac{\partial Z_1 - \varphi}{\partial Z_1 - \varphi}$$

la nouvelle forme de la substitution à itérer se déduira facilement de $z_1 = \varphi(z)$: ce sera $Z_1 = \Phi(Z)$; les groupes circulaires fournis par $\varphi(z)$ deviennent par la transformation (S) les groupes que fournit $\Phi(Z)$, et la valeur de $\varphi_n'(\zeta)$ pour un groupe $\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$ est *égale à celle de* $\Phi_n(Z)$, pour le groupe $Z, Z_1, \ldots, Z_{n-1}$ correspondant au précédent.

Tout ceci résulte immédiatement de la formule classique

$$(3) \qquad \frac{dZ_1}{dZ} = \frac{dZ_1}{dz_1}\frac{dz_1}{dz}\frac{dz}{dZ}$$

sans qu'il soit utile d'insister.

Avec ces éclaircissements la convention qui définit $\varphi_n(\zeta)$ au point à l'infini ζ dans le cas où ce point est racine de

$$\varphi_n(z)$$

est toute naturelle. On voit aussi comment on peut, pour étudier l'itération de $\varphi(z)$, soumettre le plan z à telle substitution homographique (S) qu'on voudra de façon à avoir une *transformée de*

la substitution $[z, \varphi(z)]$ *par* S (¹) qui soit plus commode à étudier que $\varphi(z)$.

Dans la suite, il nous arrivera souvent d'user de ces transformations homographiques. Nous étudierons l'itération dans le *plan complet* ou, si l'on préfère, sur la sphère de Riemann, support de la variable z.

10. 2° *Propriétés des points de* E. — Il y a toujours un point de E satisfaisant à

$$z = \varphi(z) \qquad |\varphi'(z)| > 1.$$

Une transformation homographique convenable permet de supposer que ce point est l'origine $z = 0$. Nous allons étudier l'itération d'un petit domaine entourant O, et tout ce que nous dirons pourra s'appliquer à l'itération de la substitution $z_n = \varphi_n(z)$ autour d'un point ζ satisfaisant à

$$\zeta = \varphi_n(\zeta), \qquad |\varphi_n'(\zeta)| > 1$$

les itérées de φ_n font partie de celle de φ et l'on connaîtra bien l'itération d'un petit domaine entourant ζ par φ, si l'on connaît l'itération de ce domaine par φ_n.

D'après l'hypothèse, $\varphi(z)$ se développe autour de l'origine en une série de Taylor

$$(4) \qquad z_1 = \varphi(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \qquad \text{avec} \qquad |a_1| = |\varphi'(0)| > 1.$$

Remarquons d'abord que, parmi tous les antécédents d'ordre 1 de 0, il y en a *un* et *un seul* confondu avec 0 à cause de $\varphi'(0) \neq 0$. Lorsque z_1 varie autour de l'origine, cet antécédent z qui est bien déterminé varie autour de l'origine et l'on a un développement de Taylor pour z en fonction de z_1 tiré de (4),

$$(5) \qquad z = \frac{1}{a_1} z_1 + z_2 z_1^2 + \ldots$$

Les résultats obtenus par M. Koenigs prouvent que, si z_1 décrit un cercle C_1 de rayon assez petit, autour de l'origine, z défini par (5) décrira une courbe C *toute intérieure à ce cercle*, c'est-à-dire que,

(¹) Si l'on désigne par Σ l'opération qui fait passer de z à $\varphi(z)$, celle qui fait passer de Z à $\Phi(Z)$ sera $S^{-1}\Sigma S$, comme il est bien connu en théorie des groupes.

si $|z_1| < \delta$, δ étant assez petit, on a aussi

$$|z| < k|z_1| \quad \text{avec} \quad k < 1,$$

et si z_1 décrit l'aire D_1 limitée par C_1, z décrira l'aire D limitée par C. On peut dire aussi bien : si z décrit une aire D limitée par un cercle C (je dis : *cercle* pour fixer les idées) de centre O, de rayon *assez petit*, z_1 décrira une aire D_1 limitée par une courbe C_1 transformée de C, et D_1 *contiendra* D *à son intérieur*.

D_1 est la première itérée de l'aire D; prenons les itérées successives de D. z_1 décrivant D_1, z_2 décrira une *aire* D_2 *qui contiendra* D_1 *tout entière à son intérieur;* D_2 se recouvrira elle-même si, pour deux valeurs distinctes de z dans D_1, φ reprend la même valeur : on envisagera alors que D_2 se compose de deux ou plusieurs feuillets superposés, à la façon d'une surface de Riemann; z décrivant D_2 (tous les feuillets de D_2), $\varphi(z)$ décrira une certaine aire D_3 itérée de D_2, qui contiendra D_2 à son intérieur, et pourra être comme D_2 une surface de Riemann à plusieurs feuillets. Il est juste de remarquer que toutes les D_i successives sont simplement connexes, comme l'aire D initiale. Chacune des aires D_i est tout entière contenue dans la suivante D_{i+1}, c'est clair si D_i et D_{i+1} n'ont qu'un feuillet; si elles ont plusieurs feuillets, tout feuillet de D_i fait partie d'un feuillet de D_{i+1} et *sur ce feuillet tout point de* D_i *ou de la frontière de* D_i *est intérieur à* D_{i+1}. La question qui se pose immédiatement est la suivante : tout point du plan est-il intérieur à une D_i d'indice assez grand [1], ou bien y a-t-il des points du plan qui ne sont intérieurs à aucune D_i. La réponse est particulièrement simple et intéressante :

11. *Théorème fondamental.* — Trois cas seulement sont possibles :

1° Ou bien deux points distincts du plan complet et deux seulement restent extérieurs à toutes les D_i successives [2]. En les envoyant respectivement en a et à l'infini par une homographie convenable, $z_1 = \varphi(z)$ se réduit à l'une des deux formes simples

$$Z_1 - a = (Z - a) \quad \text{ou} \quad Z_1 - a = \frac{1}{(Z - a)}.$$

---

[1] C'est-à-dire : existe-t-il un feuillet de D_i qui recouvre ce point.

[2] C'est-à-dire ne sont recouverts par aucun feuillet des D_i successives.

alors toute aire finie du plan ne contenant pas le point α est intérieure à une D_i d'indice assez grand et à toutes les itérées de D_i.

2° Ou bien il y a un point du plan complet et un seul qui reste extérieur à toutes les D_i successives. En envoyant ce point à l'infini par une homographie convenable, $\varphi(z)$ ne peut être alors qu'un polynome et elle l'est effectivement. [Cette conclusion est encore vraie si $\varphi(z)$ est une transcendante entière.] Dans cette hypothèse, toute aire du plan située à distance finie est intérieure à une D_i d'indice assez grand et à toutes les itérées de D_i.

3° Ou bien tout point du plan complet est intérieur à une D_i d'indice assez grand (¹), et comme le plan complet (²) est un ensemble fermé, il y aura une D_i d'indice assez grand qui recouvrira tout le plan complet; il en sera de même de toutes les itérées de cette D_i. C'est le cas d'une fraction rationnelle $\varphi(z)$ générale.

Supposons en effet que trois points distincts du plan complet restent extérieurs à toutes les D_i et remarquons que l'ensemble des points du plan recouverts par une D_i représente l'ensemble des valeurs prises par la fonction $\varphi_i(z)$ itérée de $\varphi(z)$ dans l'aire D initiale. On conclurait de là qu'il existe aux moins trois valeurs que la famille des fonctions

$$\varphi(z), \quad \varphi_2(z), \quad \ldots, \quad \varphi_i(z), \quad \ldots$$

ne pourrait prendre dans D. Cette famille est composée de fonctions rationnelles; elle serait donc *normale dans* D, au sens de M. Montel, c'est-à-dire que de la suite des $\varphi_i(z)$ on pourrait extraire une suite partielle

$$\varphi_{n_1}(z), \quad \varphi_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad \varphi_{n_k}(z),$$

qui tendrait *uniformément dans toute aire intérieure à* D, vers une fonction méromorphe dans D, qui pourrait être partout infinie dans D.

Cette dernière éventualité est impossible, puisqu'à l'origine toutes les φ_i sont nulles. La fonction limite $f(z)$ serait donc nulle à l'origine et méromorphe dans D. L'origine serait point ordinaire de $f(z)$ et dans une petite aire Δ entourant l'origine et contenue dans D, $f(z)$ serait holomorphe. Dans cette aire Δ, les φ_{n_i} tendraient uniformément

(¹) C'est-à-dire est recouvert par un feuillet au moins d'une D_i d'indice convenable.

(²) Ou la sphère de Riemann dont il est la projection stéréographique.

vers $f(z)$. En particulier aussi, les valeurs des dérivées des φ_{n_i} à l'origine $\varphi'_{n_i}(0)$ tendraient vers la valeur bien déterminée et finie de la dérivée $f'(0)$ de f à l'origine. Ici se rencontre une contradiction, car bien évidemment, le développement de Taylor de $\varphi_{n_i}(z)$ autour de l'origine est

$$\varphi_{n_i}(z) = a_1^{n_i} z + \ldots, \qquad \varphi'_{n_i}(0) = a_1^{n_i},$$

si

$$\varphi(z) = a_1 z + \ldots$$

et comme n_i devient infini, $a_1^{n_i}$ devient infini aussi puisque $|a_1| > 1$ par hypothèse.

Deux points seulement peuvent échapper à toutes les D_i; on a donc trois cas.

Premier cas. — Ou bien il y en a deux distincts et alors chacun d'eux coïncide avec ses propres antécédents, ou bien chacun d'eux coïncide avec tous les antécédents d'ordre un de l'autre; en envoyant les deux points respectivement en a et à l'infini par une homographie convenable, la relation $z_1 = \varphi(z)$ se transformera [1] soit en

$$Z_1 = \varphi(Z - a)$$

soit en

$$Z_1 = a - \frac{1}{(Z - a)^2}.$$

On voit immédiatement que toute aire à distance finie ne contenant pas le point a sera intérieure à toutes les D_j d'indice $j \geq i$, i étant convenablement choisi.

On reconnaîtra aisément qu'on est dans ce cas, à ce fait qu'alors il existe deux points ζ_1 et ζ_2, et deux seulement, où $\varphi'(z) = 0$ et ces points sont tels, en outre, que : ou bien [2]

$$\zeta_1 = \varphi(\zeta_1), \quad \varphi'(\zeta_1) = 0, \quad \varphi''(\zeta_1) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi^{(n-1)}(\zeta_1) = 0, \quad \varphi^{(n)}(\zeta_1) = 0,$$

---

(1) Pour abréger il nous arrivera de dire que la fraction $\Phi(Z)$, fournie par la transformation de $z_1 = \varphi(z)$ en $Z_1 = \Phi(Z)$, à l'aide de l'homographie auxiliaire, est la transformée homographique de $\varphi(z)$.

(2) Chacun d'eux est alors un point limite à convergence régulière et l'on verra plus loin qu'il n'est ni point de E, ni limite de points de E.

avec

$$\zeta_1 = \varphi(\zeta_2), \quad \varphi'(\zeta_2) = 0, \quad \varphi''(\zeta_2) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi^{(k-1)}(\zeta_2) = 0, \quad \varphi^{(k)}(\zeta_2) \neq 0$$

ou bien (¹)

$$\zeta_2 = \varphi(\zeta_1), \quad \varphi'(\zeta_1) = 0, \quad \varphi''(\zeta_1) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi^{(k-1)}(\zeta_1) = 0, \quad \varphi^{(k)}(\zeta_1) \neq 0$$

avec

$$\zeta_1 = \varphi(\zeta_2), \quad \varphi'(\zeta_2) = 0, \quad \varphi''(\zeta_2) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi^{(k-1)}(\zeta_2) = 0, \quad \varphi^{(k)}(\zeta_2) \neq 0.$$

Deuxième cas. — Il y a un point et un seul qui échappe à toutes les D_i, il coïncide alors, nécessairement, avec tous ses antécédents. Si on l'envoie à l'infini par une homographie convenable, la relation $z_1 = \varphi(z)$ se transforme en une relation $Z_1 = \Phi(Z)$, $\Phi(Z)$ étant une fraction rationnelle dont tous les pôles sont à l'infini (car un pôle est un antécédent du point à l'infini), c'est-à-dire un polynome entier en Z.

On reconnaîtra aisément, étant donnée une forme rationnelle $\varphi(z)$, si l'on a affaire à ce deuxième cas. La fraction sera transformée homographique d'un polynome si, et seulement si l'on trouve un point ζ qui coïncide avec tous ses antécédents. Ce point sera critique pour la fonction $\psi(z)$, inverse de $\varphi(z)$, il sera aussi un point où $\varphi'(z) = 0$ puisque, parmi les antécédents d'un point critique de $\psi(z)$, il en est un où $\varphi'(z) = 0$. C'est donc un point ζ, pour lequel l'équation

$$\varphi(z) - \zeta = 0$$

a ses k racines égales à ζ.

C'est un point $\zeta = \varphi(\zeta)$, qui annule $\varphi'(\zeta)$, $\varphi''(\zeta)$, ..., $\varphi^{(k-1)}(\zeta)$, $\varphi^{(k)}(\zeta) \neq 0$, et c'est à cela qu'on le reconnaîtra (²).

Si l'on est dans ce cas, il sera aisé de transformer $\varphi(z)$ en un polynome, et alors on reconnaît tout de suite que, quelle que soit l'aire Δ à distance finie du plan z, on peut trouver un indice i tel que les itérées de D d'ordre $\geq i$ recouvrent complètement Δ : cet résulte de ce

(¹) Ils forment alors un groupe circulaire limite d'ordre k et l'ouverture qu'ils ne sont ni points de E, ni limites de points de E.

(²) C'est donc un point limite à convergence régulière : il ne sera ni de E, ni limite de points de E.

que chaque point de l'aire Δ, qui est un ensemble *borné* et *fermé* [1], est intérieur à une D_i; donc, les D_i étant contenues chacune dans la suivante, il en est une bien déterminée qui contient Δ à son intérieur. Pour bien préciser encore une fois, cela voudra dire qu'*il existe un feuillet de* D_i sur lequel tout point de l'aire Δ ou de son contour est un point intérieur à D_i.

Troisième cas. — Si la fraction rationnelle $\varphi(z)$ donnée ne se laisse ramener à aucun des types offerts par les deux cas précédents (et l'on a donné le moyen de reconnaître quand ces deux cas se présentent), c'est-à-dire s'il n'existe ni point qui coïncide avec tous ses antécédents, ni système de deux points dont chacun coïncide avec les k antécédents d'ordre un de l'autre, on peut affirmer que tout point du plan complet sera intérieur à une D_i d'indice assez grand, et comme le plan *complet* [2] est un ensemble *fermé*, il existera un indice i tel que toutes les itérées de D d'indice $> i$ *recouvriront le plan complet*.

Ainsi se trouve démontré notre théorème fondamental.

Remarque. — I. L'aire D initiale a été prise limitée par un cercle de centre O uniquement assujetti à être assez petit, c'est-à-dire dont le rayon soit inférieur à un nombre déterminé r_0.

Mais toutes nos conclusions sont encore vraies, quelle que soit *l'aire* $\mathfrak{D}$ *entourant* O dont on parte, si petite soit-elle, car une telle aire contiendra toujours à *son intérieur* une aire circulaire D de centre O assez petite, et il est évident que toute itérée $\mathfrak{D}_i$ de $\mathfrak{D}$ contient à son intérieur l'itérée D_i de D.

II. Dans un langage équivalent à celui du théorème précédent on peut dire :

Quelle que soit l'aire arbitrairement petite $\mathfrak{D}$ entourant O que l'on

---

(1) Je fais ici appel au lemme de théorie des ensembles appelé *Lemme de Borel-Lebesgue* : « Si tout point d'un ensemble fermé borné à deux dimensions est intérieur à une aire plane, on peut trouver un nombre *fini* de ces aires qui contiennent à leur intérieur tous les points de l'ensemble. » Mais ceci n'est pas essentiel.

(2) Ou, si l'on veut, la sphère de Riemann considérée comme support de la variable z.

envisage, il existe deux valeurs complexes (y compris l'infini) au plus que ne puissent prendre dans ω les fonctions $\varphi_i(z)$ itérées de $\varphi(z)$.

Premier cas. — Il y en a *deux* qui se ramènent à a et l'*infini* lorsque $\varphi(z)$ se ramène, par homographie, à

$$Z_1 - a = (Z - a)^2 \quad \text{ou} \quad Z_2 - a = \frac{1}{(Z - a)^2}.$$

Alors, si l'on considère une aire quelconque Δ du plan complet ne contenant pas ces deux points à son intérieur ou sur sa frontière, à partir d'un certain indice i chacune des itérées $\varphi_j(z)$, $j \geq i$, prendra dans $\mathfrak{D}$ toutes les valeurs affixes des points de l'aire Δ.

Deuxième cas. — Il y en a *une* qu'on peut supposer être l'*infini*, lorsque $\varphi(z)$ se ramène par homographie à un *polynome quelconque*. Alors il existe un indice i tel que chaque itérée $\varphi_j(z)$ d'indice $j \geq i$ prenne, dans $\mathfrak{D}$, toutes les valeurs affixes des points d'un domaine borné quelconque, fixé à l'avance, du plan.

Troisième cas. — Pour une fraction quelconque $\varphi(z)$ qui n'est ni transformée d'un polynome, ni transformée de $Z_1 = \frac{1}{Z}$ par homographie, il existe un indice i tel que toute itérée $\varphi_j(z)$ d'indice $j \geq i$ prenne, dans $\mathfrak{D}$, *toutes les valeurs complexes finies ou infinies.*

12. *Corollaires.* — 1° Les conclusions précédentes sont vraies si l'on remplace le point O, racine de $z = \varphi(z)$ où $|\varphi'(z)| > 1$, par un point quelconque de E, racine de $z = \varphi_n(z)$ où $|\varphi'_n(z)| > 1$, quel que soit l'indice n. Il n'y a, pour s'en assurer, qu'à substituer $\varphi_n(z)$ à $\varphi(z)$, pour former les itérées successives de l'aire ω entourant le point de E considéré; on étudie $\omega_n, \omega_{2n}, \omega_{3n}, \ldots, \omega_{pn}, \ldots$, d'où l'on conclut pour toute la suite $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_i, \ldots$, que le théorème précédent est vrai.

2° *Tout point de* E *est point limite pour l'ensemble des antécédents successifs d'un point quelconque du plan*, exception faite pour deux points du plan au plus qui peuvent : ou bien coïncider chacun avec ses propres antécédents, ou bien coïncider chacun avec tous les antécédents d'ordre un de l'autre.

On a fait remarquer, d'autre part, que, parmi les antécédents

d'ordre 1 d'un point quelconque de E, il peut y en avoir un au plus qui coïncide avec ce point lui-même, un peu de réflexion suffit alors à prouver qu'un point quelconque de E a une infinité d'antécédents successifs et par conséquent *tout point de* E *est point limite pour l'ensemble de ses propres antécédents* (¹).

3° De là suit une propriété très intéressante des points de E, à savoir : *tout point de* E *est limite de points de* E, c'est-à-dire que dans un voisinage arbitrairement petit d'un point P de E

$$\{z = \varphi_n(z) : |\varphi_n(z)| > 1\}$$

il y a toujours une infinité de points de E, racines d'équations telles que

$$z = \varphi_n(z), \quad \text{où} \quad |\varphi_n(z)| > 1.$$

En effet, quelque petite que soit l'aire ω entourant un point P de E, on peut trouver dans ω un point distinct de P qui soit antécédent de P d'ordre assez élevé m ; soit P_{-m} ce point-là, on peut l'entourer d'une aire Δ_{-m}, intérieure à ω et ne contenant pas P, assez petite pour que la transformée de Δ_{-m} par $\varphi_m(z)$ qui est une aire Δ entourant P, soit une aire simple à un seul feuillet aussi petite qu'on voudra (mais ceci n'a pas d'importance, l'essentiel est que Δ entoure P). L'itérée d'ordre n de Δ est itérée d'ordre $m+n$ de Δ_{-m}, et l'on peut prendre n assez grand pour que la petite aire finie Δ_{-m} soit tout entière à l'intérieur d'un feuillet de Δ_n (ceci résulte bien de ce qu'aucun des antécédents d'un point E ne peut être un de ces deux points exceptionnels qui interviennent dans le premier et le deuxième cas de notre théorème fondamental).

La fraction $\varphi_{m+n}(z)$ transforme alors l'aire Δ_{-m} en une aire Δ_n, qui peut se recouvrir elle-même à la façon d'une surface de Riemann, mais qui est telle que Δ_{-m} est intérieur à un feuillet de Δ_n, c'est-à-dire que, sur le feuillet considéré, Δ_{-m} et son contour ne renferment que des points *intérieurs à* Δ_n et non sur le contour de Δ_n. Ceci suffit pour affirmer (²) que l'aire Δ_{-m} renferme *à son intérieur* une racine de

---

(¹) Un point de E n'est donc jamais un des deux points exceptionnels prévus au théorème fondamental.

(²) *Voir* aux Préliminaires, § 3.

$z = \varphi_{m+n}(z)$ pour laquelle $|\varphi_{m+n}(z)| > 1$ et cette racine est distincte de P, car Δ_{-m} ne contient pas P.

On a ainsi montré que toute aire arbitrairement petite ω entourant un point P de E contient un point de E distinct de P; elle en contient donc une infinité : donc tout point de E est bien limite de points de E.

Ceci montre en outre que E, qui contient sûrement un point au moins, *en contient toujours une infinité dénombrable*. Il est alors permis de parler de *l'ensemble* E′ *dérivé de* E. E′ contient E, c'est ce qu'affirme le corollaire 3° que nous venons de démontrer.

4° Les principes sur lesquels reposent la démonstration précédente prouvent aussi que *tout antécédent d'un point de* E appartient à E : enfin il est évident que E′ est un ensemble *parfait*, car d'une part il contient son dérivé E″, d'autre part, il contient E, et tout point de E étant limite de points de E est limite de points de E′. Donc, E′ est identique à E″, E′ *est parfait*.

Remarque. — Le fait : tout point de E est limite de points de E, est capital, nous l'avons obtenu par une analyse toute naturelle, comme conséquence du théorème fondamental. Voici une nouvelle démonstration directe. Elle utilise le théorème de M. Picard, avec le perfectionnement apporté par M. Landau, dont voici l'énoncé :

α et β *étant deux nombres complexes quelconques* ($\beta \neq 0$), *il existe un nombre* $R(\alpha, \beta)$ *ne dépendant que de* α *et de* β, *tel que toute fonction holomorphe*

$$f(z) = \alpha + \beta z + \ldots$$

dans le cercle $|z| < R$, *prend dans ce cercle la valeur zéro ou la valeur* UN.

Supposons que l'origine soit un point de E et, pour simplifier l'exposition, que ce soit une racine de $z = \varphi(z)$ ou $|\varphi'(z)| > 1$, ce n'est pas là, comme on l'a dit plusieurs fois, restreindre la généralité.

$\varphi(z)$ se développe autour de l'origine sous la forme

$$z_1 = \varphi(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots \quad (a_1 \neq 0).$$

L'itérée d'ordre n de φ a un développement facile à calculer : c'est

$$z_n = \varphi_n(z) = a_1' z + a_2' z^2 + \ldots + a_n' z^n + \ldots$$

Or

$$\frac{\varphi_n(z)}{z} = a_1^n + a_2 a_1^{n-1}(a_1^n - 1)z + \ldots \qquad (|a_1^n| > 1).$$

On est sûr alors que dans un cercle de rayon $R[a_1^n, a_2 a_1^{n-1}(a_1^n - 1)]$, $\frac{\varphi_n(z)}{z}$ prend, si elle est régulière dans ce cercle, en un point distinct de O, la valeur *zéro* ou la valeur *un*.

M. Hurwitz a montré (*voir* Picard, *Traité d'Analyse*, 2e édition, t. 3, p. 377) que

$$R(\alpha, \beta) = 16\frac{1}{|\beta|}\sqrt{|\alpha^2|}\sqrt{|\alpha - 1|}.$$

On peut donner des expressions plus précises de R, mais celle-là nous suffit. Si l'on calcule avec elle la valeur de R pour $\frac{\varphi_n(z)}{z}$, on trouve une expression qui est de l'ordre de

$$\frac{|a_1^n|^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}}{|a_1|^{2n-1}} = |a_1|^{\frac{n}{6}+1}.$$

c'est-à-dire qui *tend vers zéro quand n grandit indéfiniment*.

La conclusion de tout cela est que dans un cercle de centre O dont le rayon est d'ordre $|a_1|^{\frac{n}{6}+1}$ (rayon arbitrairement petit si n est assez grand), $\frac{\varphi_n(z)}{z}$ a un pôle, ou bien un zéro, ou prend la valeur 1, ailleurs qu'à l'origine.

1° Si $\frac{\varphi_n}{z}$ prend la valeur 1, le théorème est démontré, car en ce point z, on a $\varphi_n = z$. Les seuls cas embarrassants sont ceux où, quel que soit n à partir d'un certain rang, $\frac{\varphi_n}{z}$ prendrait bien les valeurs 0 et ∞, mais pas la valeur 1.

2° Si c'est la valeur zéro, on arrive à la conclusion que O est point-limite de ses propres antécédents et l'on se tire de la difficulté bien aisément par le procédé employé au 3e corollaire : le cercle C, qui est *arbitrairement petit*, contient un antécédent P_{-n} de l'origine qu'on peut entourer d'une aire Δ_{-n} assez petite pour être contenue dans C et pour que son itérée Δ par $\varphi_n(z)$ entourant O soit arbitrairement petite ; comme l'étude locale des environs de O suffit, C étant arbitrairement

petit, à prouver qu'une certaine itérée Δ_i de Δ renferme à son intérieur C, et par suite Δ_{i+1}, on conclut que Δ_{i+1} et par suite C renferment un point de E distinct de O pour lequel

$$z = \varphi_{i+1}(z), \qquad |\varphi_{i+1}'(z)| > 1.$$

3° Enfin, si $\frac{\varphi_1(z)}{z}$ a toujours un pôle dans le cercle C, cela veut dire que O est point-limite pour l'ensemble formé par les antécédents du point à l'infini. Par une homographie convenable, s'il existe un point du plan distinct de O dont les antécédents n'admettent pas O pour point-limite, on enverra ce point à l'infini et la difficulté précédente se trouvera écartée. Il ne serait impossible de la conjurer que si O était point-limite d'antécédents pour tout point du plan. Mais l'origine ayant alors des antécédents distincts d'elle-même, on raisonnerait comme au 2° et le théorème serait encore démontré.

Cette deuxième démonstration n'est pas, *au fond*, différente de la première, surtout si l'on songe que M. Montel a déduit le théorème de Picard-Landau des notions qu'il a introduites sur les familles normales de fonctions. On remarquera le lien étroit qui relie ces deux faits : 1° tout point de E est point-limite de points de E ; 2° tout point de E est point-limite pour ses propres antécédents.

15. *L'ensemble* E′, *dérivé de* E. — Nous avons vu que E′ est parfait.

Tout point P de E′ étant limite de points de E, quelle que soit l'aire arbitrairement petite ω dont on entoure P, il y aura toujours dans ω un point de E, et par suite il y aura au plus deux points du plan (conformément aux premier et deuxième cas de notre théorème fondamental) qui resteront extérieurs à toutes les itérées ω_i de ω.

C'est là une *propriété caractéristique des points de* E′.

THÉORÈME. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point* P *du plan complet jouisse de la propriété fondamentale suivante : quelque petite que soit l'aire* ω *entourant* P, *deux points du plan complet au plus pourront rester extérieurs à toutes ses itérées* ω_i (*cas correspondant aux* 1° *et* 2° *de notre théorème fondamental*), *est que* P *soit un point de* E′.

On a vu que, si P est de E′, la condition était réalisée : la condition est suffisante. Il est visible qu'elle est nécessaire ; en effet, si quel que soit ω entourant un point P, les itérées ω_i de ω recouvrent tout point

du plan complet sauf deux points au plus, il est visible que P est point limite pour l'ensemble des antécédents d'un point *quelconque* du plan (il ne peut y avoir exception que pour deux points du plan, si ce système de deux points est identique à l'ensemble de tous ses antécédents et de tous ses conséquents, ce qui nous ramène aux premier et second cas de notre théorème fondamental). Parmi ces points dont les antécédents admettent P pour un de leurs points limites, se trouve évidemment tout point de E. (On a vu qu'un point de E n'est jamais un des deux points exceptionnels.) P étant limite pour les antécédents d'un point de E est donc de E, puisque, d'une part, tout antécédent d'un point de E est de E et, d'autre part, E est parfait.

P étant donc un point de E′ et $\mathfrak{D}$ une aire arbitrairement petite qui l'entoure, Δ étant d'autre part une aire quelconque du plan complet, uniquement assujettie à ne contenir ni à son intérieur ni sur sa frontière un ou deux points particuliers bien déterminés, quand $\varphi(z)$ est une des fractions visées par le premier ou le second cas du théorème fondamental, Δ pouvant être le plan complet lui-même si $\varphi(z)$ est générale, il existe un indice i tel que toutes les itérées de $\mathfrak{D}$, d'indice $\geqq i$, recouvrent complètement Δ (¹).

14. *Corollaires.* — 1° Tout point de E′ est point limite pour l'ensemble des antécédents successifs d'un point quelconque du plan complet, exception faite peut-être pour deux points au plus qui coïncident chacun avec ses propres antécédents ou chacun avec tous les antécédents d'ordre 1 de l'autre. (Cas 1° et 2° du théorème fondamental.)

Dans un autre langage, il existe au plus deux valeurs complexes, finies ou infinies, qu'aucune des fonctions

$$\varphi(z), \quad \varphi[\varphi(z)], \quad \ldots \quad \varphi_n(z), \quad \ldots$$

(¹) En particulier, tout point de E ne pouvant être un des deux points exceptionnels prévus au théorème précédent, sera *intérieur à une* $\mathfrak{D}_i$, et comme l'ensemble E est parfait (et borné si l'on se place sur la sphère de Riemann), on pourra même trouver un nombre fini de $\mathfrak{D}_i$, ou même simplement une $\mathfrak{D}_i$ d'indice assez élevé i_0 qui contienne *à son intérieur tout l'ensemble* E, ainsi que toutes les $\mathfrak{D}_i$ d'indice $i > i_0$. Cela tient à ce que, quelque petite que soit l'aire $\mathfrak{D}$ entourant P de E′, elle contient une petite aire circulaire entourant un point de E, et pour les itérées de cette petite aire, qui sont toutes *intérieures* aux itérées de même rang de $\mathfrak{D}$, la propriété précédente a déjà été reconnue exacte.

ne puisse prendre dans un voisinage donné $\mathfrak{D}$ de P arbitrairement petit.

2° Tous les antécédents successifs d'un point de E′ et tous ses conséquents appartiennent à E′; car les uns et les autres possèdent, comme le point de E′ considéré, la propriété caractéristique énoncée au théorème ci-dessus (¹).

On peut dire que E′ est un ensemble parfait qui reste invariant par la transformation simplement rationnelle du plan $z_1 = \varphi(z)$ et par les k branches de la transformation inverse.

3° Les antécédents successifs d'un point quelconque P de E′ forment un ensemble partout dense dans E′ (²), c'est-à-dire que toute aire contenant des points de E′ contient des antécédents du point considéré P. C'est évident puisque, aucun point P de E′ ne pouvant être un des deux points exceptionnels prévus au théorème précédent, tout point de E′ est limite pour les antécédents du point considéré P.

4° *En un point* P *de* E′, *il est impossible que la famille* $\varphi(z)$, $\varphi_2(z), \ldots, \varphi_n(z), \ldots$ *ou une famille quelconque formée d'une infinité de* φ_i *soit normale.*

En effet, quelque petit que soit le cercle C de centre P, il existe un indice i tel que toutes les aires C_j itérées de C d'indice $j \geq i$ recouvrent

---

(¹) De la note (¹) (page précédente) il résulte, en tenant compte de ce second corollaire, que, si l'on considère une aire arbitrairement petite $\mathfrak{D}$ (par exemple un cercle de centre O entourant un point P de E′) et la partie $\mathcal{E}'$ de E′ *intérieure à l'aire* $\mathfrak{D}$, l'itérée $\mathfrak{D}_{i_0}$ de $\mathfrak{D}$ contenant à son intérieur tout l'ensemble E′ :

a. Tout itéré d'ordre i_0 d'un point de $\mathcal{E}'$ est un point de E′ intérieur à $\mathfrak{D}_{i_0}$.

b. Tout point de E′ étant intérieur à $\mathfrak{D}_{i_0}$, aura un antécédent d'ordre i_0 intérieur à $\mathfrak{D}$, cet antécédent sera un point de $\mathcal{E}'$, d'où l'on conclut :

c. Tout point de E′ est contenu dans l'ensemble itéré d'ordre i_0 (et dans tous les itérés d'ordre $i \geq i_0$) de $\mathcal{E}'$.

On peut donc dire qu'*à partir de toute partie arbitrairement petite* $\mathcal{E}'$ *de* E′ *on peut engendrer tout* E′ *à l'aide d'un nombre fini d'itérations successives de* $\mathcal{E}'$, ceci nous sera utile pour discuter la structure de E′, car on peut dire comme conséquence de cette note : *La structure de* E′ *tout entière est la même que celle de toute partie* $\mathcal{E}'$ *de* E′ *formée des points de* E′ *intérieurs à une aire arbitrairement petite du plan qui entoure un point arbitraire de* E′.

(²) Il n'en est pas de même des conséquents de tout point de E′, puisque l'on sait *a priori* que tout point de E ou tout antécédent d'un point de E′ a un nombre *fini* de conséquents successifs.

toute aire Δ fixée à l'avance et uniquement assujettie à la condition de laisser deux points bien déterminés du plan au plus à son *extérieur*. Si la famille considérée était normale en P, ou si une suite infinie quelconque extraite de la suite φ_i était normale en P, on pourrait trouver une suite

$$\varphi_{n_1}(z), \quad \varphi_{n_2}(z), \quad \ldots \quad \varphi_{n_p}(z), \quad \ldots$$

qui, dans C supposé assez petit, tendrait uniformément vers une fonction analytique $f(z)$ qui pourrait être une constante; mais C étant supposé assez petit, à partir d'un certain rang les aires C_{n_p}, $C_{n_{p+1}}$, ... itérées de C seraient voisines de l'aire Γ transformée de C par $f(z)$, et par suite seraient, comme Γ, arbitrairement petites. Ceci contredit le fait que pour tout indice j supérieur ou égal à l'indice i dont il a été question plus haut, C_j recouvre Δ.

5° Dans toute aire ω, arbitrairement petite, entourant un point P de E' il existe deux valeurs complexes (finies ou infinies) au plus que ne puisse prendre aucune des fonctions $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, ..., $\varphi_i(z)$ ou même que ne puisse prendre aucune des fonctions d'une suite infinie extraite de la précédente :

$$\varphi_{n_1}(z), \quad \varphi_{n_2}(z), \quad \ldots \quad \varphi_{n_p}(z), \quad \ldots$$

Car s'il existait trois valeurs complexes distinctes qu'aucune des fonctions

$$\varphi_{n_1}(z), \quad \varphi_{n_2}(z), \quad \ldots \quad \varphi_{n_p}(z), \quad \ldots$$

ne prenne dans ω, cette suite serait *normale dans* ω, et l'on en déduirait de suite que

$$\varphi_{n_1}(z), \quad \varphi_{n_2}(z), \quad \ldots \quad \varphi_{n_p}(z), \quad \ldots$$

serait aussi normale, contrairement au 4e corollaire.

13. *La structure de* E'. — Des exemples simples montrent immédiatement que E' peut être : 1° un ensemble parfait discontinu, ou 2° un ensemble parfait continu linéaire [1], mais rien n'exclut *a priori* la possibilité, pour E' d'avoir des portions qui soient des continus superficiels, des aires.

---

[1] *A priori*, E' peut être à la fois discontinu dans certaines régions et continu linéaire dans d'autres, nous verrons plus loin que cela ne peut être.

A ce titre la proposition suivante est intéressante.

Théorème. — L'ensemble E′ ne peut comprendre des aires que s'il comprend tout le plan complet; en d'autres termes : s'il existe un point du plan complet qui n'appartienne pas à E′, E′ ne peut être qu'un ensemble continu linéaire ou un ensemble parfait discontinu, mais ne comprend certainement aucune aire du plan. Autrement dit encore, dans ce cas, E′ n'a pas de *point intérieur*.

En effet, si A est un point du plan n'appartenant pas à E′, on peut l'entourer d'une petite aire Δ dont aucun point n'est de E′; aucune des antécédentes de Δ ne contient de point de E′; par suite, un point P de E′ ne peut être point limite pour les antécédents d'un point *arbitrairement choisi dans* Δ (¹), que si dans tout cercle de centre P il y a des points n'appartenant pas à E′. Ceci exclut donc la possibilité pour P d'être « point intérieur » de E′, c'est-à-dire d'être centre d'un certain petit cercle dont tous les points sont de E′. Comme nous le verrons par la suite, l'étude locale aux environs des points remarquables du plan déjà signalés par M. Kœnigs permet de fixer certaines régions qui ne contiennent pas de point de E′.

A priori E′ peut donc : 1° être un ensemble parfait discontinu ou continu linéaire (²), ou 2° être identique au plan complet.

(¹) Ceci écarte l'objection au raisonnement actuel que pourrait faire antérieurement l'hypothèse que tous les antécédents de A ne sont qu'en nombre fini, hypothèse qui correspond aux premier et deuxième cas du théorème fondamental, A étant supposé un des deux points exceptionnels dont il est fait mention alors. Nous saurons d'ailleurs plus tard que ces deux points exceptionnels dans les premier et deuxième cas ne sont jamais des points de E′, et qu'on peut les entourer chacun d'une aire ne contenant pas de point de E′; ils forment en effet un groupe périodique limite d'ordre 0, ou bien chacun est point limite à convergence régulière.

(²) Voici une conséquence immédiate de la note (¹) de la page 19 du présent Mémoire : Si dans une région R arbitrairement petite du plan, les points de E′ forment un ensemble partout discontinu, c'est-à-dire « mal enchaîné entre deux quelconques de ces points », E′ tout entier sera *partout discontinu*. En effet, tout point de E′ peut être entouré d'une petite région D, dont une itérée D contient R à son intérieur (car un point de E′ n'est jamais un des deux points exceptionnels qui peuvent échapper à toutes les D). Il y a donc une antécédente R′, d'ordre 1 de R qui est tout entière contenue dans D. Dans D, les points de E′ forment un ensemble mal enchaîné entre deux quelconques de ses points, car si cet ensemble partiel était bien enchaîné entre deux de ses points

16. 1° Voici des exemples simples du premier cas :

1° E′ est ensemble parfait discontinu : Il suffit d'envisager les fractions rationnelles signalées par M. Fatou, dans sa Note des *Comptes rendus* du 15 octobre 1906 : $z_1 = \frac{z^k}{z^k - 2}$, pour lesquelles il démontre que tout point du plan complet n'appartenant pas à un certain ensemble parfait discontinu E′ a des conséquents qui tendent vers l'origine.

[Par la transformation $z = \frac{1}{Z}$, ces fractions se réduisent à des polynomes

$$Z_1 = 2Z^k - 1$$

et le point de convergence pour tout le plan, sauf E′, est le point à l'infini.]

E′ est obtenu par M. Fatou de la façon très simple que voici : Il détermine un cercle C_0 de centre situé à l'origine, dont le rayon ρ se calcule d'après les formules de M. Kœnigs, et tel que, si $|z| < \rho$, on ait

$$|z_1| \leq K|z| \qquad (0 < K < 1).$$

K se détermine connaissant la valeur de $\frac{dz_1}{dz}$ à l'origine, qui est ici nulle. C_0, dans le cas présent, contient les deux points critiques de la fonction algébrique $z(z_1)$ inverse de $z_1 = \varphi(z)$ qui sont $z_1 = 1$

---

son itéré d'ordre i le serait aussi; or, cet itéré d'ordre i contient la portion de E contenue dans R puisque D contient R, qui, par hypothèse, est partout discontinue dans R.

De même, si dans une région R arbitrairement petite du plan, les points de E′ forment un *ensemble continu linéaire*, c'est-à-dire bien enchaîné entre deux quelconques de ses points, E, tout entier, sera bien enchaîné entre deux quelconques de ses points, E′ sera un continu linéaire.

E ne peut donc être partout discontinu dans une région et continu dans d'autres. Il ne peut se composer de deux portions continues sans point commun, mais rien n'empêche *a priori* E′ d'être tel que, dans toute région du plan, il y ait des points de E′ entre lesquels E′ est bien enchaîné, et d'autres entre lesquels E′ soit mal enchaîné; c'est-à-dire que rien n'empêche que dans toute région du plan contenant des points de E′, si petite soit-elle, il y ait des portions de E′ continues et des portions discontinues.

et $z_1 = 0$. Alors si l'on prend les antécédentes successives de C_0, on a successivement k courbes, puis k^2 courbes, ..., k^q courbes, la portion du plan limitée à C_0 contenant O a pour antécédente une portion du plan contenant la précédente et limitée aux k courbes antécédentes de C_0, cette dernière portion a pour antécédente la portion du plan contenant O et limitée aux k^2 antécédentes d'ordre 2 de C_0, etc. Chacune des régions antécédentes l'une de l'autre, ainsi déterminées, contient sa conséquente, et chacune de ses courbes limites délimite une région (ne contenant pas O) où se trouvent k courbes limites de la région antécédente de la région considérée.

Par ce processus, on voit que les courbes antécédentes successives de C_0 ainsi introduites, se rétrécissent indéfiniment dans toutes leurs dimensions. L'ensemble des points n'appartenant à *aucune* des régions envisagées précédemment, qui sont les antécédentes de l'aire du cercle C_0, est un ensemble parfait partout discontinu. Tout point de cet ensemble est point limite pour les antécédents de tout point du plan, sauf l'origine (qui est un point exceptionnel du type signalé au deuxième cas de notre théorème fondamental), c'est évident d'après la définition même de cet ensemble; on reconnaît ainsi que cet ensemble n'est autre que l'ensemble E' relatif à la fraction $z_1 = \frac{z^2}{z^2 + 1}$.

2° E' est un continu linéaire : Il suffit de prendre l'exemple $z_1 = z^2$ qui entre dans le premier cas du théorème fondamental.

Ici l'itérée d'ordre n de z^2 est

$$z = \varphi_n(z) = z^{2^n}.$$

Les racines ζ de $z = \varphi_n(z)$ ont toutes 1 pour module, excepté $z = 0$. Ce sont les racines de

$$z^{2^n - 1} - 1 = 0.$$

En chacune de ces racines, on a

$$\varphi'(\zeta) = 1 \text{ [illegible]}$$

donc

$$|\varphi'(\zeta)| = 1$$

et, par suite,

$$|\varphi_n'(\zeta)| = 1.$$

Les racines de

$$z^{2^n - 1} - 1 = 0 \text{ [illegible]}$$

sont toutes des points de E. Elles sont partout denses sur le cercle $|z| = 1$. E′ *se compose de toute la circonférence* $|z| = 1$.

L'équation $z = \varphi(z)$ admet en outre les racines 0 et ∞ [qui sont les deux points exceptionnels du théorème fondamental (1er cas)], où $|\varphi'(z)|$ est nul. Ce sont respectivement les points-limites des conséquents de tout point de la région du plan limitée par le cercle $|z| = 1$ qui les contient.

3° Nous verrons plus loin quelle complexité peut offrir l'ensemble E′ dans des cas où il est linéaire. Nous verrons en particulier qu'il pourra diviser le plan en une *infinité de régions*, c'est-à-dire qu'il sera possible de donner des fractions $\varphi(z)$ simples pour lesquelles il existe une infinité de régions distinctes du plan limitées chacune par une partie de E′.

17. La question se pose de savoir si, effectivement, E peut comprendre le plan complet tout entier, et de répondre à cette question soit par la négative, soit par l'affirmative, en donnant un exemple de fonction rationnelle $\varphi(z)$ pour laquelle tout point du plan soit de E′. Nous verrons plus loin qu'une telle fonction n'est ni un polynome ni une fraction se ramenant au premier cas de notre théorème fondamental.

Montrons dès maintenant comment, par analogie avec une question connue et bien simple, on peut penser que E′ pourra peut-être compter tout le plan.

E′ a été défini par sa propriété caractéristique : *Tout point de* E *est point limite pour les antécédents d'un point quelconque du plan complet, sauf peut-être pour deux points au plus.*

Or, prendre les antécédents successifs d'un point z du plan, c'est résoudre l'équation

$$\varphi(z_1) = z \quad \text{qui donne } k \text{ antécédents } z_1 \text{ (d'ordre 1)}$$
$$\varphi(z_2) = z_1 \quad \text{[illegible]} \quad k^2 \quad \text{[illegible]} \quad z_2 \text{ (d'ordre 2)}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ce problème est un cas particulier du suivant : $f(z, z_1) = 0$ étant une relation algébrique entre z et z_1 (f est un polynome en z et z_1), z est dit *antécédent* de z_1 ; z_{-1} défini par $f(z_{-1}, z) = 0$ sera antécédent de z, etc. On définit ainsi les antécédents successifs de z et la question est d'examiner l'ensemble dérivé de l'ensemble formé par ces

antécédents. Or il est facile de voir que, pour certains choix de f, *cet ensemble dérivé se compose du plan tout entier*, quel que soit le point z envisagé.

En effet, si

$$z' = S_1(z), \qquad z' = S_2(z), \qquad \ldots, \qquad z' = S_n(z)$$

sont les substitutions fondamentales d'un *groupe automorphe improprement discontinu dans tout le plan* (groupe de Picard par exemple, où ces substitutions sont

$$z' = z + 1, \qquad z' = z + i, \qquad z' = -\frac{1}{z}, \qquad z' = -\frac{i}{1}\Big)$$

en prenant

$$f(z, z_1) = [z_1 - S_1(z)][z_1 - S_2(z)] \ldots [z_1 - S_n(z)] = 0,$$

les antécédents successifs d'un point quelconque z_1 du plan ne seront pas autre chose évidemment que tous les homologues de z_1 dans le groupe considéré. Le groupe étant improprement discontinu quel que soit z_1 dans tout le plan, ces homologues seront denses partout dans le plan; l'ensemble dérivé de l'ensemble de ces homologues se compose *de tout le plan complet*, quel que soit le point z_1 dont on est parti.

La question qui nous occupe : détermination de E′ pour une relation

$$z_1 = \varphi(z) = 0,$$

φ étant rationnel en z, et la question de la détermination des points du plan, autour desquels un groupe automorphe cesse d'être proprement discontinu, sont donc deux cas particuliers de la question plus générale suivante : détermination de l'ensemble dérivé pour l'ensemble des antécédents d'un point quelconque z_1 du plan, ces antécédents étant définis de proche en proche par la relation algébrique

$$f(z, z_1) = 0.$$

A ce titre, puisque le deuxième cas particulier (groupe automorphe) donne facilement des exemples où E′ est identique au plan complet, on peut tout au moins penser qu'il n'y a pas de raison *a priori* pour que la question qui nous occupe dans ce Mémoire (itération des fonctions rationnelles) ne comporte pas de tels exemples, et l'analogie

signalée serait plutôt une présomption en faveur de l'affirmative [1]. Je profite de l'occasion pour signaler d'autres analogies entre la question de l'itération et celle des groupes automorphes.

18. Si l'on prend pour $S_1(z), \ldots, S_n(z)$ les substitutions d'un groupe fuchsien à cercle fondamental, il est clair que, pour tout point du plan, l'ensemble dérivé de l'ensemble des antécédents sera composé de tous les points du cercle fondamental : E′ se compose de toute la circonférence conservée par le groupe. On a trouvé un résultat analogue dans le deuxième exemple signalé plus haut ($z_1 = z^2$).

Si les $S_i(z)$ sont les substitutions fondamentales d'un groupe kleinéen de l'espèce de ceux qui conservent l'intérieur d'une courbe continue pourvue de tangente en une infinité de points et dépourvue de cercle osculateur en ces points (courbe signalée par Poincaré dans son Mémoire sur les groupes kleinéens), E′ se composera de tous les points de cette courbe. Effectivement, nous donnerons plus tard des exemples de fonctions rationnelles pour lesquelles E′ se compose de tous les points d'une courbe de Jordan sans tangente.

Enfin, si les $S_i(z)$ sont, par exemple, les substitutions fondamentales d'un groupe fuchsien pour lequel le polygone fondamental a des côtés de la deuxième sorte, ce qui conduit à des fonctions fuchsiennes définies *dans tout le plan*, sauf aux points d'un ensemble parfait discontinu E situé sur le cercle fondamental, on a l'analogue du premier exemple signalé $\left[z_1 = \frac{z}{z-1}\right]$ où l'ensemble était parfait

---

[1] Depuis le dépôt de ce Mémoire, M. Lattès a fait connaître dans une Note des *Comptes rendus* (7 janvier 1918) un exemple intéressant de ce cas.

En posant

$$z = \frac{1}{2}\,2^n u \qquad (z = 0)$$

$$z = \frac{1}{2}\,2^n u \qquad (z = 0)$$

on a

$$z = \frac{[illegible]}{[illegible]}.$$

Tous les points u [illegible] pour lesquels [illegible] ont des développements *périodiques simples* dans le système de base 2 avec n chiffres à la période, sont tels que $2^n u = u$ à une période près et correspondent à des racines de [illegible] pour lesquelles $\varphi'_n(z) = 2^n$. Ce sont des points de E; les u précédents étant denses dans le parallélogramme des périodes, E est dense dans tout le plan. E est identique au plan complet.

discontinu. On aura facilement un exemple de tels $S_i(z)$ en prenant trois cercles extérieurs deux à deux C_1, C_2, C_3, considérant l'aire qui leur est extérieure, la réfléchissant sur un des cercles, C_1 par exemple, et considérant l'ensemble de l'aire primitive et de son image comme le domaine fondamental d'un groupe fuchsien, en faisant se correspondre dans le domaine fondamental obtenu C_2 et son image C_2, C_3 et C_3. Si les $S_i(z)$ sont les substitutions fondamentales d'un groupe kleinéen donnant des fonctions kleinéennes définies dans tout le plan, sauf aux points d'un ensemble parfait discontinu (groupe Schottrky, par exemple), on aura encore une foule d'exemples où E′ est parfait discontinu, mais n'a pas ses points sur un cercle fondamental.

J'ai un peu insisté sur les rapprochements entre l'ensemble E′ relatif à l'itération d'une fraction rationnelle et l'ensemble $\mathcal{E}'$ des points où un groupe automorphe cesse d'être proprement discontinu; car il m'a paru que les deux questions que ces deux ensembles dominent (itération d'une fraction rationnelle, et étude d'un groupe automorphe) devaient s'éclairer l'une l'autre, toutes deux étant cas particuliers de la question plus générale relative à la fonction algébrique $z(z_1)$ définie par $f(z, z_1) = 0$ que j'ai signalée plus haut. Dans ces deux cas particuliers, tout point de E′ (ou de $\mathcal{E}'$) est point limite pour l'ensemble des antécédents (ou des homologues) d'un point *quelconque du plan*, et cette propriété caractéristique de E′ comme de $\mathcal{E}'$ est trop importante pour que nous n'ayons pas mis en lumière les liens étroits qu'elle établit entre les deux questions signalées.

Je bornerai là cette digression pour ne pas m'écarter trop du sujet propre de ce Mémoire, qui est l'étude de l'itération d'une fraction rationnelle.

19. Sans nous attarder à la question de savoir si, effectivement, E′ peut, pour certaines fractions rationnelles $\varphi(z)$, se composer du plan tout entier, nous poursuivrons plus avant l'étude des cas où l'on a reconnu que E′ n'est pas superficiel. On reconnaît le plus souvent cet par l'étude locale des environs d'un point limite $[z = \varphi(z), |\varphi'(z)| < 1]$, ou d'un groupe circulaire limite.

Montrons, en effet, que si l'on reconnaît pour la fraction $z_1 = \varphi(z)$ l'existence d'un point limite à convergence régulière, c'est-à-dire d'un point A racine de

$$z = \varphi(z), \quad \text{avec} \quad |\varphi'(z)| < 1$$

on peut fixer un voisinage de ce point dans lequel *aucun* des

équations

$$z = \varphi_i(z) \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty)$$

n'a de racine distincte de A (¹).

On sait, en effet, que si ζ est l'affixe de A, on peut trouver un nombre ρ tel que si

$$|z - \zeta| < \rho$$

on ait

$$|z_1 - \zeta| < H \cdot \rho,$$

H étant compris entre 0 et 1.

De là s'ensuit

$$|z - \zeta| < H \cdot \rho$$

z décrivant le cercle C de centre A de rayon ρ, z_1 décrira une

Fig. 11.

courbe C_1 sans point commun avec C, toute intérieure à C. Si z décrit l'aire D intérieure à C, z_1 décrit l'aire D_1 intérieure à C_1. Si $\varphi'(\zeta) \neq 0$, on peut supposer ρ assez petit pour que, l'aire D étant simple et à un seul feuillet, l'aire D_1 décrite par z_1 soit aussi à un seul feuillet; il est clair, alors, que les itérées successives de D seront emboîtées chacune dans la précédente et tendront vers A dans toutes leurs dimensions.

Si $\varphi'(\zeta) = 0$, alors l'aire décrite par z_i sera à 2 feuillets, quel que soit i, et admettra A pour point de ramification; mais ceci n'a pas d'importance, l'essentiel est que, *dans tous les cas*, z décrivant le cercle C dans le sens positif autour de A, $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, décrivent

(¹) Tout polynome admet le point à l'infini comme point limite à convergence régulière, on peut s'en assurer par une homographie arbitraire qui ramène à distance finie le point à l'infini. Pour aucun polynome E' ne peut donc être superficiel.

tous des courbes *complètement intérieures à* C. Car alors, ainsi qu'on l'a indiqué dans les préliminaires, la variation de l'argument de $z - z_i$ lorsque z décrit C est nécessairement égale à 2π comme la variation de l'argument de $z - \zeta$, d'où il suit que, dans l'aire D, les équations

$$z - \varphi_n(z) = 0 \qquad \text{pour} \qquad n = 1, 2, \ldots, \infty$$

n'ont d'autre racine que ζ.

L'ensemble E se composant de points qui sont racines de telles équations, il est visible que aucun point de E ni de E′ ne figure dans l'aire D. E′ n'est alors sûrement pas superficiel.

La démonstration, pour un groupe limite $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{p-1}$ provenant des racines de

$$z - \varphi_p(z), \qquad \zeta_1 = \varphi(\zeta_1), \ldots, \qquad \zeta_{p-1} = \varphi(\zeta_{p-1}), \qquad \zeta = \varphi(\zeta_p),$$
$$\varphi_p'(\zeta_1) = \varphi'(\zeta_1)\,\varphi'(\zeta_2)\ldots\varphi'(\zeta_{p-1})$$

est à peine différente [1]. Comme l'a montré M. Kœnigs, chacun des ζ_i peut être entouré d'un cercle C_i de rayon ρ_i tel que, si z est intérieur à un C_i, ses itérés tombent respectivement dans les cercles C suivants, z_p revenant tomber dans C_i de telle façon que $|z - \zeta_i| < \rho$ entraîne $|z_p - \zeta_i| < H\rho$, H étant < 1. On peut toujours supposer que les C_i sont extérieurs deux à deux et assez petits; alors, si z décrit C, $z_1, z_2, \ldots, z_{p-1}$ décrivent des courbes extérieures à C et respectivement voisines de $\zeta_1, \ldots, \zeta_p, \ldots$, donc la variation de l'argument de $z - z_i$ ($i = 1, 2, \ldots, p, \ldots$) le long de C est nulle.

On voit immédiatement qu'il en sera de même quel que soit i, sauf pour les valeurs de i multiples de p; la variation de $\arg(z - z_i)$ sera toujours nulle le long de C si i n'est pas multiple de p; elle sera égale à 2π si i est multiple de p. On conclut que, dans l'aire D limitée par C, les équations

$$z - \varphi_n(z) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty)$$

n'ont pas de racine si n n'est pas multiple de p, et n'ont qu'une racine (qui est ζ) si n est multiple de p. Le même raisonnement vaut pour

---

[1] On peut toujours supposer que tous les points du groupe sont à distance finie, sans restreindre la généralité.

les aires $D_1, D_2, \ldots, D_{p-1}$ limitées par les cercles $C_1, C_2, \ldots, C_{p-1}$ [1].

En rapprochant ce que nous venons de dire du troisième corollaire de notre théorème fondamental, on peut dire : « Dans l'ensemble des racines des équations

$$z = \varphi_n(z) \qquad n = 1, 2, \ldots, \infty,$$

» 1° Si une racine ζ rend $|\varphi'(\zeta)| < 1$, elle est isolée dans l'ensemble;

» 2° Si une racine ζ rend $|\varphi'(\zeta)| > 1$, elle est limite de points de l'ensemble } et le troisième corollaire dit même qu'elle est limite de racines d'équations $z = \varphi(z)$ pour lesquelles $|\varphi'(z)| > 1$. »

Ainsi se distinguent nettement les points de E des points limites à convergence régulière ou des groupes circulaires limites.

20. Il peut arriver aussi que des propriétés particulières de la fraction $\varphi(z)$ considérée permettent d'énoncer des propriétés de l'ensemble E′ et, en particulier, de reconnaître de suite qu'il n'est pas superficiel, c'est le cas des fractions qui conservent l'intérieur et la circonférence d'un cercle fondamental et que M. Fatou a signalées dans une Note des *Comptes rendus* (21 mai 1917). On peut toujours supposer que ce cercle C est le cercle $|z| \leqq 1$; alors, pour $|z| < 1$, on a $|\varphi(z)| < 1$, et pour $|z| = 1$ on a $|\varphi(z)| = 1$. [M. Fatou a donné la forme nécessaire des $\varphi(z)$ jouissant de cette propriété en ramenant le cercle au demi-plan analytique supérieur, par une transformation homographique.] $\varphi(z)$ est supposée de degré k. On voit qu'à deux points z et z' symétriques par rapport au cercle C correspondent deux points $\varphi(z)$ et $\varphi(z')$ symétriques par rapport au cercle. La fonction algébrique inverse de $\varphi(z)$ a, en général, $k-1$ points critiques intérieurs à C, et $(k-1)$ autres points critiques symétriques des premiers par rapport à C. Si l'on considère la surface de Riemann R relative à cette fonction algébrique, la circonférence $|z| = 1$ découpera dans ses k feuillets une aire S simplement connexe à k feuillets contenant O et

---

[1] Pour toute fraction du type correspondant au premier cas de notre théorème fondamental, c'est-à-dire pouvant par homographie se ramener à

$$Z_1 = a + \frac{1}{Z - a},$$

le point a et le point à l'infini (c'est-à-dire les deux points exceptionnels du théorème) forment un groupe circulaire limite d'ordre 2.

limitée à la circonférence $|z| = 1$ parcourue k fois. La fonction algébrique $z = \psi(z_1)$ inverse de $\varphi(z)$ donne une *représentation conforme* sur l'intérieur du cercle C de l'intérieur de la surface S à k feuillets précédente; par la même fonction, la portion de la surface de Riemann R considérée *extérieure à* $|z| = 1$ se trouve représentée de façon conforme sur l'extérieur du cercle $|z| = 1$. En définitive $z = \psi(z_1)$ représente, conformément sur le plan complexe des z, la surface de Riemann R, complétée par les k points à l'infini des k feuillets, qui est comme on sait, fermée et de *genre zéro*. Si z parcourt C dans le sens positif une fois, $z_1 = \varphi(z)$ *parcourra* C *toujours dans le sens positif et k fois* d'où il suit facilement que, sur C, se trouvent $k - 1$ racines au moins de l'équation $z = \varphi(z)$, et, s'il y en a plus de $k - 1$ il y en a $k + 1$, c'est-à-dire que toutes sont sur C.

S'il y en a effectivement $k + 1$, on verra qu'il y aura sur C toutes les racines des équations $z = \varphi_n(z)$ pour $n = 1, 2, \ldots, \infty$.

En effet, z_2 décrit C dans le sens positif k^2 fois, z_3 le décrit k^3 fois. Chacune des équations $z = \varphi_n(z)$ a sur C au moins $k^n + 1$ racines. Elle en a en tout $k^n + 1$. Il ne peut en exister deux hors de C que si chacune est racine de $z = \varphi(z)$, ce qui est impossible puisque $z = \varphi(z)$ a ses $k + 1$ racines sur C, ou si les deux racines considérées forment un groupe circulaire fourni par $z = \varphi_2(z)$, mais on voit immédiatement que ces deux racines devant être symétriques l'une de l'autre par rapport à C, l'hypothèse actuelle est impossible à accepter, car la transformée $\varphi(z)$ de la racine intérieure à C serait ζ, extérieure à C, ce qui par hypothèse, est impossible.

Conclusion. — Ou bien toutes les équations $z = \varphi_n(z)$, $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ ont leurs racines sur C; ou bien l'équation $z = \varphi(z)$ a deux racines, symétriques [1] par rapport à C, non situées sur C, et toutes ses autres racines ainsi que toutes les autres racines des $z = \varphi_n(z)$ $(n = 2, 3, \ldots, \infty)$ sont sur C.

La donnée du cercle fondamental permet donc d'affirmer immédiatement que E′ n'est pas superficiel. M. Fatou a énoncé dans sa Note que, si toutes les racines sont sur le cercle C, il peut arriver qu'elles y forment un ensemble dont le dérivé (qui comprend E′ évidemment) soit parfait discontinu, ou soit composé de C tout entier.

---

[1] Il peut arriver que ces deux racines viennent à se confondre sur C; elles vérifient alors $z = \varphi(z) = 0$ et forment une racine double de $z = \varphi(z) = 0$, mais c'est là un cas particulier.

21. Si $z = \varphi(z)$ admet deux racines symétriques par rapport à C, non situées sur C, on peut, à une homographie auxiliaire près, supposer que ces racines sont o et ∞. Alors $\varphi(z)$ est telle que

$$\varphi(0) = 0; \quad |\varphi(z)| < 1 \text{ si } |z| < 1; \quad |\varphi(z)| = 1 \text{ si } |z| = 1;$$
$$|\varphi(z)| > 1 \text{ si } |z| > 1; \quad \varphi(\infty) = \infty.$$

Le lemme de Schwarz rappelé dans les Préliminaires (§ 5) prouve alors, $\varphi(z)$ n'étant pas linéaire, que, pour $|z| < 1$, on a

$$|\varphi(z)| < |z| \quad (1)$$

sans égalité possible et cela prouve qu'à l'origine on a $|\varphi'(0)| < 1$ sans égalité possible puisqu'un petit cercle γ de centre O se transforme, par $\varphi(z)$, en une courbe intérieure à γ (*voir* les Préliminaires).

L'origine est un point limite à convergence régulière, et l'on voit qu'il en est de même pour le point à l'infini.

Fig.

Il est facile de montrer que, dans l'hypothèse actuelle, *en tout point de* C *on a* $|\varphi(z)| > 1$ (2).

En effet, pour $|z| = 1$,

$$|\varphi(z)| = 1$$

et pour $|z| < 1$,

$$|\varphi(z)| < |z|.$$

---

(1) On a, de même, pour $|z| > 1$,

$$|\varphi(z)| > |z|.$$

(2) Cette proposition me paraît un complément très utile à la Note, signalée plus haut, de M. Fatou.

Par suite, tout segment AB normal au cercle $|z| = 1$ est transformé en un arc de courbe A_1B_1 joignant A_1 (sur le cercle $|z| = 1$) à B_1 (intérieur au cercle de rayon OB). Donc, la longueur de l'arc A_1B_1 est toujours *supérieure* à celle de AB, sans égalité possible (¹). Ceci entraîne que $|\varphi'(z)| > 1$ en A (²). D'ailleurs, la courbe Γ $|\varphi(z)| = 1$ étant une courbe algébrique ne pourrait rencontrer C qu'en un nombre fini de points et l'on voit bien aisément qu'en ces points, Γ ne saurait couper C en un point A, ou lui être tangente, ou avoir un point multiple en A sans aboutir à une contradiction résultant de l'un ou de l'autre des faits suivants : 1° aux environs de A point commun, à C et Γ, il y aurait sur le rayon OA ou sur son prolongement, un segment AB sur lequel $|\varphi'(z)|$ serait < 1, sauf en A, et à ce segment AB ne pourrait correspondre un arc A_1B_1 de longueur supérieure à celle du segment AB lui-même; 2° ou bien il y aurait sur C, aux environs de A, des points où $|\varphi(z)| < 1$.

Les figures *a* et *b* montrent l'impossibilité pour Γ de couper C en un point simple A, la région voisine de A hachurée est celle où $|\varphi'(z)| < 1$. *c* montre l'impossibilité pour Γ de toucher C et *d* l'impossibilité pour Γ d'avoir un point double (nécessairement à tangentes rectangulaires) en un point de Γ à cause du premier ou du deuxième fait précédent.

Donc, en chaque point de C $|\varphi(z)| > 1$. Toutes les racines de $z = \varphi_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ situées sur C rendent donc $|\varphi_n(z)| > 1$. Elles sont donc de E. Il est aisé de montrer *qu'elles sont partout denses sur* C.

En effet, sur C on a

$$|\varphi'(z)| > M > 1,$$

M n'étant pas égal à un.

Si z décrit un arc quelconque *ab* de C, son itéré z_1 décrira un

---

(¹) De même à tout segment A'B' normal à C et extérieur à C, correspond un arc A_1B_1 toujours $> A'B'$.

(²) En effet, on a

$$\text{arc}\, A_1B_1 = \int_A^B |\varphi'(z)|\,|dz|$$

et si en A $|\varphi'(z)|$ était < 1, il serait < 1 sur un certain segment AB de OA et l'on aurait

$$\text{arc}\, A_1B_1 < \overline{AB}.$$

arc $a_1 b_1$, dans le même sens que ab, qui sera $> M \times (\text{arc } ab)$. z_2 décrira un arc

$$a_2 b_2 > M^2 (\text{arc } ab) \ldots.$$

Les arcs a_i, b_i grandissent indéfiniment. Il existe un itéré z_n qui

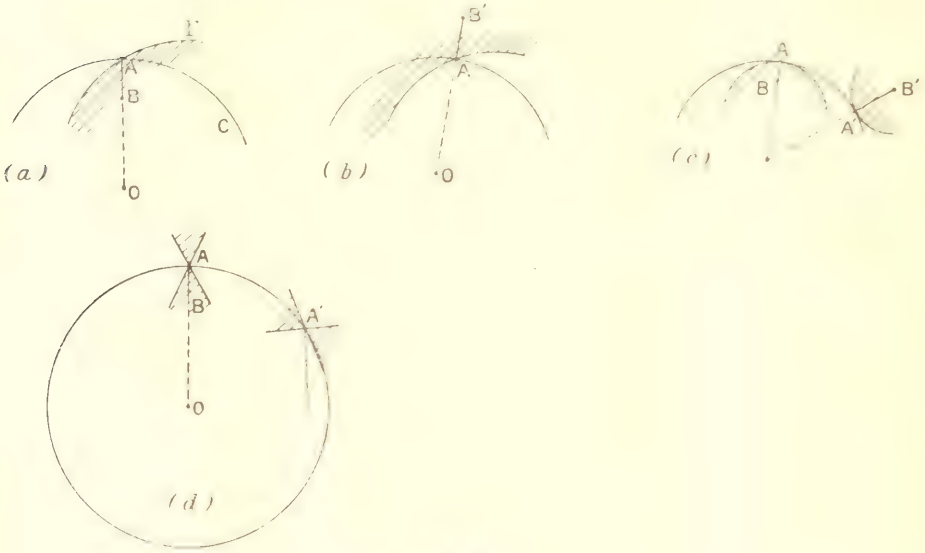


Fig. 14.

décrit sûrement un arc $a_n b_n$ comprenant autant de circonférences qu'on voudra et qui le décrit dans le sens positif si z décrit ab dans le sens positif : il faut donc évidemment que le point z_n coïncide avec z pour une certaine position de z, c'est-à-dire que $z = \varphi_n(z)$ ait une racine dans l'arc ab. L'arc ab étant quelconque, ceci veut dire que les racines des équations $z - \varphi_n(z) = 0$ sont partout denses dans le cercle C. E' *est identique au cercle* C *tout entier.*

22. *Remarque* [1]. — Si l'on avait considéré, au lieu d'un cercle C,

---

[1] Après le dépôt de ce Mémoire, M. Fatou a démontré dans une Note des *Comptes rendus* (4 février 1918), que Γ *ne pouvait être qu'un cercle*, dès l'instant qu'elle était formée *d'un arc régulier* de *courbe analytique*. Cette remarque n'a donc plus de raison d'être et le lecteur est prié de n'en pas tenir compte.

une courbe analytique simple Γ séparant deux régions qui se transforment chacune en elle-même k fois [1] par $\varphi(z)$, comme l'aire limitée par C se transforme en elle-même k fois, on serait arrivé aux mêmes conclusions que les précédentes. Nous appellerons la courbe *courbe fondamentale* Γ. Ou bien toutes les racines des $z = \varphi_n(z)$ $n = 1, 2, \ldots, \infty$ sont sur Γ, ou bien deux d'entre elles seulement, racines de $z = \varphi(z)$ sont hors de Γ. Dans ce dernier cas, si l'on fait une représentation conforme de l'intérieur [2] de Γ sur l'intérieur de $C(|Z| < 1)$ à l'aide de la fonction $z = f(Z)$ analytique dans Γ et sur Γ (Γ est en effet une courbe analytique *simple* sans singularités) la relation $z_1 = \varphi(z)$ qui fait correspondre z_1 à z dans Γ devient une relation $Z_1 = \Phi(Z)$ qui fait correspondre Z_1 à Z dans C. Φ est analytique dans C et sur C; si Z est sur C, Z_1 est sur C_1. Si l'on fait correspondre une racine de $z = \varphi(z)$ intérieur à Γ à $Z = 0$, alors on a

$$\Phi(0) = 0, \qquad \Phi(|Z|) < 1 \text{ si } |Z| < 1.$$

A un point z_1 intérieur à Γ correspondent k points z; donc à Z_1 intérieur à C correspondent k points Z, $\Phi(Z)$ n'est donc pas linéaire, donc on a pour $|Z| < 1$

$$|\Phi(Z)| < |Z|.$$

Donc, à l'origine, $\Phi'(0) < 1$. De là suit que les points $z = \varphi(z)$ hors de Γ rendent $|\varphi'(z)| < 1$. En effet en ces points

$$\frac{dz}{dz} = \frac{dz_1}{dz} = \frac{dz_1}{dZ_1}\frac{dZ_1}{dZ}\frac{dZ}{dz}$$

et comme $z = z_1$ et $Z = Z_1$ aux points considérés, on a aussi, en ces

---

[1] C'est-à-dire qu'à z intérieur à la courbe correspond un point z_1 intérieur à la courbe et à z_1, k points z distincts en général; si z est sur la courbe, z_1 est sur la courbe. La courbe Γ restant invariante par une infinité de substitutions rationnelles $z_1 = \varphi_n(z)$, doit être de genre *zéro* ou *un*, si elle est algébrique, d'après un théorème de M. Painlevé.

[2] Nous appelons intérieur de Γ une quelconque des deux régions en lesquelles Γ divise le plan complet et, pour fixer les idées, celle qui contient une racine de $z = \varphi(z)$. Nous verrons d'ailleurs plus loin que, dans ce cas, chacune des deux régions contient une de ces racines à son intérieur et que pour ces racines $|\varphi'(z)| < 1$.

points,

$$\frac{dz_1}{dZ_1} = \frac{dz}{dZ}.$$

Donc

$$\frac{dz_1}{dz} = \frac{dZ_1}{dZ} = \Phi'(0).$$

La fonction inverse de $\varphi(z)$ a $k-1$ points critiques (en général) intérieurs à Γ et $k-1$ extérieurs à Γ; sur les k feuillets de sa surface de Riemann Γ découpe une aire simplement connexe à k feuillets, intérieure à Γ, limitée par la courbe Γ, k fois parcourue (¹). De même la fonction inverse de $\Phi(Z)$ a $k-1$ points critiques intérieurs à C; sur les k feuillets de sa surface de Riemann C découpe une aire S à k feuillets, intérieure à C, contenant l'origine, simplement connexe et limitée par C, k fois parcourue.

La fonction $Z = \psi(Z_1)$ inverse de $\Phi(Z)$ réalise donc la représentation conforme sur l'aire simple $|Z| < 1$ de l'aire S (²). Les bords des deux aires en correspondance étant analytiques, cette représentation conforme peut se prolonger analytiquement. Complétons S en lui adjoignant sa symétrique S' par rapport à C et soudant S et S' le long de C parcouru k fois. L'ensemble S + S' fait une surface de Riemann R fermée, à k feuillets, de genre zéro. A deux points Z_1 et Z_1' symétriques par rapport à C, faisons correspondre, d'après le principe des symétries de Schwarz, deux points Z et Z' symétriques par rapport à C; on aura alors réalisé l'application conforme de R sur le plan complet, à l'aide de la fonction $\psi(Z_1)$ et de son prolongement précédent. Mais on sait que la fonction qui réalise l'application d'une surface fermée de genre zéro à k feuillets (Z_1) sur le plan complet de Z est une fonction algébrique $Z = \psi(Z_1)$, fonction inverse d'une fraction rationnelle (³) de degré k.

On voit donc que $Z_1 = \Phi(Z)$ est nécessairement une fonction rationnelle de Z, et c'est une des fonctions rationnelles à cercle fondamental

---

(¹) Cette aire est celle que décrit z lorsque z décrit l'intérieur de Γ.

(²) On sait d'ailleurs qu'à une substitution homographique près qui conserve l'aire $|Z| < 1$, la fonction $\psi(Z_1)$ qui réalise cette application est parfaitement déterminée.

(³) On peut dire aussi en raisonnant directement que Z_1 est une fonction analytique de Z, n'ayant dans le plan complet que des pôles, c'est donc une fonction rationnelle.

conservant l'origine que nous avons considérées plus haut. Aux racines de $Z = \Phi_n(Z)$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ partout denses [1] sur C correspondront par la représentation conforme $z = f(Z)$ des racines de $z = \varphi_n(z)$ partout denses sur Γ, dans le cas où nous nous plaçons : celui où deux des racines de $z = \varphi(z)$ sont hors de Γ, et l'on voit par ce qui précède, que de ces deux racines, l'une est *intérieure* et l'autre *extérieure* à Γ. E', ici encore, est identique à la courbe Γ.

Il peut sembler bizarre *a priori* que la fonction $z = f(Z)$ qui applique conformément l'intérieur de Γ sur l'intérieur de $C(|Z| \leq 1)$ et qui, si Γ n'est pas un cercle, n'est pas linéaire, donne une relation $Z_1 = \Phi(Z)$, transformée de $z_1 = \varphi(z)$ qui soit rationnelle et de même degré k que $z_1 = \varphi(z)$. En effet, la relation $z = f(Z)$ applique non seulement Γ et son intérieur sur l'intérieur de C, mais encore toute une petite bande limitrophe de Γ (extérieure à Γ) sur une petite bande limitrophe de C (extérieure à C), puisque, la courbe Γ étant analytique, l'extension analytique de $z = f(Z)$ au delà de C et Γ se fait par la méthode des symétries de Schwarz.

Fig. 10.

On pourrait être alors tenté de croire que $z = f(Z)$ réalise l'application de tout le plan z sur le plan Z [2], ce qui *n'est sûrement pas vrai* si Γ n'est pas un cercle, car alors $f(Z)$ ne peut être linéaire ; la fonction $f(Z)$ aura un domaine d'existence plus grand que C, mais qui ne *s'étendra sûrement pas sur tout le plan* : on est sûr *d'avance* que, Γ n'étant pas un cercle, l'extension de $f(Z)$ au delà de C *n'est pas*

---

(1) On démontre facilement que si Z et z se correspondent et sont tels que

$$Z = \Phi_n(Z), \qquad z = \varphi_n(z),$$

on a aussi en Z et en z

$$\Phi_n(Z) = \varphi_n(z).$$

(2) D'autant plus que la relation $Z_1 = \Phi(Z)$ transformée de $z_1 = \varphi(z)$ est définie dans tout le plan Z.

possible indéfiniment. Il n'y a plus, dès lors, paradoxe à ce que la relation rationnelle $z_1 = \varphi(z)$ se transforme, par la substitution auxiliaire non linéaire

$$z = f(Z), \quad [z_1 = f(Z_1)],$$

$f(Z)$ n'existant que *dans une partie du plan* Z, en une relation rationnelle $Z_1 = \Phi(Z)$. Si la fonction $z = f(Z)$ réalisant la transformation de $z_1 = \varphi(z)$ en $Z_1 = \Phi(Z)$ était définie dans tout le plan Z, elle *devrait être linéaire.* Mais si elle n'existe que dans une partie du plan Z au delà de laquelle elle n'est plus prolongeable analytiquement, il n'y a nulle nécessité qu'elle soit linéaire.

25. *Étude des régions du plan qui ne contiennent aucun point de* E'. — Soit D une aire quelconque du plan ne contenant aucun point de E'. Il est clair qu'aucune des itérées de D ne contiendra de point de E', car l'hypothèse contraire, E' coïncidant avec tous ses antécédents, nous conduirait à admettre que D contient des points de E'. Il est donc immédiat que dans l'aire D aucune des fonctions de la famille $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \varphi_3(z), \ldots, \varphi_n(z), \ldots$ ne prend une valeur affixe d'un point E'. E' est parfait; il y a donc une infinité de valeurs (ayant la puissance du continu) qu'aucune des φ_i ne saurait prendre dans E'. Il suit de là, d'après les travaux de M. Montel, que la famille des φ_i est *normale dans* D. *De toute suite infinie extraite de la suite des φ_i, on peut extraire une suite qui, dans toute aire intérieure à* D *tende uniformément vers une fonction limite qui est méromorphe dans* D (*comme les φ_n*), *et qui peut être une constante, voire une constante infinie.*

C'est là un résultat primordial pour l'étude de l'itération et en particulier de l'ensemble dérivé de l'ensemble des conséquents d'un point du plan.

Si, en effet, z est un point quelconque intérieur à D, $z_1 = \varphi(z)$, $z_2 = \varphi_2(z), \ldots, z_n = \varphi_n(z), \ldots$ sont ses conséquents successifs. Soit

$$\varphi_{n_1}(z), \quad \varphi_{n_2}(z), \quad \ldots \quad \varphi_{n_p}(z), \quad \ldots$$

une suite infinie extraite des φ_i, qui, dans toute aire intérieure à D, tende vers une fonction limite $f(z)$ méromorphe dans D, qui peut être une constante. Alors z étant un point quelconque intérieur à D, ses conséquents

$$z_{n_1} = \varphi_{n_1}(z), \quad \ldots, \quad z_{n_p} = \varphi_{n_p}(z), \quad \ldots$$

auront un point limite $\zeta = f(z)$ qui sera la valeur en z de la fonction $f(z)$ limite dans D de la suite des $\varphi_{n_i}(z)$.

Lorsque z variera dans toute aire intérieure à D, ζ *pourra rester fixe*, sa valeur pouvant être *infinie;* sinon ζ *dépendra analytiquement de* z, $\zeta(z)$ sera méromorphe dans D (¹). C'est là un résultat particulièrement intéressant et simple. Il est d'ailleurs immédiat que, si l'on connaît une suite particulière

$$\varphi_{n_1}(z), \quad \varphi_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad \varphi_{n_p}(z), \quad \ldots$$

tendant uniformément dans toute aire intérieure à D, vers une fonction méromorphe dans D, ou vers une constante finie ou infinie, on connaît l'allure de *toute la suite* $\varphi(z)$, $\varphi_2(z)$, ..., $\varphi_n(z)$, ... *dans* D. Car bien évidemment, si

$$\varphi_{n_1}(z), \quad \varphi_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad \varphi_{n_p}(z), \quad \ldots$$

tend vers $f(z)$ dans D, la suite

$$\varphi_{n_1+1}(z), \quad \varphi_{n_2+1}(z), \quad \ldots, \quad \varphi_{n_p+1}(z), \quad \ldots$$

tendra uniformément vers $\varphi[f(z)]$ dans D, et généralement

$$\varphi_{n_1+i}(z), \quad \varphi_{n_2+i}(z), \quad \ldots, \quad \varphi_{n_p+i}(z), \quad \ldots$$

tendra uniformément vers $\varphi_i[f(z)]$ dans toute aire intérieure à D, quel que soit i. Il est, d'autre part, évident que toute fonction $\varphi_k(z)$ d'indice $k > n$ figure dans l'une des lignes précédentes, pour une certaine valeur de i.

On peut donc dire, en résumé que, z variant dans D, les points limites de ses conséquents successifs varient analytiquement avec z : ce qu'il faut entendre par là est suffisamment expliqué par les lignes précédentes.

(¹) Si l'on sait seulement que, z étant un point déterminé intérieur à D (z non de E), ζ est point limite d'une suite $z_{n_1}, z_{n_2}, \ldots, z_{n_p}, \ldots$ de conséquents de z, de la suite $\varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}, \ldots, \varphi_{n_p}, \ldots$ normale dans D, on pourra extraire une suite

$$\varphi_{N_1}, \quad \varphi_{N_2}, \quad \ldots \quad \varphi_{N_p}, \quad \ldots$$

qui converge vers une fonction limite méromorphe dans tout D et la valeur de cette fonction au point z ne saurait être différente de ζ, ce qui montre que *tout point limite* ζ pour l'ensemble des conséquents de z dépend analytiquement de z dans D.

D'autre part, on a vu que, en un point quelconque de E, et par suite *dans toute aire contenant un point de* E′, *aucune suite infinie extraite de la suite des* φ_i *ne pouvait être normale;* il s'ensuit donc qu'aucune suite infinie

$$\varphi_m(z), \quad \varphi_n(z), \quad \ldots, \quad \varphi_q(z), \quad \ldots$$

ne peut, dans une aire contenant un point de E′, tendre vers une fonction analytique. On voit donc que z variant dans une telle aire, *aucun point limite pour l'ensemble de conséquents successifs ne pourra dépendre analytiquement de* z *dans toute l'aire.* Les points de E′ apparaissent ainsi comme des points *singuliers essentiels* des *fonctions limites* de la suite des $\varphi_i(z)$. La propriété caractéristique des points de E′ est d'ailleurs, au fond, identique au théorème de M. Picard sur les points singuliers essentiels. C'est pour cela que nous appellerons *points singuliers* de l'itération tous les points de E′.

24. A ce titre, l'importance des points de E′ apparaît comme primordiale, pour *délimiter les régions du plan complet, dans chacune desquelles l'allure de la suite des fonctions* $\varphi_i(z)$ *est toujours la même.*

Voici ce qu'il faut entendre par là :

Considérons une région du plan, *d'un seul tenant, qui n'aura pour points frontières que des points de* E′. On peut en définir une à partir de tout point A du plan n'appartenant pas à E′, par la méthode de prolongement analytique : elle sera d'un seul tenant, et limitée uniquement par des points de E′, si on la définit *l'ensemble des points qu'on peut joindre à* A *par une ligne simple dont aucun point n'est de* E′. Appelons R cette région, aucun de ses points intérieurs n'est de E′. Elle peut être simplement connexe dans certains cas, si E est identique à une ligne simple fermée (par exemple, l'intérieur du cercle $|z| = 1$ relativement à l'itération de $z_1 = z^2$ est une région R); elle peut aussi être multiplement connexe, voire d'un ordre de connexion infini [1], si E′ est un ensemble parfait discontinu dans tout le

---

[1] A ce point de vue, on peut faire une remarque intéressante. Si l'on a reconnu que *dans une petite aire du plan* les points de E′ forment un ensemble bien enchaîné entre deux quelconques de ses points, on sait que E′ tout entier est un continu linéaire. Alors, toute région R du plan, d'un seul tenant, dont la frontière est formée par E′ ou partie de E′ est nécessairement *simplement connexe*, car l'hypothèse contraire impliquerait l'existence d'une ligne L simple

plan. Il peut (comme dans les deux exemples précédents) n'y avoir qu'un nombre fini de régions R dans tout le plan: *il peut aussi en exister une infinité*, et nous en verrons plus loin des exemples bien simples.

Quoi qu'il en soit, il est certain que dans toute aire D intérieure à R la suite des φ_i est normale. Si donc, par un moyen quelconque, on a reconnu qu'une suite partielle

$$\varphi_{n_1}(z), \quad \varphi_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad \varphi_{n_p}(z), \quad \ldots$$

tendrait, quel que soit z à l'intérieur, d'une aire D (d'ailleurs arbitrairement petite), toute entière située dans R, vers une fonction-limite $f(z)$, méromorphe dans D, on peut affirmer que, quelle que soit l'aire Δ intérieure à R qu'on envisage, la suite

$$\varphi_{n_1}(z), \quad \varphi_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad \varphi_{n_p}(z), \quad \ldots$$

tendra *uniformément vers une fonction-limite $f(z)$ méromorphe dans tout Δ*. Il suffit, pour s'en convaincre, de considérer des aires emboîtées les unes dans les autres contenant toutes D à leur intérieur, et ayant pour limite R. Toute aire Δ intérieure à R peut être ainsi enfermée dans une aire Δ' intérieure à R et contenant D à son intérieur. Il est clair maintenant que, d'une part, la suite des

$$\varphi_{n_1}(z), \quad \varphi_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad \varphi_{n_p}(z), \quad \ldots$$

étant normale dans Δ', d'autre part cette suite convergeant uniformément vers une fonction méromorphe $f(z)$ (ou une constante finie ou infinie) dans une aire D intérieure à Δ', *cette suite tendra uniformément vers une fonction méromorphe $f(z)$ dans tout Δ'* [1].

Dire que dans tout R l'allure de la suite des $\varphi_n(z)$, $\varphi_2(z)$, ..., $\varphi_n(z)$, ... est la même, c'est dire qu'une suite partielle extraite de

---

fermée *dont tous les points sont intérieurs à* R, et telle que chacune des deux régions en lesquelles L divise le plan complet contiendrait à son intérieur des points de E. E' ne serait donc pas un ensemble d'un seul tenant, contrairement à l'hypothèse, puisqu'un point de E' intérieur à L et un point de E' extérieur ne sauraient être bien enchaînés dans E', tous les points de L étant à une distance de E' $\geq \varepsilon$, ε étant un nombre positif fixe non nul.

[1] Je m'appuie ici sur le théorème suivant de M. Montel (*Sur les familles de fonctions analytiques* (*Annales de l'École Normale*, 1912, p. 354)):

cette suite converge dans toute aire intérieure à R ou ne converge dans *aucune de ces aires*.

C'est de cette façon qu'on peut dire que *l'ensemble parfait* E′ *délimite les diverses régions de convergence du plan : dans toute région d'un seul tenant que délimite* E′, *les caractères de convergence des diverses suites infinies extraites de la suite* $\varphi(z)$, $\varphi_2(z)$, ..., $\varphi_n(z)$, ... *sont les mêmes*.

23. Le théorème précédent fait le véritable pont entre l'étude générale de l'itération dans tout plan et l'étude locale, seule entreprise jusqu'à ce jour. L'étude locale nous apprend, par exemple, que si l'on trouve un point ζ racine de $z = \varphi(z)$ pour lequel $|\varphi'(\zeta)| < 1$, on peut déterminer un cercle C de centre ζ dans lequel :

1° Il n'existe aucun point de E′ :

2° Quel que soit z, ses conséquents successifs z_1, z_2, ..., z_n, ... admettent ζ et ζ seul pour point-limite.

Le théorème précédent nous donne aussitôt un résultat plus général :

1° ζ est intérieur à une région R, d'un seul tenant, limitée uniquement par des points de E′ ;

2° C est intérieur à cette région R, et, dans tout C, la suite $\varphi(z)$, $\varphi_2(z)$, ..., $\varphi_n(z)$, ... tend uniformément vers la constante ζ ;

3° Il s'ensuit donc que, quel que soit z dans R, la suite $\varphi(z)$, $\varphi_2(z)$, ..., $\varphi_n(z)$, ... tendra vers ζ ; les conséquents successifs d'un point quelconque z de R auront ζ et ζ seul pour point-limite.

A ce titre, nous dirons que R est le *domaine de convergence immédiat* du point-limite ζ. *Immédiat* rappelle que R est d'un seul tenant avec ζ. Sa frontière est formée uniquement de points de E′, chacun de ces points-frontières n'a pour conséquents que des points de E′ qui n'admettent pas ζ pour point-limite.

Soit une suite infinie de fonctions $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, \infty)$ *holomorphes dans* D *et appartenant à une famille normale dans* D.

1° *Si la suite converge en une infinité de points intérieurs dans leur ensemble à* D, *elle converge dans tout* D.

2° *Si la suite converge dans* D, *la convergence est uniforme dans l'intérieur de* D [a].

[a] Il n'y a qu'à supposer qu'on a envoyé un point P de E′ à l'infini pour que, tous les pôles des φ_i étant antécédents de P, soient de E′, c'est-à-dire que tous les φ_i soient holomorphes dans R.

Des considérations toutes analogues s'appliquent à un point ζ racine de $z = \varphi_n(z)$ pour lequel $|\varphi'_n(\zeta)| < 1$ et aux points $\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$ qui forment avec lui un groupe circulaire limite.

26. Voici des applications immédiates de cet important théorème :

1° Si E′ est un *ensemble partout discontinu* [1], il n'y a qu'une région R composée de tout le plan, sauf E′; il ne peut donc exister qu'un point-limite à convergence régulière

$$z = \varphi(z), \qquad |\varphi'(z)| < 1$$

mais jamais deux points limites distincts, à convergence régulière, ni un groupe circulaire limite [2].

Le point limite à convergence régulière, si l'on reconnaît son existence, aura pour domaine de convergence tout le plan sauf E′.

Ceci s'applique, en particulier, aux fractions rationnelles à cercle fondamental si E′ est partout discontinu.

2° Pour les fractions à cercle fondamental C qui admettent deux racines $z = \varphi(z)$ symétriques par rapport à C, on a vu qu'en chacune de ces racines on avait $|\varphi'(\zeta)| < 1$; ces racines sont des points limites à convergence régulière. E′ est identique au cercle C; le domaine de convergence pour chacun des deux points limites se compose de la région du plan, limitée par C, qui contient ce point.

---

(1) Et d'une façon générale, si E′ ne divise pas le plan en plusieurs régions telles que tout chemin allant d'un point intérieur à l'une à un point intérieur à l'autre contienne nécessairement un point de E′.

(2) En effet, s'il y avait deux points limites distincts à convergence régulière ζ_1 et ζ_2, il y aurait deux aires D_1 et D_2 intérieures à R entourant respectivement ζ_1 et ζ_2, telles que dans D_1 la suite des $\varphi_n(z)$ converge uniformément vers la constante ζ_1, et dans D_2 cette même suite converge vers ζ_2, ce qui contredirait notre théorème.

S'il y avait un groupe circulaire limite $\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$,

$$\zeta = \varphi_n(\zeta), \qquad |\varphi'_n(\zeta)| < 1$$

on pourrait entourer les points ζ et ζ_1 qui sont distincts des petites aires D et D_1 telles que la suite

$$\varphi_n(z), \quad \varphi_{n+1}(z), \quad \ldots, \quad \varphi_{2n}(z), \quad \ldots$$

converge uniformément vers la constante ζ dans D et vers la constante différente ζ_1 dans D_1, et notre théorème serait encore contredit.

Ces résultats 1° et 2° sont d'accord avec ceux signalés par M. Fatou dans sa Note du 21 mai 1917 aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*.

3° Si, *a priori*, on reconnaît l'existence simultanée de deux points limites distincts à convergence régulière, ou d'un groupe circulaire limite, on peut affirmer que E′ comprend un *ensemble continu linéaire qui divise le plan en plusieurs régions*, car E′ ne peut alors ni contenir tout le plan, ni être partout discontinu dans aucune aire du plan, et les domaines de convergence immédiats vers chacun des deux points limites distincts (par exemple), ne pouvant évidemment avoir aucun point commun, doivent être séparés l'un de l'autre par E′, de façon qu'on ne puisse aller de l'un dans l'autre par aucun chemin simple qui ne contienne de point de E′.

DEUXIÈME PARTIE.

Étude de la convergence régulière vers un point limite et de la convergence périodique vers un groupe circulaire limite.

27. Le théorème énoncé à la fin du Chapitre précédent nous a montré que si l'on connaissait l'allure de la suite

$$\varphi(z), \varphi_2(z), \ldots, \varphi_n(z), \ldots$$

dans une aire arbitrairement petite, intérieure à une région R, d'un seul tenant, dont les points intérieurs ne sont pas de E′, mais dont tous les points frontières sont de E′, on connaissait par cela même l'allure de la suite dans toute la région R. Nous avons fait remarquer alors que l'étude locale de l'itération, telle qu'on l'avait pratiquée jusqu'à ce jour, donnait des renseignements sur l'allure de la suite des $\varphi_i(z)$ dans le voisinage : 1° de tout point dit *point limite à convergence régulière*, c'est-à-dire de toute racine de $z = \varphi(z)$ pour laquelle $|\varphi'(z)| < 1$; 2° de tout point appartenant à un *groupe circulaire limite*, c'est-à-dire de tout point ζ racine de $z = \varphi_n(z)$ [1] pour lequel $|\varphi_n(z)| < 1$, et des $n - 1$ autres

(1) On suppose, bien entendu, avec M. Kœnigs, que ζ n'est pas racine d'une équation $z = \varphi_p(z)$, où $p < n$. On dit quelquefois que ζ appartient à l'indice n, ou que c'est une racine *primitive* de $z = \varphi_n(z)$, par analogie avec les équations binomes.

points

$$\zeta_1 = \varphi(\zeta), \quad \zeta_2 = \varphi(\zeta_1), \quad \ldots, \quad \zeta_{n+1} = \varphi(\zeta_n) \quad [\zeta_n = \varphi(\zeta_{n-1})]$$

qui avec ζ_1 forment le groupe circulaire limite.

Nous allons maintenant approfondir l'étude des caractères d'une région R qui contient à son intérieur, soit un point limite à convergence régulière, soit un point d'un groupe circulaire limite.

28. *Domaine de convergence immédiat vers un point limite à convergence régulière.* — Bornons-nous pour l'instant au cas du point limite à convergence régulière $\zeta = \varphi(\zeta)$, $|\varphi'(\zeta)| < 1$ et nous verrons ensuite que nos conclusions vaudront encore pour les groupes circulaires limites.

On peut toujours, grâce à une homographie préalable, supposer que le point limite considéré est à l'origine. On peut supposer aussi que le point à l'infini [1] est un point qui n'admet pas o pour limite de ses conséquents. Un point $z = \varphi(z)$, distinct de l'origine, pourra par exemple être envoyé à l'infini

$$z_1 = \varphi(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots, \qquad |a_1| < 1.$$

Si $a_1 \neq 0$, l'origine a *un antécédent et un seul confondu avec elle-même.*

Si $a_1 = 0$, l'origine a au moins deux antécédents confondus avec elle-même. Soit ρ un nombre positif assez petit; si je fais décrire au point z le cercle C de centre O de rayon ρ :

1° Si $a_1 \neq 0$, l'antécédent unique z_{-1} de z qui devient égal à zéro pour $z = 0$ décrit autour de l'origine une courbe analytique C_{-1} qui comprend C à son intérieur. z décrivant l'aire limitée par C contenant O, z_{-1} qui est fonction analytique de z dans C, décrit l'aire limitée par C_{-1} contenant O.

2° Si $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, ..., $a_{p-1} = 0$ $(a_p \neq 0)$, l'origine a p antécédents confondus avec elle et p seulement; z étant voisin de zéro, ces p antécédents sont voisins de zéro et forment un seul et même système circulaire; z décrivant C p fois de suite dans le sens positif, chacun des p antécédents précédents décrira une fois une courbe C_{-1},

[1] Ceci permet de conclure que dans une petite région autour de zéro toutes les fonctions $\varphi_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ ont une branche de leurs fonctions inverses $\psi_{-n}(z)$ qui reste finie.

analytique fermée entourant C; z décrivant l'aire S simplement connexe, composée de p feuillets superposés, chacun identique à la surface du cercle C, ces feuillets se ramifiant au point O les uns aux autres, S étant d'ailleurs limitée par le cercle C, p fois décrit et contenant O à son intérieur, chacun des p antécédents de z, dont il a été parlé précédemment, décrit une et une seule fois l'intérieur de la courbe C_{-1} précédente : tout point z intérieur au cercle C a p antécédents intérieurs à C_{-1} et p seulement : tout point intérieur à C_{-1} a son conséquent et par suite tous ses conséquents dans C.

Nous savons d'autre part que, si z est un point quelconque intérieur à C, $|z| < \rho$, on a

$$|z_1| < H.\rho \qquad (H < 1),$$

et par suite

$$|z_n| < H^n.\rho.$$

La suite $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ a, quel que soit z dans C, O et O seulement pour point limite. Nous allons étudier des propriétés du *domaine de convergence immédiat du point* O, entendant par là l'ensemble des points du plan dont les conséquents admettent O pour seul point limite, et qu'on peut joindre au point O par un chemin simple dont tous les points jouissent de la propriété précédente (d'admettre o pour seul point limite de leurs conséquents). Ce domaine, c'est la région R du plan d'un seul tenant contenant O limitée par l'ensemble parfait E′ : tout point intérieur à cette région admet O pour seul point limite de ses conséquents, et peut être joint à O par un chemin simple dont tous les points sont intérieurs à R et jouissent de la propriété précédente. Un point frontière de la région R appartient à E′, ses conséquents sont dans E′, ils n'admettent pas O pour point limite, car O n'étant pas de E′ est, comme on l'a déjà vu, entouré d'un cercle C′ où ne pénètre aucun point de E′.

Sur la frontière de R *les points de E sont denses partout*, c'est-à-dire que dans toute aire du plan qui contient des points frontières de R il s'en trouve qui sont des racines de $z = \varphi_n(z)$ pour des valeurs convenables de n, et pour lesquels $|\varphi'_n(z)| > 1$. Tout point z intérieur à R ayant O pour point limite de ses conséquents, il s'ensuit qu'un certain z_i sera intérieur à C, ainsi que tous les conséquents suivants de z.

R peut donc se définir aussi : *l'ensemble des points, d'un seul*

tenant avec O, *dont un conséquent tombe dans* C, *et nous sommes conduits à le construire par le processus dont nous allons maintenant nous occuper.*

z décrivant l'aire intérieure à C, cherchons l'aire décrite par celui ou ceux de ses antécédents qui s'annulent avec z : c'est l'aire limitée par C_{-1}, je l'appellerai pour abréger *antécédente de l'aire* C. On a vu que C_{-1} contient C.

z_{-1} décrivant l'aire C_{-1}, celui ou ceux de ses antécédents qui s'annulent avec z_{-1} *décriront une aire* C_{-2} *qui contiendra* C_{-1} *à son intérieur*, puisque C_{-1} contenait C et puisque l'aire C_{-1} est antécédente de C. C_{-2} sera dite *antécédente* d'ordre 2 de C.

Il importe de faire de suite une remarque : si $a_1 = 0$, le point O est un point critique pour la fonction algébrique $\psi(z)$ inverse de $\varphi(z)$, c'est aussi un point qui annule $\varphi'(z)$; le domaine R de convergence immédiat vers O contient alors *à son intérieur* un point critique de l'inverse de $\varphi(z)$, conséquent d'un point qui annule $\varphi'(z)$.

Supposons au contraire $a_1 \neq 0$ et, partant du petit cercle C envisagé précédemment, définissons successivement l'aire C_{-1} antécédente de l'aire C, décrite par z_{-1}, antécédent unique de z, qui soit $= 0$ pour $z = 0$ lorsque z décrit l'aire C; puis C_{-2} antécédente de C_{-1} dans les mêmes conditions, et ainsi de suite. Le processus se poursuivra sans difficulté tant que les aires successives $C_{-1}, C_{-2}, \ldots, C_{-i}$, qu'on déterminera ainsi ne contiendront pas de point critique de la branche de fonction algébrique $\psi(z)$ inverse de $\varphi(z)$, qui devient égale à 0 pour $z = 0$; toutes les aires ainsi déterminées seront à un seul feuillet, simplement connexes, et chacune complètement intérieure à son antécédente. Si ce processus se poursuivait indéfiniment sans qu'aucun point critique de $\psi(z)$ soit intérieur à une des aires C_{-i} successives, R se présenterait comme la limite de l'aire C_{-i} pour i grandissant indéfiniment [1]. Je vais montrer que cette hypothèse est impossible.

---

[1] Il est facile, en effet, de voir que si l'aire C_{-i} ne renferme aucun point critique de $\psi(z)$, chacun des K antécédents de z est fonction analytique de z dans C_{-i} ; chacun décrit une aire à un seul feuillet limitée par un contour analytique simple, si z décrit l'aire C_{-i} et *les* K *aires antécédentes de* C_{-i} *n'ont deux à deux ni point intérieur ni point frontière commun*, seule peut donc chaque fois nous intéresser l'antécédente de C_{-i} qui contient l'origine.

29. En effet R serait alors une aire simplement connexe [1] dont il est aisé [2] de faire la représentation conforme sur l'aire intérieure à un cercle $|Z| < 1$ (*tous les points de* E′ étant extérieurs à R ou points frontières de R, c'est bien *sur un cercle* que se fait la représentation ; cette représentation conforme $z = f(Z)$ fait correspondre à tout point z intérieur à R un point Z de module $|Z| < 1$, la correspondance étant biunivoque et analytique pour tous les points intérieurs. Nous ferons correspondre entre elles les origines des plans z et Z, $[f(0) = 0]$ ainsi que les directions positives des axes réels de ces plans $[f'(0)$ réel$]$. A deux points z et z_1 qui se correspondent par $z_1 = \varphi(z)$ la représentation conforme fait correspondre deux points Z et Z_1. Quel que soit Z dans $|Z| < 1$, il lui correspond un point z par $z = f(Z)$, puis z_1 par $z_1 = \varphi(z)$, puis Z_1 par $z_1 = f(Z_1)$. Ainsi, à tout point Z dans $|Z| < 1$ correspond un point Z_1 dans $|Z_1| < 1$ qui évidemment dépend analytiquement de Z dans $|Z| < 1$. Inversement à Z_1 dans $|Z_1| < 1$ correspond un point Z et un seul dans $|Z| < 1$ qui dépend analytiquement de Z_1. La relation $Z_1 = \Phi(Z)$, holomorphe dans $|Z| < 1$ [ainsi que son inverse $Z = \psi(Z_1)$ dans $|Z_1| < 1$] est la transformée de $z_1 = \varphi(z)$ par la substitution $z = f(Z)$. La relation $Z_1 = \Phi(Z)$ transforme en lui-même l'*intérieur* du cercle $|Z| < 1$ et *conserve l'origine* (si $Z = 0$, $Z_1 = 0$), il en est de même de la fonction inverse $Z = \psi(Z_1)$. La transformation est biunivoque, analytique. C'est un résultat bien connu qu'elle ne peut être autre qu'une rotation autour de l'origine [3] : on a nécessairement

$$Z_1 = Z e^{i\theta};$$

c'est-à-dire qu'en O on a

$$\left|\frac{dZ_1}{dZ}\right| = 1.$$

---

(1) La relation $z_1 = \varphi(z)$ ferait correspondre à tout point z intérieur à R un point z_1 intérieur à R et, inversement, à tout point z_1 intérieur à R correspondrait un et un seul point z intérieur à R.

(2) On peut, par exemple, en désignant par $f_n(Z)$ la fonction qui applique sur $|Z| < 1$ l'aire C [$f_n(0) = 0$, $f_n'(0)$ réel], affirmer que $f(Z)$ est la limite de la suite $f_1(Z), \ldots, f_n(Z), \ldots$, uniformément atteinte dans toute aire intérieure à $|Z| < 1$.

(3) *Voir* Poincaré, *Sur les groupes des équations linéaires*, § 7. Lemme fondamental.

Or c'est là un résultat contradictoire avec nos hypothèses.

En effet on a

$$\left(\frac{dZ_1}{dZ}\right)_0 = \left(\frac{dZ_1}{dz_1}\right)_0 \left(\frac{dz_1}{dz}\right)_0 \left(\frac{dz}{dZ}\right)_0,$$

$$\left(\frac{dz_1}{dZ_1}\right)_0 = f'(0) = \left(\frac{dz}{dZ}\right)_0 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{dZ_1}{dz}\right)_0 = \varphi'(0) = 0$$

d'après l'hypothèse.

Donc

$$\left(\frac{dZ_1}{dZ}\right)_0 = a_1$$

et l'on a supposé $|a_1| < 1$.

Il est donc impossible de supposer sans contradiction que la région R ne renferme à son intérieur aucun point critique de $\psi(z)$ ou aucun point qui annule $\varphi'(z)$, antécédent d'un tel point critique. Dans la formation indiquée plus haut des antécédentes successives C_{-1} de l'aire C, on tombera toujours sur une aire C_{-n} qui contiendra un point critique de la fonction inverse de $\varphi(z)$ [1].

30. Nous avons donc, que la dérivée soit nulle au point $Z = \zeta$ considéré ou qu'elle y soit tout simplement en module inférieure à un, le théorème fondamental suivant :

Théorème. — *Le domaine de convergence immédiat* R *d'un point limite à convergence régulière* ζ [2], *contient toujours à son intérieur au moins un point critique pour la fonction algébrique inverse de* $\varphi(z)$. *Ce point est critique pour la branche de cette fonction qui devient*

---

[1] Pour définir alors les antécédentes de l'aire C_{-1} qui contient un point critique, il faut imaginer que z décrive l'aire C_{-1}, alors il y a deux de ses antécédents en général qui deviennent égaux si z vient au point critique; le point considéré étant critique pour la branche $\psi(z)$ qui s'annule à l'origine, l'un de ces antécédents est fourni précisément par la branche $\psi(z)$; z décrivant l'aire C_{-1} une et une seule fois, l'ensemble des antécédents qui deviennent égaux entre eux, lorsque z vient au point critique, décrit une aire $C_{-(n+1)}$ qui contient C à son intérieur, et qui est à un seul feuillet, limitée par une seule courbe analytique. L'aire $C_{-(n+1)}$ est l'antécédente de C_{-n} qu'il faut considérer dans R.

[2] Il n'y a rien de particulier à dire pour le cas où ζ point limite à convergence régulière est le point à l'infini du plan; par homographie on peut, si l'on veut, ramener ce point à distance finie, mais ce n'est là qu'une commodité de langage. Ceci se présentera chaque fois que $\varphi(z)$ sera polynome; alors l'infini sera point limite à convergence régulière et aussi point critique pour $\psi(z)$.

égale à ζ pour $z = \zeta$, il est conséquent d'un point, intérieur aussi à R_1 *où* $\varphi'(z) = 0$ (¹).

La démonstration de ce théorème qui résulte de l'analyse précédente basée sur la représentation conforme est toute naturelle quand on cherche à définir R, comme nous l'avons fait, par la limite des antécédentes successives de l'aire C.

31. Voici une deuxième démonstration qui n'est pas différente, en principe, mais qui n'utilise pas la représentation conforme.

Reprenons

$$z_1 = \varphi(z) = a_1 z - \ldots,$$

d'où, pour la branche de $\psi(z)$ qui est nulle à l'origine,

$$z_{-1} = \frac{1}{a_1} z - \ldots.$$

Si le processus indiqué plus haut pour la formation des antécédentes C_{-1}, C_{-2}, ..., de l'aire C se poursuit indéfiniment sans que l'on rencontre à l'intérieur d'une C_{-i} de point critique pour la branche de $\psi(z)$ considérée, cela veut dire que la fonction $\psi_n(z)$ inverse de $\varphi_n(z)$ a, quel que soit n, une branche nulle à l'origine et *analytique dans* C (²).

C'est ici le lieu d'appliquer le théorème suivant :

Si une fonction $w = F(z)$ holomorphe dans un cercle C de centre O de rayon r et sur ce cercle, pour laquelle $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$, *ne prend jamais dans ce cercle la même valeur en deux points distincts, alors, z décrivant le cercle C de rayon ρ, w décrit une ligne L dont la plus courte distance à l'origine est*

$$d \geq \frac{-1 + \sqrt{\frac{\rho}{r}}}{4} \quad (^3).$$

(¹) En réfléchissant un peu, on se rend compte que le théorème précédent est encore vrai pour l'itération d'une fonction *entière transcendante* dans le voisinage d'une racine de $z = \varphi(z)$ qui rend $|\varphi'(z)| < 1$.

(²) Grâce à la précaution prise d'envoyer à l'infini un point qui n'admet pas zéro pour point limite de ses conséquents, il n'y a dans C aucun pôle de $\psi_n(z)$ (quel que soit n) en choisissant C assez petit.

(³) *Voir* KLEIN et FRICKE, *Fonctions automorphes*, p. 500.

La branche de $\psi_n(z)$, inverse de $\varphi_n(z)$, nulle à l'origine, est analytique dans C et sur C (si C est assez petit), son développement de Taylor dans C est

$$z_{-n} = \psi_n(z) = \left(\frac{1}{a_1}\right)^n z + \ldots$$

Cette branche étant l'inverse d'une fraction rationnelle ne peut prendre la même valeur en deux points différents z et z', le théorème précédent peut lui être appliqué; d'autre part $\frac{z_{-n}}{\left(\frac{1}{a_1}\right)^n}$, nul à l'origine, a une dérivée égale à 1 à l'origine: z décrivant C, z_{-n} décrira C_{-n} antécédente de C d'ordre n.

Il s'ensuit donc que la plus courte distance de C_{-n} à l'origine sera

$$d_n \geq \frac{\sqrt{2}-1}{4}\rho\left|\frac{1}{a_1}\right|^n,$$

ρ étant le rayon de C.

Cela voudrait dire que, pour n assez grand, l'aire C_{-n} contiendrait un cercle de centre O de rayon aussi grand qu'on voudrait (puisque $\left|\frac{1}{a_1}\right|^n$ est aussi grand qu'on veut pour n assez grand, à cause de $|a_1| < 1$). Mais il n'y aurait qu'à choisir ce rayon *égal à la distance à l'origine d'un point critique pour la branche de* $\psi(z)$, *inverse de* $\varphi(z)$, *nulle à l'origine*, pour être sûr que l'aire C_{-n} contiendrait à son intérieur un point critique de la branche considérée, contrairement à l'hypothèse, faite au début.

32. *Remarque*. — Le théorème précédent étant admis, voici comment il faudra opérer pour trouver R à partir de C. On imagine qu'on ait étalé sur le plan z la surface de Riemann $\mathfrak{R}$ à K feuillets de la fonction $\psi(z)$, algébrique, inverse de $\varphi(z)$. Partons de C; s'il est assez petit et si $\varphi'(0) \neq 0$, il ne contient pas de point de ramification de $\mathfrak{R}$. C découpe, dans $\mathfrak{R}$, k aires identiques superposées: quand z décrit chacune de ces aires, z_{-1} décrit dans le plan analytique z une aire simple limitée par une courbe analytique simple, et il y a une de ces aires et une seule C_{-1} qui contient C à son intérieur. Les $(k-1)$ autres aires n'ont pas de point commun avec C_{-1}. Puis si l'aire C_{-1}, comme C, ne contient pas de point de ramification de $\mathfrak{R}$, on opère sur elle comme on vient d'opérer sur C: on continuera ainsi jusqu'à ce qu'on arrive à une aire C_{-n} limitée

par une courbe C_{-i} analytique simple, contenant à son intérieur un point de ramification de $\mathcal{R}$. Si l'on suppose que l'origine appartient au feuillet supérieur de $\mathcal{R}$, C_{-1} sera l'antécédente de l'aire découpé par C dans le feuillet supérieur et les $(k-1)$ autres aires décrites par z_{-1} seront les antécédentes des $k-1$ aires découpées par C dans les 2e, 3e, ..., $k^{\text{ième}}$ feuillets de $\mathcal{R}$. Il en sera de même tant que la courbe C_{-i} ne renfermera pas à son intérieur [1] de point de ramification de $\mathcal{R}$, et, en précisant, de point qui ramifie le *feuillet supérieur* de $\mathcal{R}$ avec un feuillet inférieur.

Car s'il arrivait que la courbe C_{-i} contienne un point qui ramifie entre eux deux feuillets de $\mathcal{R}$ distincts du feuillet supérieur, ce point *ne serait pas critique pour la branche de la fonction* $\psi(z)$ *qui s'annule à l'origine*, cette branche serait parfaitement holomorphe dans l'aire C_{-i}; alors C_{-i} découperait dans le feuillet supérieur une aire simple, dont l'antécédente $C_{-(i+1)}$ serait aussi une aire simple, contenant C_{-i}. A vrai dire, dans ce cas, il y aurait à envisager les feuillets qui sont ramifiés entre eux en un point P intérieur à la courbe C_{-i}: il y en a deux en général: la courbe C_{-i} découpe dans ces deux feuillets une aire Σ simplement connexe, se recouvrant elle-même: z décrivant l'intérieur de cette aire Σ, il y a deux de ses antécédents (qui deviennent égaux lorsque z vient en P) qui décrivent une même aire simple Σ_{-1}, à un seul feuillet du plan, limitée par un seul contour analytique : chacun de ces antécédents décrit toute l'aire Σ_{-1}, si z décrit toute l'aire Σ; on peut donc dire si l'on veut que Σ_{-1} est décrite deux fois, une fois par chacun des deux antécédents de z considérés, lorsque z décrit une fois l'aire Σ, en ce sens qu'à tout point z intérieur à C_{-i} correspondent deux antécédents intérieurs à Σ_{-1}.

Mais l'aire Σ_{-1} n'aurait aucun point commun avec l'aire intérieure à $C_{-(i+1)}$ et Σ_{-1} ne peut être prise en considération dans la formation du domaine R de convergence *immédiat* des O. Si elle reste toujours extérieure aux courbes C_{-i}, successives, Σ_{-1} sera intérieure à une certaine antécédente de l'aire simple R, elle appartiendra bien, comme nous le verrons plus tard, au domaine de convergence *total* de O, mais n'aura aucun point commun avec le domaine *immédiat*.

---

[1] L'intérieur de C_{-i} s'entend toujours : la région du plan limitée à C_{-i} qui contient l'origine.

Ceci étant bien précisé, on se rend compte du mécanisme de formation de R, tant que chacune des C_{-i} découpe dans le feuillet supérieur une aire ne contenant pas de point où ce feuillet se ramifie avec un feuillet inférieur, c'est-à-dire, répétons-le, de point qui soit critique pour la branche de $\psi(z)$ nulle à l'origine.

Mais nous savons qu'un certain contour C_{-i} (1) contiendra à son intérieur un tel point P. En ce point le feuillet supérieur se ramifie avec un certain nombre de feuillets inférieurs, en général avec le feuillet immédiatement inférieur seulement (2).

Supposons, pour simplifier, que seul ce point P de ramification de $\mathfrak{R}$ figure dans C_{-i}; la courbe C_{-i} découpe alors dans $\mathfrak{R}$ un certain nombre d'aires simplement connexes, superposées, dont la supérieure contient l'origine, est limitée par la courbe C_{-i} parcourue deux fois et comprend deux feuillets superposés ramifiés en P. D'une façon générale, on considérera l'aire d'un seul tenant S_{-i} découpée dans $\mathfrak{R}$ par C_{-i} et *qui contient l'origine sur le feuillet supérieur*: cette aire se recouvrira plusieurs fois elle-même, elle comprendra la partie du feuillet supérieur intérieure à C_{-i} et les parties intérieures à C_{-i} de tous les feuillets qui sont d'un seul tenant avec le feuillet supérieur à l'intérieur de C_{-i}, c'est-à-dire de tous les feuillets tels qu'on puisse joindre un point quelconque de ces feuillets intérieur à la courbe C_{-i} au point O du feuillet supérieur par un chemin continu, intérieur à la courbe C_{-i}, tracé sur $\mathfrak{R}$.

L'aire à plusieurs feuillets S_{-i}, ainsi déterminée par C_{-i}, est simplement connexe, si elle admet C_{-i} plusieurs fois décrit pour seul contour, ce qui arrive par exemple si elle ne contient qu'un point de ramification pour la fonction algébrique $\psi(z)$.

Mais il peut arriver que cette aire soit multiplement connexe; un cas très simple où il en est ainsi serait celui où la courbe C_{-i} renfermerait à son intérieur deux points de ramification unissant entre eux le premier et le deuxième feuillet, et uniquement ceux-là.

---

(1) Cela pourra arriver dès le premier contour C_{-i} si l'on a $\psi(0) = 0$ avec $\psi(0) = 0$.

(2) Je rappelle que $\mathfrak{R}$ étant le genre zéro et $\psi(z)$ étant générale, le feuillet supérieur n° 1 sera uni au deuxième feuillet par deux points de ramification; chacun des feuillets n°s 2, 3, ..., $k-1$ sera uni par deux points de ramification au feuillet précédent et au suivant; enfin le feuillet inférieur n° k sera uni par deux points au feuillet ($k-1$) (voir PICARD, *Traité d'Analyse*, t. 2, p. 400, § 16).

Alors, évidemment, l'aire considérée S_{-i} serait limitée par deux contours superposés à C_{-i}, le premier tracé tout entier sur le feuillet supérieur, le deuxième tracé tout entier sur le feuillet inférieur.

Quoi qu'il en soit, on considérera donc l'aire d'un seul tenant S_{-i} découpée dans la surface de Riemann par C_{-i}, qui contient l'origine sur le feuillet supérieur; z_{-i} décrivant cette surface, celui de ses antécédents $z_{-(i+1)}$ qui devient nul à l'origine, décrira une aire plane $C_{-(i+1)}$ à un seul feuillet contenant à son intérieur la courbe C_{-i} et l'aire plane limitée par C_{-i}; l'aire plane $C_{-(i+1)}$ sera limitée par autant de contours que l'aire d'un seul tenant, découpée dans $\mathfrak{R}$ par C_{-i}, a de contours. Cette aire plane $C_{-(i+1)}$ est le lieu des points qui peuvent être joints à O par un chemin dont tous les points ont leurs conséquents à l'intérieur de la courbe C_{-i}. On peut dire de cette aire que c'est l'antécédente contenant O de l'aire limitée par C_{-i} qui contient O; z décrivant l'aire C_{-i}, l'antécédent qui est nul à l'origine et tous les antécédents qui se ramifient avec celui-là à l'intérieur de C_{-i} décriront la nouvelle aire plane en question. Bien qu'il puisse arriver que cette nouvelle aire plane antécédente de l'aire C_{-i} ne soit pas simplement connexe, je l'ai encore appelée $C_{-(i+1)}$. On continuera à opérer sur $C_{-(i+1)}$ comme sur C_{-i} : on cherchera l'antécédente $C_{-(i+2)}$ de l'aire $C_{-(i+1)}$, qui contient O; ce sera le lieu des points du plan, qu'on peut joindre à O par un chemin simple dont tous les points ont leurs conséquents à l'intérieur de l'aire $C_{-(i+1)}$; pour déterminer $C_{-(i+2)}$, on envisagera dans $\mathfrak{R}$ l'ensemble *d'un seul tenant* avec l'origine du feuillet supérieur formé par les parties des feuillets de $\mathfrak{R}$ qui se projettent à l'intérieur de l'aire plane $C_{-(i+1)}$. Cet ensemble est une aire $S_{-(i+1)}$ d'un seul tenant, contenant l'origine du feuillet supérieur, se recouvrant elle-même plusieurs fois; tout point de $S_{-(i+1)}$ se projette à l'intérieur de $C_{-(i+1)}$ et peut être joint à l'origine pointée sur le feuillet supérieur par un chemin continu tracé sur $\mathfrak{R}$ et se projetant à l'intérieur de l'aire plane $C_{-(i+1)}$. $z_{-(i+1)}$ décrivant l'aire $S_{-(i+1)}$, celui de ses antécédents qui devient nul lorsque $z_{-(i+1)}$ coïncide avec l'origine pointée sur le feuillet supérieur décrira une aire plane $C_{-(i+2)}$ d'un seul tenant contenant l'origine O, contenant à son intérieur l'aire plane $C_{-(i+1)}$ et dont l'ordre de connexion est égal à celui de l'aire $S_{-(i+1)}$. Le processus, nettement expliqué maintenant pour tous les cas possibles, peut se continuer indéfiniment. Les aires planes suc-

cessives $C, C_{-1}, C_{-2}, \ldots, C_{-i}, \ldots$ sont contenues chacune dans la suivante, et chacune C_{-i} a pour antécédente l'aire $C_{-(i+1)}$ qui la contient. R, *domaine de convergence immédiat de* O, *n'est autre que la limite de l'aire* C_{-i} *lorsque i croît indéfiniment.* Tout point intérieur à R est intérieur à tous les C_{-i} dont l'indice i surpasse un nombre donné bien déterminé. Tout point intérieur à R doit en effet pouvoir être joint à O par un chemin simple intérieur à R dont les conséquents admettent O pour unique point limite, et par suite soient, à partir d'un certain rang, intérieurs à l'aire C; c'est bien cette propriété qui a réglé la construction des régions C_{-i} successives car toute région C_{-i} est l'ensemble des points qu'on peut joindre à O par un chemin dont le $i^{\text{ème}}$ conséquent soit tout entier à l'intérieur de l'aire C dont toutes les conséquentes tendent vers O et O seulement. La frontière de R est, nous l'avons déjà vu, uniquement formée de points de E′, et sur cette frontière, les points de $E[z=\varphi(z), |\varphi_n(z)|>1]$ sont partout denses. Le plus souvent, dans les exemples aisés à traiter, les C_{-i} seront tout simplement connexes, et il en sera de même pour R. E′ sera alors un simple continu linéaire. Mais on a donné plus haut un exemple

$$\left(z_1=\frac{z^3}{z^3+2}\right)$$

où R avait un ordre de connexion infini. Par la transformation $z_1=\varphi(z)$ tout point z intérieur à R se transforme en un point z_1 intérieur à R. Inversement, à un point z_1 intérieur à R, correspondent deux antécédents au moins intérieurs à R à cause du théorème fondamental précédent.

55. *Cas du groupe circulaire limite.* — Il s'agit ici d'un groupe de p points distincts $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{p-1}$ racines de $z=\varphi_p(z)$ pour lesquels $|\varphi_p(z)|<1$. On a

$$\zeta_1=\varphi(\zeta), \quad \zeta_2=\varphi(\zeta_1), \quad \ldots \quad \zeta_{p-1}=\varphi(\zeta_{p-2}), \quad \zeta=\varphi(\zeta_{p-1}),$$
$$\varphi_p(\zeta)=\varphi'(\zeta)\varphi'(\zeta_1)\varphi'(\zeta_2)\ldots\varphi'(\zeta_{p-1}).$$

Nous envisagerons la substitution $z_1=\varphi_p(z)$, dans le voisinage de chacun des points précédents, dans le voisinage de ζ par exemple; nous pourrons définir comme précédemment, à partir d'un petit cercle C entourant ζ, le domaine de convergence R immédiat

vers ζ pour cette substitution $z_p = \varphi_p(z)$: ce sera la limite des antécédentes successives contenant ζ de l'aire C par la branche de $\psi_p(z)$ inverse de $\varphi_p(z)$ qui devient égale à ζ pour $z = \zeta$.

R renfermera à son intérieur un point critique pour la branche considérée de $\psi_p(z)$. On aura les domaines de convergence immédiats vers $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{p-1}$ pour la substitution $z_p = \varphi_p(z)$ en prenant tout simplement les itérés d'ordre 1, 2, ..., $p-1$ du domaine R. (L'itéré d'ordre p de R est identique à R.) Ce seront des domaines $R_1, R_2, \ldots, R_{p-1}$ entourant respectivement $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{p-1}$: chacun d'eux est d'un seul tenant, ils n'ont aucun point commun deux à deux : on peut les ranger dans un ordre circulaire R, R_1, R_2, ..., R_{p-1}, de telle façon que, quel que soit le chemin intérieur à l'un d'eux, R par exemple, unissant un point intérieur à R au point ζ, ses conséquents successifs sont respectivement intérieurs à $R_1, R_2, \ldots, R_{p-1}$, R, R_1, ..., périodiquement répétés, et n'ont comme points limites que le système des p points $\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_{p-1}$ qui sont les seuls conséquents de ζ distincts. Dans l'ordre circulaire, R, R_1, R_2, ..., R_{p-1} sont chacun l'itéré du précédent par la substitution

$$z_1 = \varphi(z) \,|\, R_1 = \varphi(R), \; R_2 = \varphi(R_1), \ldots, R = \varphi(R_{p-1}) \,|.$$

Tout cela est aisé à voir. Chacun des R_i contient au moins un point critique pour la branche de la fonction inverse de $\varphi_p(z)$ qui devient égale à ζ_i pour $z = \zeta_i$. Or les points critiques de la fonction inverse de $\varphi_p(z)$ sont les points critiques de $\psi(z)$ inverse de $\varphi(z)$ et leurs conséquents d'ordre 1, 2, ..., $(p-1)$. $\psi(z)$ a, en général, $2(k-1)$ points critiques qui sont les conséquents d'ordre 1 des $2(k-1)$ points où $\varphi'(z) = 0$ [$\varphi(z)$ est d'ordre k]. $\psi_p(z)$ a donc en tout $2p(k-1)$ points critiques. Il arrive donc nécessairement qu'un des points critiques de $\psi(z)$ au moins est intérieur à un R_i, et ses $p-1$ conséquents suivants sont respectivement intérieurs aux R_j qui suivent le R_i considéré dans l'ordre circulaire. On peut encore dire : *il y a au moins un point annulant $\varphi'(z)$ qui tombe dans un des p domaines* R, R_1, ..., R_{p-1}, *c'est-à-dire dont les conséquents admettent* $\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_{p-1}$ *comme groupe circulaire limite.*

Dans le cas où existe un groupe circulaire limite, on est sûr, comme on l'a dit, que E′ comprend un ensemble parfait continu linéaire qui divise le plan en plusieurs régions telles qu'il soit impossible de passer de l'une à l'autre par un chemin simple qui ne

renferme aucun point de E'. $R, R_1, \ldots, R_{p-1}$ sont parmi ces régions séparées par E'. Leurs frontières, appartenant à E', comprennent des continus linéaires qui séparent tout point intérieur à un R, de tout point extérieur (*voir* n° 26, 5°).

54. Conclusion importante. — *Pour une fraction rationnelle $\varphi(z)$ quelconque, le nombre des points limites à convergence régulière et des groupes circulaires limites est fini.*

Il est clair en effet que chaque point limite à convergence régulière devant être point limite unique des conséquents d'un point au moins où $\varphi'(z) = 0$, et les p points d'un groupe circulaire limite devant aussi être points limites des conséquents d'un point au moins où $\varphi'(z) = 0$, le nombre des points limites à convergence régulière, augmenté du nombre des groupes circulaires limites ne pourra jamais dépasser le nombre des points où $\varphi'(z) = 0$, lequel nombre, en général égal à $2(k-1)$ si $\varphi(z)$ est de degré k, n'est en tout cas jamais supérieur à $2(k-1)$.

Je rappelle que le théorème fondamental qui oblige un point au moins où $\varphi'(z) = 0$ à avoir des conséquents convergeant régulièrement vers un point limite, ou convergeant périodiquement vers les points d'un groupe limite, est encore vrai si $\varphi(z)$ est une transcendante entière. Mais la conclusion que nous venons de tirer ne s'étend pas à toutes les transcendantes entières $\varphi(z)$, car il arrive en général qu'une telle transcendante admet une infinité de points où $\varphi'(z) = 0$.

Ainsi se trouve levé, bien simplement, le doute qui subsistait relativement aux groupes circulaires limites. M. Koenigs dit en effet, au paragraphe 34 de son Mémoire, *Sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles*, publié aux *Annales de l'École normale supérieure* en 1884 (page 101 du Supplément) :

« L'importance de la division du plan en régions, d'après le point limite auquel conduisent ses points, se trouve ainsi une fois de plus mise en évidence. Mais on concevra quelle difficulté s'attache au problème en songeant qu'il y a généralement une infinité de groupes circulaires limites, pour si grand que soit l'indice auquel ce groupe appartient. M. Cayley a mis le premier en avant ce problème dans le cas de la règle de Newton; mais, *même dans le cas d'un simple polynome entier*, le nombre des groupes limites peut être infini... »

Cette dernière assertion ne subsiste plus maintenant, pour tout polynome entier le nombre des groupes circulaires limites est FINI. Nous reviendrons plus loin sur l'application du problème à la règle de Newton, car nous verrons surgir, dès que l'équation soumise à la règle dépasse le degré 2, des circonstances tout à fait nouvelles et intéressantes.

35. *Applications.* — On peut, dès maintenant, utiliser les théorèmes généraux établis jusqu'ici pour traiter complètement des problèmes d'itération d'un caractère beaucoup plus général que ceux traités jusqu'ici. Les seuls exemples jusqu'ici connus de l'étude d'une itération dans tout le plan sont ceux publiés par M. Fatou dans ses deux Notes des *Comptes rendus* de 1906 et 1917 (15 octobre 1906, 21 mai 1917). On verra plus loin que ce sont les cas *les plus simples* qui se puissent présenter dans l'itération, et l'on verra à quelles circonstances tient cette simplicité.

1° La Note de 1906 traite des fractions $z_1 = \frac{z^2}{z^2 - 1}$ (qui dérivent, par l'homographie auxiliaire $z = \frac{1}{Z}$, des polynomes $Z_1 = 2Z^k + 1$). Pour ces fractions l'origine est un point limite à convergence régulière.

Le cercle C_n de centre O que, avec M. Koenigs, on est conduit à former dans l'étude locale autour de l'origine, contient les deux seuls points critiques de la fonction inverse qui sont $z = 0$ et $z = 1$. On est sûr alors que ces points-là admettent O pour seul point limite de leurs conséquents. Il n'y a donc pas d'autre point limite à convergence régulière ni d'autre groupe circulaire limite $z = \varphi_n(z)$ où $|\varphi'_n(z)| < 1$. R, domaine de convergence immédiat vers O, comporte tout le plan sauf un ensemble parfait partout discontinu qui est E'. R est aussi le domaine de convergence total vers O.

La simplicité de la réponse tient à ce que l'inverse de $\varphi(z)$ n'a ici que deux points critiques, et tous les deux appartiennent au domaine R de l'origine.

2° Elle traite ensuite de l'exemple particulier $z_1 = \frac{z + z^2}{2}$ pour lequel l'origine et le point à l'infini sont des points limites à convergence régulière. Les points critiques de la fonction inverse sont $z = -\frac{1}{2}$ et $z = \infty$. Il est immédiat que $z = -\frac{1}{2}$ appartient

au domaine de convergence immédiat R_0 de l'origine et $z = \infty$ au domaine R_∞ du point à l'infini. Entourant l'origine d'un cercle C assez petit (par exemple $|z| = \frac{1}{2}$) et prenant les antécédentes successives de l'aire C, on formera des aires C_{-1}, C_{-2} qui toutes comprendront l'origine et seront à distance finie. Elles seront toutes intérieures à un certain cercle Γ de rayon assez grand qui est au point ∞ ce que C est à l'origine : l'aire limitée par Γ contenant ∞ se transforme par $\varphi(z)$ en une partie d'elle-même entourant aussi ∞, c'est-à-dire que la conséquente de la courbe Γ est une courbe Γ, qui entoure complètement Γ [1]. On pourra prendre par exemple

Fig. 16.

pour Γ le cercle $|z| = 4$.) Toutes les aires C_{-j} seront simplement connexes, elles auront pour limite une aire R_0 simplement connexe intérieure à Γ qui sera le domaine de l'origine. On prendra de même les antécédentes successives de l'aire Γ limitée par Γ et contenant le point à l'infini. Ces antécédentes sont toutes *extérieures à* R_0, elles ont une limite qui est une aire simplement connexe R_∞ contenant le point à l'infini; cette aire est le domaine du point à l'infini.

Les aires R_0 et R_∞ n'ont aucun point intérieur commun. Donc E′ est dans ce cas un ensemble qui divise le plan en deux régions au moins R_0 et R_∞ : E′ comprend un continu linéaire. La frontière de R_0 et celle de R_∞ sont des continus appartenant à E′. Mais tout point de E′ est limite pour les antécédents successifs d'un point quelconque du plan (le point à l'infini excepté), et si l'on choisit un point quelconque dans R_0 tous ses antécédents

[1] L'aire limitée par Γ et contenant ∞ divisera sous l'aire limitée par Γ, et contenant ∞ qui est intérieure à la précédente.

sont dans R_0, et pour un point quelconque de R_∞, ils sont tous dans R_∞ [1]. Ceci prouve que tout point de E′ qui est frontière pour R_0 l'est aussi pour R_∞ et inversement. *Donc* R_0 *et* R_∞ *ont pour frontière commune un continu linéaire* E′ *vers lequel tendent à la fois les antécédentes de la courbe* C *et celles de* Γ. (Nous verrons plus loin que E′ est dans ce cas une *courbe de Jordan*.

5° Ce qui vient d'être dit de ζ_1, ζ_2, peut évidemment se répéter de *toute fraction du deuxième degré qui possède deux points limites à convergence régulière*, c'est-à-dire deux points ζ_1 et ζ_2 pour lesquels $z = \varphi(z)$, $|\varphi'(z)| < 1$. Une telle fraction aura des coefficients complexes qui pourront varier dans certaines limites (par exemple chaque coefficient pourra être représenté par un point du plan complexe assujetti à demeurer dans *certaines aires* de son plan), mais ces limites sont bien moins restrictives que celles qui consistent par exemple à assujettir $z = \varphi(z)$, à admettre un cercle fondamental. Ainsi que l'a montré, en effet, M. Fatou dans sa Note du 21 mai 1917, une fraction $z = \varphi(z)$, qui conserve l'intérieur d'un cercle fondamental se ramène par homographie à une fraction dont *tous les coefficients sont réels*, et il est clair que la condition de réalité imposée à des coefficients équivaut à une relation *d'égalité* [c'est écrire que la partie imaginaire est *nulle* [2]], alors que les restrictions imposées plus haut aux coefficients ne sont que des *inégalités*, les points représentatifs de ces coefficients pouvant décrire *des aires à deux dimensions chacun dans leur plan*. Il suffit, pour se rendre compte de ce dernier point, de partir d'une fraction du deuxième degré particulière ayant deux points limites à convergence régulière; les racines de l'équation $z = \varphi(z)$, dépendant continûment des paramètres qui entrent dans $\varphi(z)$ ainsi que la quantité $\varphi'(z)$ prise en une de ces racines, on verra, en considérant les deux racines de $z = \varphi(z)$ qui rendent $|\varphi'(z)| < 1$ dans le cas particulier dont on part, que si les coefficients de $\varphi(z)$

---

(1) Car chacun de ces domaines, R_0 par exemple, renferme un point critique et un seul pour $\varphi(z)$; ce point est critique pour la branche de $\varphi(z)$ qui est égale à zéro à l'origine. A un point intérieur à R_0 correspondent deux antécédents intérieurs à R_0 et un conséquent intérieur à R_∞.

(2) Ou que le point représentatif de ce coefficient est sur l'axe réel ou sur une circonférence, transformée de cet axe par la substitution homographique exécutée sur la variable.

décrivent, chacun dans leur plan, de petites aires autour de leurs valeurs initiales, les deux racines précédentes varieront continûment et rendront toujours $|\varphi'(z)| < 1$.

ζ_1 et ζ_2 étant donc les deux points limites à convergence régulière, chacun sera point limite pour les conséquents d'un point critique de la fonction inverse de $\varphi(z)$. Il y a deux points critiques en tout et on les obtient facilement : si $z_1 = \frac{az^2 + bz + c}{a'z^2 + b'z + c'}$ est la fraction envisagée $\varphi(z)$, ces deux points critiques s'obtiennent en égalant à zéro le discriminant de l'équation

$$(a'z_1 - a)z^2 + (b'z_1 - b)z + c'z_1 - c = 0.$$

Ils sont racines de l'équation

$$(b'z_1 - b)^2 - 4(a'z_1 - a)(c'z_1 - c) = 0.$$

En dehors de ζ_1, ζ_2, il n'y aura ni point limite à convergence régulière, ni groupe circulaire limite. Partant de deux cercles suffisamment petits, C et Γ, entourant respectivement ζ_1 et ζ_2 et cherchant les antécédentes successives des aires qu'ils limitent, on verra que les antécédentes de C sont toutes des aires simplement connexes C_1, C_2, ..., laissant Γ à leur extérieur, celles de Γ qui sont de même Γ_1, Γ_2, ... laissent C à leur extérieur. Les premières C_i ont pour limite une aire simplement connexe R_1 qui est le domaine de convergence immédiat vers ζ_1, les deuxièmes Γ_i ont pour limite une aire R_2 domaine de ζ_2, et l'on voit comme précédemment que R_1 *et* R_2 *ont pour frontière commune l'ensemble* E *qui est ici encore un continu linéaire séparant le plan complet en deux régions complémentaires* R_1 *et* R_2 : ce continu est la limite commune des antécédentes successives C_i et Γ_i des courbes C et Γ. Tout point du plan appartient soit à R_1, soit à R_2, soit à leur limite commune E'. Sur la nature du continu linéaire E (dont nous savons déjà qu'il n'est nulle part superficiel), nous reviendrons plus loin.

4° Les exemples généraux que vient de nous offrir le 3° nous permettent de nous élever à des exemples plus généraux encore.

Dans l'exemple précédent, les aires C_i comme les Γ_i successives étaient simplement connexes et leurs limites avaient une même frontière; cela tenait au fait que à partir d'un certain

rang, C_{-i}, par exemple, contenait un point critique pour la détermination de $\varphi(z)$ qui devient égale à ζ_1 en ζ_1 : alors z_{-i} décrivant l'intérieur de l'aire C_{-i}, *ses deux antécédents* décrivent l'intérieur d'une aire $C_{-(i+1)}$, simplement connexe, contenant C_{-i} à son intérieur ; $z_{-(i+1)}$ décrivant le contour $C_{-(i+1)}$ une fois dans le sens positif, z_{-i} décrit C_{-i} *deux fois* dans le sens positif : on peut dire la même chose de C_{-j} et $C_{-(j+1)}$ pour $j > i$; même chose aussi pour les Γ à partir d'un certain rang. L'essentiel est que TOUS LES ANTÉCÉDENTS d'une aire C_{-i} soient intérieurs à $C_{-(i+1)}$ dès que i dépasse une certaine valeur, et qu'il en soit de même des Γ_{-i} ; alors il faudra bien que R_1, limite de C_{-i}, qui a pour frontière une partie de E', voisine en tous ses points frontières avec R_2, limite des Γ_{-i}, puisque tout point de E' est limite pour les antécédents d'un point de C comme d'un point de Γ_{-i}. D'où la conclusion de 3°.

a. Ce que nous avons dit précédemment s'appliquera donc aussi *à toute fraction d'un degré quelconque ayant deux points limites à convergence régulière, mais pour laquelle la fonction inverse n'a que deux points critiques* ; par exemple à toute fraction du type

$$z_1 = \varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

a, b, c, d étant des constantes telles que l'équation $z = \varphi(z)$ admette deux racines ζ_1 et ζ_2 pour lesquelles $|\varphi'(z)|$ soit < 1.

D'ailleurs il est facile de ramener toute fraction du deuxième degré $z_1 = \varphi(z)$ au type précédent ($k = 1$) par une substitution linéaire auxiliaire sur z.

Pour une telle fraction le plan se divisera encore en deux régions simplement connexes, R_1 et R_2, contenant respectivement ζ_1 et ζ_2, séparées par un continu linéaire E'. R_1 et R_2 sont respectivement les lieux des points dont les conséquents convergent vers ζ_1 et ζ_2. Tout point de E' a tous ses conséquents dans E'. Sur E' les points de E [$z = \varphi_n(z_1)$, $|\varphi_1(z)| > 1$], points n'ayant qu'un nombre fini de conséquents, sont partout denses.

b. Mais on peut encore généraliser, en laissant de côté la restricition imposée à $\varphi(z)$ de n'avoir que deux *points distincts où* $\varphi'(z) = 0$ [correspondant aux deux points critiques de l'inverse de $\varphi(z)$]. Considérons une fraction du degré k pour laquelle existent deux points limites à convergence régulière ζ_1 et ζ_2 ; entourant ζ_1

et ζ_2, comme précédemment, de deux petites aires limitées C et Γ, on prend les antécédentes successives de C et de Γ, à l'aide des branches de $\psi(z)$ qui deviennent respectivement égales à ζ_1 et ζ_2 en ζ_1 et ζ_2, ainsi qu'on l'a expliqué pages [illegible] du présent Mémoire. Supposons qu'en procédant ainsi on arrive à une C_{-i}, simplement connexe, contenant ζ_1, telle que z_{-i} décrivant C_{-i} *tous ses k antécédents* $z_{-(i+1)}$ décrivent une aire $C_{-(i+1)}$, simplement connexe, contenant C_{-i} à son intérieur, en sorte que, $z_{-(i+1)}$ décrivant une fois le contour simple $C_{-(i+1)}$ dans le sens positif, z_{-i} décrira k fois le contour simple C_{-i} dans le sens positif. Ceci exigera en général que C_{-i} contienne à son intérieur $(k-1)$ points critiques convenables de la fonction $\psi(z)$ inverse de $\varphi(z)$, points critiques qui seront tels que, partant de ζ_1 avec une détermination quelconque de $\psi(z)$, on pourra revenir en ζ_1 par un chemin intérieur à C_{-i} avec telle autre détermination qu'on voudra de $\psi(z)$. On se rendra bien compte de cela en imaginant la surface de Riemann $\mathcal{R}$ à k feuillets relative à $\psi(z)$: il faudra que le contour C_{-i} découpe dans $\mathcal{R}$ une aire simplement connexe à k feuillets superposés, contenant ζ_1 et limitée par C_{-i} parcouru k fois. [Ceci exige en général que chaque feuillet de $\mathcal{R}$ soit relié au suivant par un point critique intérieur à C_{-i}, ce qui donc exige la présence dans C_{-i} de $(k-1)$ points critiques convenables de $\psi(z)$.]

Supposons qu'en procédant de même sur Γ on arrive à une antécédente Γ_{-j} jouissant relativement à ζ_2 des mêmes propriétés que C_{-i} relativement à ζ_1; c'est-à-dire que, z_{-j} décrivant l'intérieur de l'aire simplement connexe Γ_{-j}, tous ses k antécédents $z_{-(j+1)}$ décrivent l'intérieur d'une aire simplement connexe $\Gamma_{-(j+1)}$, contenant Γ_{-j} à son intérieur.

Alors les antécédentes successives de l'aire C, comme celles de l'aire Γ, seront toutes simplement connexes. Les premières ont pour limite une aire R_1, simplement connexe, qui est le domaine de convergence vers ζ_1; les deuxièmes ont pour limite une aire R_2, simplement connexe aussi, qui est le domaine de convergence vers ζ_2. R_1 et R_2 ont pour frontière commune un contour linéaire L' qui les sépare et qui est la limite commune des courbes simples C_{-i} et Γ_{-j}. Tout point du plan appartient à R_1, à R_2 ou à L'. On reviendra plus loin sur la nature de L', et l'on verra que, dans des hypothèses très générales, c'est une *courbe de Jordan*.

Remarquons que, dans tout ce qui a été dit précédemment, on

peut se borner à *partir de* C_{-i} *et de* Γ_{-j} *au lieu de* C *et* Γ, car c'est seulement à partir de C_{-i} et de Γ_{-j} qu'on a commencé à tirer les conclusions précédentes sur R_1, R_2 et leur limite commune E'. Si C_{-i} et Γ_{-j} sont *a priori* deux courbes, quelconques d'ailleurs, entourant respectivement ζ_1 et ζ_2, jouissant relativement à ζ_1 et ζ_2 des propriétés indiquées précédemment dans tout leur détail, dont les k antécédentes d'ordre 1 soient, pour la première, confondus avec $C_{-(i+1)}$, pour la deuxième avec $\Gamma_{-(j+1)}$, l'aire $C_{-(i+1)}$ contenant C_{-i} et ζ_1, et l'aire $\Gamma_{-(j+1)}$ contenant Γ_{-j} et ζ_2, alors on peut affirmer que les C_{-p} successifs et les Γ_{-p} tendent vers la même limite E', séparant les domaines R_1 et R_2 de ζ_1 et ζ_2.

Certaines des fonctions à cercle fondamental signalées par M. Fatou (*Comptes rendus*, 21 mai 1917) rentrent dans ce cas-là. Ce sont celles qui admettent deux points limites ζ_1 et ζ_2 à convergence régulière, symétriques par rapport au cercle fondamental [*voir n°* **26** *et suiv.*, *et aussi n°* **20** *du présent Mémoire* (2°)]. Si ζ_1 est intérieur et ζ_2 extérieur, R_1 se compose de l'intérieur, et R_2 de l'extérieur du cercle, E' est identique au cercle séparateur. On peut *a priori* choisir pour les courbes C_{-i} et Γ_{-j} *des cercles, très voisins du cercle fondamental, ayant pour points de Poncelet* ζ_1 *et* ζ_2 (1).

Mais à partir d'une telle fraction rationnelle qui, comme on l'a fait remarquer plus haut, a des coefficients assujettis à des conditions d'*égalité* (conditions de réalité), on peut en définir de beaucoup plus générales, en s'affranchissant de la propriété de conserver le cercle fondamental : si en effet on fait varier assez peu les coefficients de la fraction initiale, chacun de ces coefficients restant, dans son plan, dans une aire assez petite entourant sa valeur initiale, mais par ailleurs étant quelconque, on obtiendra une fraction rationnelle beaucoup plus générale (dont les coefficients ne satisferont plus qu'à des inégalités), ne conservant plus un cercle fondamental, mais pour laquelle, comme pour la fraction initiale, les propriétés fondamentales relatives : 1° à l'existence de deux points limites ζ_1, ζ_2 à convergence régulière ; 2° aux courbes C_{-i} et Γ_{-j}, qui les entourent respectivement, seront encore satisfaites. (Si les variations des coefficients sont assez petites, on pourra en effet conserver pour C_{-i} et Γ_{-j} les cercles indiqués plus haut pour la fraction initiale.

(1) *Voir* le lemme de Schwarz rappelé aux Préliminaires.

Pour cette fraction la division du plan en deux régions R_1 et R_2, par le procédé indiqué plus haut, sera valable. Le continu E' qui sépare R_1 de R_2 sera voisin du cercle fondamental qu'conservait la fraction initiale, puisqu'il est compris entre les cercles C_{-1} et C_{-2} qu'on a choisis pour la fraction initiale aussi voisins qu'on a voulu du cercle fondamental. Dans ce cas l'on peut dire que *le continu linéaire E' a varié de façon continue avec les paramètres de la fraction* $\varphi(z)$, résultat qui est loin d'être évident *a priori*; quant aux deux points limites à convergence régulière, ils ont, eux aussi, varié continûment avec les paramètres de φ, ce qui résulte immédiatement de la continuité de $\varphi(z)$ relativement à ces paramètres [comme aussi de la continuité de $\varphi'(z)$].

56. *Domaine de convergence total vers un point limite à convergence régulière ou vers un groupe circulaire limite.* — Il convient d'appeler ainsi l'ensemble de tous les points du plan dont les conséquents successifs admettent pour seul point limite le point limite considéré, ou pour seul groupe limite le groupe circulaire considéré. Nous allégerons l'exposition en nous bornant au cas du point limite à convergence régulière.

Dans tout ce qui précède, nous nous sommes occupés d'étudier le domaine de convergence *immédiat* R vers le point limite ζ considéré [$\zeta = \varphi(\zeta)$, $|\varphi'(\zeta)| < 1$]. C'était un domaine d'un seul tenant, contenant ζ à son intérieur, n'ayant pour points frontières que des points de E', n'ayant pour point intérieur que des points n'appartenant pas à E', qu'on puisse joindre à ζ par un chemin dont aucun point n'appartienne à E'. Nous avons reconnu que R contenait nécessairement à son intérieur un point au moins où $\varphi'(z) = 0$ dont le conséquent est critique pour la branche de $\psi(z)$ fonction inverse de $\varphi(z)$, qui devient égale à ζ au point ζ. Ceci indique : 1° qu'à tout point z intérieur à R correspond un conséquent intérieur à R [ainsi que tous les conséquents successifs]; 2° que tout point z intérieur à R a *au moins deux antécédents* z_1 *d'ordre* 1 *intérieur à* R, ces deux antécédents devenant égaux à une valeur qui annule $\varphi'(z)$ lorsque z devient égal à un point critique intérieur à R de la branche $\psi(z)$ qui nous intéresse.

Mais il ne résulte nullement de là, ainsi qu'on le verra plus loin, que *tous les antécédents* d'un point intérieur à R soient intérieurs à R. Cela serait vrai par exemple si, à partir d'un certain rang, toutes

les courbes C_{-i} antécédentes l'une de l'autre, qu'on a appris à former précédemment et dont la limite pour $i = \infty$ constitue la frontière de R, étaient formées *d'un seul contour*, limitant une aire *simplement connexe du plan*, telles aussi que chacune de ces C_{-i} (à partir d'un certain rang) découpe dans la surface de Riemann $\mathcal{R}$ à k feuillets relative à $\psi(z)$ une aire S_{-i} à k feuillets superposés, contenant ζ, simplement connexe, limitée par la courbe C_{-i} parcourue k fois. Alors, z décrivant l'intérieur de C_{-i}, l'ensemble de ses k antécédents décrira l'intérieur d'une courbe simple $C_{-(i+1)}$ entourant C_{-i} et contenant C_{-i} à son intérieur. Puisque R est la limite pour $i = \infty$ de l'intérieur de C_{-i}, il est clair que, z décrivant l'intérieur de R, l'ensemble de ses K antécédents décrira aussi l'intérieur de R. Si l'on imagine la portion S de $\mathcal{R}$, simplement connexe, à k feuillets, qui se projette sur R, z décrivant cette S, *chacun de ses antécédents sera fonction uniforme de z sur* S, *et décrira l'intérieur de* R *quand z décrira l'intérieur de* S. S contiendra alors en général $k-1$ points critiques convenables pour $\psi(z)$. Ils devront être tels que, *partant de ζ avec une détermination arbitraire de $\psi(z)$, on puisse revenir en ζ avec telle autre détermination qu'on voudra de $\psi(z)$ après avoir suivi un chemin intérieur à* R (1). *Dans ce cas, réalisé aux numéros* 2°, 3°, *et* 4° *des applications précédentes, le domaine total* D *de convergence vers ζ, se confond avec le domaine immédiat* R (2).

En effet, un point z intérieur au domaine total admettant ζ pour seul point limite de ses conséquents successifs, il arrivera qu'un de ses conséquent z_i d'indice convenable, et tous les conséquents suivants, tomberont dans le domaine R qui contient ζ. D peut donc se définir l'*ensemble des points dont un conséquent* (*d'ordre arbi-*

---

(1) C'est là, en définitive, la condition nécessaire et suffisante pour que R soit identique à D, puisqu'alors à tout point z intérieur à R correspondent k antécédents tous intérieurs à R et tels qu'on puisse passer de l'un à l'autre sans sortir de R en faisant décrire à z des circuits convenables *intérieurs à* R.

(2) Dans l'exemple donné précédemment comme première application.

$$\zeta_1 = \frac{z^2}{z^2+2},$$

R est encore identique à D, car la *condition nécessaire et suffisante* qu'on vient dénoncer se trouve là encore vérifiée, R contenant tous les points critiques de $\psi(z)$.

trairement élevé d'ailleurs) tombe dans R. D *se compose donc de* R *et de toutes les antécédentes successives de l'aire* R.

37. Dans le cas signalé plus haut, l'aire R coïncide avec ses k antécédentes d'ordre 1 : elle coïncide donc avec toutes ses antécédentes successives. Le domaine total D de convergence vers ζ est alors identique à R, domaine immédiat.

On a indiqué plus haut la condition nécessaire et suffisante pour que cette circonstance se produise : c'est que R soit un domaine tel que, partant de ζ avec une détermination arbitraire de $\psi(z)$, on puisse y revenir, par un chemin intérieur à R, avec telle autre détermination de $\psi(z)$ que l'on voudra. C'est dire, en d'autres termes, que l'ensemble des points de $\mathcal{S}$ [surface de Riemann de $\psi(z)$] qui se projettent à l'intérieur de R doit former une surface S *d'un seul tenant à k feuillets* (1) (tous les feuillets de $\mathcal{S}$) contenant ζ.

Ceci exige, dans le cas où tous les points critiques sont simples, c'est-à-dire ne relient entre eux que deux feuillets de la surface $\mathcal{S}$, ou bien ne permutent entre elles que deux déterminations de $\psi(z)$, que R, s'il est simplement connexe (2), *contienne à son intérieur* $k-1$ *points critiques au moins qui permettent, par des circuits convenables intérieurs à* R, *de permuter chacune des* k *déterminations de* $\psi(z)$ *avec les* $(k-1)$ *autres, sans sortir de* R. Si les points critiques sont multiples, ils devront compter pour au moins $(k-1)$ points critiques simples (3).

38. Or il n'est pas difficile *a priori* de constater que cette condition ne peut se trouver réalisée dans la majorité des cas dès que φ

---

(1) S pourra être simplement connexe, comme dans les applications 1°, 2°, 3°, ou d'un ordre de connexion infini, comme dans la première application. Si z décrit R une et une seule fois, son conséquent ζ décrit l'aire S à K feuillets.

(2) Je fais ici cette restriction, car il pourrait arriver que R, sans contenir le nombre de points critiques que j'indique pour les domaines simplement connexes, pût satisfaire à la condition nécessaire et suffisante énoncée plus haut s'il était multiplement connexe. C'est là une question délicate que je réserve pour l'instant.

(3) La condition *est toujours remplie par le domaine immédiat de convergence vers le point a l'infini*, dans le cas où $\varphi(z)$ est un *polynome quelconque de degré k* ; car le point à l'infini compte pour $k-1$ points critiques multiples autour de lui se permutent, en effet, les k branches de la fonction inverse de $\psi(z)$.

degré k de $\psi(z)$ dépasse 2. Lorsque $k = 2$, il suffit d'un point critique dans R pour satisfaire à la condition, et on sait que ce point critique figure toujours dans R, nécessairement; donc la condition est remplie d'elle-même.

Lorsque $k > 2$, nous allons voir que le nombre des points limites à convergence régulière peut atteindre k alors que le nombre des points critiques de $\psi(z)$ ne dépasse pas $2k - 2$. Il est donc impossible, *a priori*, que les domaines de convergence immédiats vers chacun des points limites à convergence régulière, dans tous les cas où l'on aura reconnu qu'ils sont bien simplement connexes [1], ces domaines étant évidemment sans point commun deux à deux, renferment chacun à leur intérieur $k - 1$ points critiques au moins, *dès que le nombre des points limites existants dépasse* 2. On est certain *a priori* dans tous les cas, s'il y a plus de deux points limites à convergence régulière, que pour un au moins de ces points limites le *domaine total de convergence sera plus étendu que le domaine immédiat.* C'est là une circonstance toute nouvelle, elle paraît avoir échappé à tous les auteurs qui se sont occupés jusqu'ici d'itération. Dans tous leurs exemples, que j'ai repris en partie dans les applications précédentes, les domaines totaux de convergence coïncident toujours avec les domaines immédiats. J'en ai montré la raison dans le décompte des points critiques de $\psi(z)$ figurant à l'intérieur des domaines immédiats.

A ce titre, comme je l'annonçais (n° 35) en traitant des applications précédentes, ces exemples étaient *les plus simples* qui puissent se présenter dans l'itération; ils ne conduisaient qu'à une division du plan par E′ en un nombre *fini* de régions R, ils ne laissaient pas soupçonner que E′ pouvait très bien diviser le plan en *une infinité de régions*, et que c'était là-même le cas le plus général dès que le degré de la fraction à itérer dépassait 2. Ils ne faisaient pas prévoir qu'en général le domaine total de convergence, vers un point limite à convergence régulière, se composerait d'*une infinité d'aires*, sans point commun deux à deux, antécédentes successives de l'aire R

---

[1] On verra plus loin sur un exemple que ceci se reconnaît en déterminant, pour chaque point limite à convergence régulière, les points critiques de $\psi(z)$ dont les conséquents convergent vers ce point limite, et examinant les permutations des branches de $\psi(z)$ autour de ces points.

(distinctes de R) qui constitue le domaine de convergence immédiat.

59. Montrons d'abord, en considérant une fraction rationnelle quelconque du degré k, que le nombre des points limites à convergence régulière peut atteindre la valeur k, sans la dépasser. Reportons-nous pour cela au paragraphe de ce Mémoire qui traite de l'existence des points de $E[z = \varphi_n(z), |\varphi_n(z)| > 1]$ (n° 9). Soit

$$\varphi(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

la fraction à itérer, P et Q étant deux polynomes de degré k. Les racines de $z - \varphi(z)$ sont les racines $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{k+1}$ [1] de l'équation

$$R = P - zQ = 0$$

de degré $(k+1)$.

On a d'ailleurs démontré la relation

$$\sum_1^{k+1} \frac{Q(\zeta_i)}{R'(\zeta_i)} = 1.$$

On sait aussi que

$$\varphi'(\zeta_i) - 1 = \frac{R(\zeta_i)}{Q(\zeta_i)}.$$

On a vu aussi que si le point M, d'affixe $\varphi'(\zeta_i)$ est intérieur au cercle de centre O de rayon 1 $[|\varphi'(\zeta_i)| < 1]$, le point N d'affixe $\frac{Q(\zeta_i)}{R'(\zeta_i)}$ est dans le demi-plan

$$\mathcal{R}(z) = \text{partie réelle de } z \geq -\frac{1}{2}$$

et réciproquement.

La relation

$$\sum_1^{k+1} \frac{Q(\zeta_i)}{R'(\zeta_i)} = 1$$

prouve que les $(k+1)$ points $N_1, N_2, \ldots, N_{k+1}$ ont pour centre de gravité le point d'affixe $\frac{1}{k+1}$.

Il s'ensuit immédiatement de là que parmi ces points N_i il *peut*

---

(1) Nous nous plaçons dans le cas général où toutes ces racines sont distinctes.

y en avoir k, mais pas plus, dans le demi-plan $R(z) < -\frac{1}{2}$. On pourra se les donner *a priori*, et le $(k+1)^{\text{ième}}$ sera alors déterminé par la relation précédente.

Connaissant ainsi *a priori* les $(k+1)$ valeurs des $\frac{Q(\zeta_i)}{R(\zeta_i)}$, on formera immédiatement $\frac{Q(z)}{R(z)}$ à l'aide de l'identité

$$\frac{Q(z)}{R(z)} = \sum_{1}^{k+1} \frac{1}{z-\zeta_i} \frac{Q(\zeta_i)}{R'(\zeta_i)}.$$

en se donnant *arbitrairement les* $(k+1)$ *points* ζ_i. $Q(z)$ et $R(z)$ seront respectivement de la forme

$$Q(z) = a_0 z^k + \ldots$$
$$R(z) = a z^{k+1} + \ldots$$

à cause de l'identité

$$\sum_{1}^{k+1} \frac{Q(\zeta_i)}{R'(\zeta_i)} = -1$$

connaissant Q et R on aura $P(z)$ par

$$P(z) = R(z) + z\,Q(z)$$

et la fraction $z_1 = \varphi(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ admettra les points $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ pour points limites à convergence régulière, puisqu'en ces points $|\varphi'(\zeta_i)| > 1$, à cause du choix des k premières valeurs $\frac{Q(\zeta_i)}{R(\zeta_i)}$ dans le demi-plan $R(z) < -\frac{1}{2}$.

On a ainsi le moyen de former une fraction rationnelle $\varphi(z)$ du degré k ayant k points limites [1] à convergence régulière $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ arbitrairement choisis, en lesquels les $\varphi'(\zeta_i)$ ont des valeurs inférieures à 1 en module, arbitrairement choisies *a priori*. C'est une

---

[1] On voit aussi qu'une fraction du degré k ne peut avoir plus de k points limites à convergence régulière. Il y a toujours une racine de $z = \varphi(z)$ qui rend $|\varphi'(z)| > 1$ ainsi qu'on l'a fait remarquer en établissant l'existence des points de l'ensemble E. On voit aussi qu'il est facile de former une fraction sans point limite à convergence régulière.

fraction très générale eu égard aux arbitraires qui entrent dans la question. Pour une telle fraction, $k = 1$, de ces points limites à convergence régulière pourront avoir des domaines totaux de convergence plus étendus que leur domaine immédiat de convergence.

40. Supposons donc que le domaine de convergence immédiat R vers un point limite ζ à convergence régulière ne satisfasse pas à la condition requise pour que le domaine total D de convergence vers ζ soit identique à R. Cela voudra dire que, z décrivant R, *il y a des antécédents de z qui ne sont pas dans* R. Imaginant l'ensemble des points de $\mathcal{R}$ [surface de Riemann de $\psi(z)$, inverse de $\varphi(z)$] qui se projettent à l'intérieur de R, cet ensemble se composera de *plusieurs parties distinctes, chacune d'un seul tenant, telles qu'on ne puisse passer de l'une à l'autre par un chemin dont tous les points se projettent à l'intérieur de* R [1]; l'une de ces parties S, contenant le point ζ du feuillet supérieur, est d'un seul tenant avec la partie du feuillet supérieur qui se projette à l'intérieur de R; z décrivant S, un de ses antécédents z_{-1}, qui est égal à ζ pour $z = \zeta$, est fonction uniforme de z sur S et décrit l'aire simple à un seul feuillet R, z décrivant les parties de $\mathcal{R}$ projetées sur R et ne se ramifiant pas avec S à l'intérieur de R, il y aura des antécédents z_{-1} de z qui ne tomberont pas dans R et *qui décriront des aires simples du plan analytique d'un seul tenant, à un seul feuillet, sans point commun intérieur entre elles, et sans point commun intérieur avec* R (*voir* Préliminaires, § 6); nous appellerons ces aires, les aires R_{-1} pour marquer qu'elles sont décrites par des antécédents d'ordre 1 de z lorsque z décrit R. Ainsi, z décrivant R, ses antécédents décrivent et R, et les aires R_{-1} sans point commun avec R. On continuera de même; z décrivant chacune des aires R_{-1} aucun de ses antécédents ne peut tomber dans une aire R_{-1} ni dans l'aire R [2]; ces antécédents décriront donc un certain nombre d'aires simples, chacune d'un seul tenant, à un seul feuillet; ces aires, que j'appellerai les R_{-2}, n'ont ni point commun intérieur entre elles, ni point commun intérieur avec les R_{-1}, ni avec R. Lorsque z décrit R, ses antécédents d'ordre 2 décrivent R, les R_{-1} et R_{-2}. De même z décrivant les R_{-2}, ses anté-

---

(1) Car autrement R satisferait à la condition nécessaire et suffisante pour que tout point intérieur à R *ait tous ses antécédents dans* R.

(2) Car cela forcerait z à être dans R, ce qui est absurde.

cédents décriront des aires R_{-3} sans point commun avec R, ni avec les R_{-1}, ni avec les R_{-2}, etc.

En continuant indéfiniment, on voit que *le domaine total de convergence vers* ζ *se composera de* R, *des* R_{-1}, ..., *des* R_{-2}, ..., *c'est-à-dire d'une infinité d'aires chacune d'un seul tenant* (1), *à un seul feuillet, et sans point commun intérieur deux à deux.* z décrivant R, ses antécédents d'ordre i décrivent les aires R, R_{-1}, ..., R_{-i}. Les R_{-i} sont les antécédentes des $R_{-(i-1)}$; lorsque z est dans une R_{-i}, son conséquent est dans une $R_{-(i-1)}$, ses antécédents d'ordre 1 sont dans des $R_{-(i+1)}$. Les points frontières de R, sont tous des points de E', on le sait, et tout antécédent d'un point de E' étant de E', tout point frontière d'une R_{-i} sera point de E'. On est ici dans le cas où E' comprend un ensemble continu linéaire et divise le plan en une infinité de régions sans point commun intérieur deux à deux, telles qu'il soit impossible de passer d'un point quelconque d'une région à un point quelconque d'une autre par un chemin qui ne contienne de point de E'.

Parmi ces régions sont toutes les R, R_{-1}, R_{-2}, ...

11. S'il y a un point limite à convergence régulière autre que ζ, aucun des R_{-1} n'aura de point commun intérieur avec son domaine de convergence immédiat ou total; si pour ce deuxième point limite la même circonstance que pour ζ se produit, c'est-à-dire si son domaine immédiat de convergence n'est point identique à son domaine total, on déterminera à partir de son domaine immédiat une série de domaines antécédents l'un de l'autre, analogues à la série des R, R_{-1}, R_{-2}, ..., etc. Il peut d'ailleurs arriver que pour certains points limites à convergence régulière le domaine immédiat R coïncide avec le domaine total D, sans que cela se produise pour d'autres. Nous en verrons des exemples plus loin : il est clair par exemple que, pour un polynome $\varphi(z)$ quelconque de degré k, l'∞ étant point limite à convergence régulière, et aussi point critique pour la fonction $\psi(z)$ inverse de $\varphi(z)$ autour duquel se permutent les k branches de cette fonction, le domaine immé-

(1) Si R est supposée simplement connexe, toutes les R_{-1} le seront si tout morceau d'un seul tenant de la surface de Riemann $\mathcal{R}$ qui se projette sur l'intérieur de R est aussi simplement connexe. Mais, *a priori*, on conçoit très bien que ceci puisse ne pas avoir lieu pour les morceaux de $\mathcal{R}$ distincts du morceau S qui contient le feuillet supérieur.

diat du point à l'infini sera identique à son domaine total; si en outre il y a au moins deux points limites à convergence régulière, à distance finie, on pourra s'attendre à ce que leur domaine total compte une infinité d'aires R, R_{-1}, R_{-2}, ...

Remarquons encore qu'en supposant (ce qui peut se faire par une homographie convenable, par exemple en envoyant à l'infini un point intérieur à R d'où ne résulte aucune ambiguïté sur ce qu'on doit appeler l'aire R) que le point à l'infini n'est pas point *limite* pour l'ensemble des aires R_{-i}, les aires R_{-i} ($i = 1, 2, \ldots, \infty$) ne devant pas avoir de point commun intérieur deux à deux, devront se rapetisser indéfiniment lorsque i grandit indéfiniment, de façon, par exemple, qu'on ne puisse trouver de cercle intérieur à R_{-i} qui conserve un rayon fini lorsque i grandira indéfiniment.

42. *Cas où le domaine de convergence immédiat vers un point limite à convergence régulière n'est pas simplement connexe.* — Je me suis borné, pour montrer que le domaine de convergence total pouvait être plus étendu que le domaine immédiat, aux cas où l'on reconnaissait, *a priori*, que le domaine immédiat R était simplement connexe. On peut aussi étudier le cas où R est multiplement connexe. Il est clair, par la façon même dont ce domaine R a été envisagé comme limite pour $i = \infty$ des aires (C_{-i}) antécédentes successives convenables de la petite aire (C) entourant le point limite ζ, que R sera multiplement connexe si et seulement si, à partir d'un certain indice i, les aires (C_{-i}) le sont aussi. Il faudra donc, et c'est une condition suffisante, qu'une certaine courbe C_{-i} formée d'un *seul contour*, embrasse une aire (C_{-i}) dont l'antécédente $C_{-(i+1)}$ soit limitée par *plusieurs contours*. Cela exige que la portion d'un seul tenant de $\mathfrak{A}$ (surface de Riemann de $\zeta(z)$), appelée précédemment S_{-i}, qui se projette à l'intérieur de (C_{-i}) et qui contient le point ζ du feuillet supérieur, soit *multiplement connexe*, et pour cela il est indispensable que S_{-i} soit limitée par *plus d'un contour*. S_{-i} devra être limitée par plusieurs courbes fermées dont chacune se projettera sur la courbe C_{-i}, chacune de ces diverses courbes fermées pouvant être tracée sur plusieurs feuillets de $\mathfrak{A}$, mais ces diverses courbes étant telles qu'on ne puisse passer d'un point de l'une à un point d'une autre courbe distincte de la première que par un chemin qui traverse l'*intérieur* de S_{-i}. Autrement dit, encore, si l'on imagine que z décrive le contour de

(C_{-i}) la fonction algébrique $\psi(z)$ inverse de $\varphi(z)$ échange entre elles p de ses déterminations, d'une part, et d'autre part p' autres déterminations. Il est impossible, lorsque z décrit le contour C_{-i} de passer de l'une des p premières déterminations à l'une des p' autres détermination considérées, mais, et c'est là le fait important, partant d'un point de C_{-i} avec une des p premières déterminations, on peut revenir en ce point *avec une des p' autres envisagées*, à condition de décrire un chemin intérieur à (C_{-i}). Pour avoir un exemple simple, il suffit d'imaginer que, $\varphi(z)$ étant du deuxième degré, C_{-i} soit une courbe simple fermée entourant les deux points critiques de $\psi(z)$. Alors S_{-i} sera une surface de Riemann doublement connexe à deux feuillets, limitée par deux courbes distinctes tracées chacune sur un feuillet de $\mathcal{R}$ et chacune projetée sur C_{-i}, les deux feuillets de S_{-i} étant réunis par une ligne de croisement joignant les deux points critiques, ligne qu'on peut supposer intérieure à C_{-i}.

45. Revenant au cas général, en supposant bien entendu que les points critiques de $\psi(z)$ sont simples et au nombre de $2k-2$ (k étant le degré de φ), il résulte d'un procédé classique exposé par exemple dans le *Traité d'Analyse* de M. Picard, t. II, 2e édition, p. 416-417, qu'on peut supposer les k feuillets de $\mathcal{R}$ unis chacun au précédent par une *seule ligne de croisement*. Dans ces conditions, sur les p premiers feuillets de $\mathcal{R}$, C_{-i} découpe une courbe fermée Γ_{-i} et sur les p' feuillets suivants, elle découpe une autre courbe fermée Γ_{-i}[1]. Γ_{-i} et Γ_{-i} sont des contours de S_{-i} : on ne peut passer d'un point de Γ_{-i} à un point de Γ_{-i} que par un chemin *intérieur* à S_{-i} et nullement en suivant le bord de S_{-i}. Cela implique que la ligne de croisement unique entre le $p^{\text{ième}}$ feuillet et le $(p+1)^{\text{ième}}$ a ses deux extrémités *intérieures à* S_{-i} [ce sont deux points critiques convenables de $\psi(z)$] et il est bien clair, les lignes de croisement étant dans une certaine mesure arbitraires entre leurs extrémités connues, qu'on peut toujours supposer la ligne de croisement entre le $p^{\text{ième}}$ et le $(p+1)^{\text{ième}}$ feuillet *intérieure tout entière à* S_{-i}. Il suit de là cette conséquence fort importante que, partant d'un point z du plan extérieur à (C_{-i})

---

(1) Si $p+p'=k$, C_{-i} découpera encore d'autres courbes dans $\mathcal{R}$, mais cela ne nous préoccupe pas pour l'instant.

avec une des p déterminations de $\psi(z)$ qui correspondent aux p premiers feuillets de α, on ne peut passer à une quelconque des autres déterminations de ψ qu'en décrivant un circuit fermé qui *traverse l'aire* (C_{-p}) en traversant la ligne de croisement entre le $p^{\text{ième}}$ et le $(p+1)^{\text{ième}}$ feuillet. Donc tout circuit fermé qui ne traversera pas l'aire (C_{-p}) ramènera en z une des p premières déterminations de $\psi(z)$ du système auquel appartenait la détermination initiale. De même, si l'on part de z, extérieur à (C_{-p}) avec toute autre détermination de $\psi(z)$ qu'une des p déterminations précédentes, on ne pourra jamais revenir en z avec une de ces p déterminations, si le circuit décrit ne traverse pas (C_{-p}).

44. La conclusion est immédiate. S'il existe un point limite à convergence régulière ζ' distinct de ζ, son domaine immédiat R' ne ne pourra pas satisfaire à la condition nécessaire et suffisante pour que R' soit aussi le domaine total, puisque, évidemment, R' étant extérieur à R, sera extérieur à (C_{-p}) et, partant d'un point z intérieur à R' avec une des p premières déterminations de $\psi(z)$ et décrivant un circuit fermé quelconque intérieur à R', on ne traversera pas (C_{-p}) et l'on ne pourra pas revenir en z avec une $(k-p)$ déterminations de $\psi(z)$ distinctes des p premières. Donc le domaine total de ζ se composera d'une *infinité d'aires* distinctes sans point commun deux à deux.

L'hypothèse que le domaine de convergence immédiat vers un des points limites est multiplement connexe, conduit donc à cette conclusion intéressante que le domaine total de *tout autre* point limite sera composé d'une infinité d'aires. Le fait que j'annonce page 148 est donc GÉNÉRAL : *Pour toute fraction de degré k qui a plus de deux points limites à convergence régulière, il ne peut y avoir qu'un de ces points limites au plus qui ait un domaine de convergence immédiat confondu avec son domaine total.* En effet, ou bien un des points limites a un domaine immédiat multiplement connexe, et alors *tous les autres ont un domaine total* (composé d'une infinité d'aires distinctes) *plus grand que leur domaine immédiat de convergence*, ou bien tous les points limites ont un domaine immédiat simplement connexe, il y en aura alors un au plus qui possédera à son intérieur les $(k-1)$ points critiques tels que soit vérifiée la condition nécessaire et suffisante pour que ce domaine soit identique au domaine total de convergence vers le point limite considéré.

45. Une autre conséquence non moins intéressante se tire de l'étude précédente. Si, *a priori*, on vérifie que l'un des points limites a un *domaine de convergence total identique à son domaine de convergence immédiat* [ce qui se fera, en général, en déterminant les points critiques de $\psi(z)$ qui sont intérieurs au domaine immédiat considéré], on peut affirmer, s'il existe d'autres points limites à convergence régulière, que les domaines immédiats de convergence vers chacun de ces autres points limites *sont tous simplement connexes*.

46. Il n'est pas difficile non plus de tirer des considérations précédentes ce fait que le *domaine immédiat* $\mathcal{R}$ *de convergence vers un point limite* ζ *ne peut être multiplement connexe sans avoir un ordre de connexion infini* (1). On a vu en effet que, si (C_{-i}) est la première aire antécédente de l'aire (C), qui détermine dans la surface de Riemann $\mathcal{R}$ une surface de Riemann (S_{-i}), multiplement connexe, contenant le point ζ du feuillet supérieur, la seule ligne de croisement L entre le $p^{\text{ième}}$ et le $(p+1)^{\text{ième}}$ feuillet peut toujours être supposée *intérieure* à (S_{-i}). L'aire $(C_{-(i+1)})$, antécédente de (C_{-i}), sera donc limitée par autant de contours distincts que (S_{-i}) aura elle-même de contours distincts. Donc l'aire $(C_{-(i+1)})$ aura au moins deux contours distincts dont évidemment aucun ne traversera la ligne de croisement L puisque tous ces contours sont extérieurs à (C_{-i}), l'aire $(C_{-(i+1)})$ contenant (C_{-i}) à son intérieur. Si alors on considère la surface de Riemann $S_{-(i+1)}$ qui est formée des points de $\mathcal{R}$ projetés à l'intérieur de $(C_{-(i+1)})$ qu'on peut unir à ζ du feuillet

(1) C'est là une propriété qui est vraie de tout domaine R d'un seul tenant limité par l'ensemble E'. Un tel domaine, s'il est multiplement connexe, a une connexion d'ordre infini. En effet, l'existence d'une courbe Γ fermée, dont tous les points sont intérieurs à R et dont l'intérieur et l'extérieur contiennent chacun des points de E' (ceci équivaut à dire que R n'est pas simplement connexe), entraîne *l'existence d'une telle courbe dans toute aire, si petite soit-elle, entourant un point frontière de* R d'où suit la propriété énoncée, car une telle aire a toujours une itérée qui contient à son intérieur Γ ainsi que l'aire une limitée par Γ [il ne peut y avoir exception que pour les fractions banales $z_1 - a = (z - a)^k$, $z_1 - a = \frac{1}{(z-a)^k}$ pour lesquelles la question ne se pose pas; pour les polynomes le point exceptionnel rejeté à l'infini ne gêne pas]. On a d'ailleurs vu (p. 101, note 2) que E' ne pouvait être formé de plusieurs continus linéaires distincts sans point commun deux à deux, ce qui équivaudrait à une connexion d'ordre fini.

supérieur par un chemin continu tracé sur $\mathfrak{R}$ et se projetant à l'intérieur de $(C_{-(i+1)})$, il est visible que chacun des contours de $(C_{-(i+1)})$ donnera naissance au moins à deux contours de $S_{-(i+1)}$ projetés sur le contour considéré de $(C_{-(i+1)})$. En effet, z décrivant un contour de $(C_{-(i+1)})$, $\psi(z)$ supposé partie d'une des p déterminations qui correspondent aux p premiers feuillets de $\mathfrak{R}$ n'échangera la détermination initiale qu'avec une autre des p déterminations précédentes sans jamais faire passer à la détermination qui correspond au $(p+1)^{\text{ième}}$ feuillet, ni aux suivants; donc $S_{-(i+1)}$ a un premier contour limite projeté sur le contour considéré de $(C_{-(i+1)})$ et tracé sur tout ou partie des p premiers feuillets de $\mathfrak{R}$. Mais, $S_{-(i+1)}$ ayant des points intérieurs dans le $p+1^{\text{ième}}$ feuillet, et plus généralement dans les p' feuillets qui suivent les p premiers, le même raisonnement que précédemment, fait sur le même contour de $(C_{-(i+1)})$, en substituant les p' déterminations de $\psi(z)$ qui suivent les p déjà considérées à ces p déterminations, prouvera que $S_{-(i+1)}$ a aussi un deuxième contour limite projeté sur le même contour de $(C_{-(i+1)})$ et tracé sur tout ou partie des p' feuillets de $\mathfrak{R}$ qui suivent les p premiers. La conclusion est que $S_{-(i+1)}$ aura au moins 2^2 contours ainsi que $(C_{-(i+2)})$. En continuant le même raisonnement, on verra que $S_{-(i+1)}$ aura au moins 2^{p-1} contours, ainsi que $(C_{-(i+p-1)})$; tous ces contours sont extérieurs deux à deux [1], $(C_{-(i+p-1)})$ est l'aire d'un seul tenant limitée par tous ces contours et contenant Z à son intérieur. R, limite de (C_{-n}) pour $n=\infty$, a donc un ordre de connexion infini.

On a déjà rencontré des exemples de ce fait (*Voir* Fatou, *Comptes rendus*, 15 octobre 1906), et l'on en a rappelé dans la première partie (*voir* p. 58). C'est ainsi que pour $z_1 = 2z^4 + 1$, le domaine de convergence vers le point à l'infini est d'une connexion d'ordre infini, il est limité par les points de l'ensemble parfait discontinu E' : c'est un cas où les contours limites envisagés précédemment tendent vers zéro dans toutes leurs dimensions, quand p devient infini; il n'y a alors qu'un seul point limite à convergence régulière. Mais je donnerai plus loin un exemple avec plusieurs points limites à convergence régulière, l'un d'eux ayant un domaine immédiat, dont la connexion est d'ordre infini, limité par

[1] Dans le plan des z, il peut y en avoir un qui contient tous les autres, mais sur la sphère de Riemann ceci n'a pas lieu.

une infinité de *courbes*, et non plus seulement par un ensemble discontinu de *points*.

47. *Exemples.* — J'en donnerai de trois sortes : d'abord, sur un exemple particulier, j'étudierai le mode de génération et de groupement des domaines $R, R_{-1}, \ldots$ rencontrés au cours de l'étude précédente ; puis je montrerai que l'application de la règle de Newton, pour la recherche des racines d'un polynome quelconque de degré > 2, conduit immédiatement aux circonstances précédentes, ce qui explique l'insuccès de la tentative de Cayley, quand il a voulu délimiter le plan en diverses régions suivant la racine du polynome, à laquelle conduit l'application de la règle de Newton en partant d'un point quelconque de la région considérée [1]. Il avait très bien réussi, et nous le montrerons, pour les équations du deuxième degré, à diviser le plan en deux régions contenant chacune une racine à laquelle conduit par approximations successives la méthode de Newton en partant d'un point quelconque de cette région ; nous verrons que la solution ne peut être aussi simple pour les degrés > 2, le domaine de convergence total vers une racine pouvant alors se composer d'une infinité d'aires séparées.

Enfin, je donnerai l'exemple d'un domaine immédiat multiplement connexe qui n'est pas limité uniquement par un ensemble parfait discontinu de *points*.

48. *Premier exemple.* — Considérons le polynome

$$\varphi(z) = \frac{z^3 - 1}{3}.$$

Il y a trois points limites à convergence régulière :

1° $z = 1$, $\varphi'(1) = 0$.

2° $z = -1$, $\varphi'(-1) = 0$.

3° $z = \infty$, comme pour tout polynome.

L'équation $z = \varphi(z) = \frac{z^3 - 3z}{3}$ admet encore la racine $z = 0$ pour laquelle $\varphi'(0) = \frac{3}{3}$: elle appartient à l'ensemble E.

[1] *Voir* Koenigs, *Annales de l'École normale*, 1884, Supplément, p. 40 et 41. — Cayley, *C. R. Acad. Sc.*, t. CX, 1890, p. 215-218. Il dit, en concluant : « J'espère appliquer cette théorie au cas d'une équation cubique, mais les calculs sont beaucoup plus difficiles. » Il n'a pas poussé la question plus loin.

Du calcul de $\varphi'(z) = \frac{3(1-z^2)}{2}$, il suit que les points qui annulent $\varphi'(z)$ sont $z = 1$ et $z = -1$; ils sont à eux-mêmes leurs conséquents.

Les points critiques de $\psi(z)$, l'inverse de $\varphi(z)$, sont donc au nombre de trois.

1° Le point $z = 1$ autour duquel se permutent deux branches de $\psi(z)$ qui sont égales à 1 pour $z = 1$ [car $\varphi(1) = 0$ et $\varphi'(1) \neq 0$].

2° Le point $z = -1$ autour duquel se permutent deux branches de $\psi(z)$ qui sont égales à (-1) pour $z = -1$ [car $\varphi'(-1) = 0$, $\varphi(-1) \neq 0$].

3° Le point $z = \infty$, autour duquel se permutent les trois branches de $\psi(z)$, qui toutes trois deviennent infinies pour $z = \infty$.

On peut affirmer de suite qu'*en dehors des trois points limites à convergence régulière cités plus haut, il n'y a ni autre point limite, ni groupe circulaire limite.* Car chacun des trois points limites à convergence régulière $(\infty, 1, -1)$ aura dans son domaine immédiat un point critique de $\psi(z)$ $(\infty, 1, -1)$ et puisqu'il n'y a que trois points critiques, il ne peut y avoir ni quatrième point limite à convergence régulière, ni d'autre groupe circulaire limite.

Cherchons à former les domaines de convergence immédiats de chacun des points $1, -1, \infty$. Il suffit de considérer 1 et ∞, car le domaine de (-1) sera symétrique de celui du point 1 par rapport à l'origine, à cause de l'imparité du polynome $\varphi(z) = \frac{-z^3 - 3z}{2}$

$$\varphi(z) = -\varphi(-z),$$

donc à deux points symétriques par rapport à O correspondent deux conséquents symétriques par rapport à O.

Pour le point $z = \infty$, on peut partir du cercle C de centre O de rayon $\rho = |z| = 3$. Si z est un point quelconque tel que $|z| > 3$, on aura

$$|z| = \frac{-z^3 - 3z}{2} = 3,$$

et par suite le domaine (C) limité par $|z| = 3$ contenant le point à l'infini [1] est tout entier intérieur au domaine de convergence immédiat vers ∞.

---

[1] Ce domaine (C) n'est autre que l'extérieur du cercle C au sens ordinaire du mot, en comprenant dans [1] le point à l'infini.

Cherchons les antécédents successifs du domaine (C) pour avoir le domaine immédiat de convergence vers ∞. Si z décrit l'intérieur du domaine (C), ses trois antécédents décrivent l'intérieur d'un domaine (C_{-1}) contenant le point à l'infini, ainsi que (C), et limité par une seule courbe algébrique simple C_{-1} antécédente de C. Si z décrit C_{-1} une fois dans le sens positif, z_1 décrira C trois fois dans le sens positif; tout ceci résulte du simple fait que $z = \infty$ est un point critique autour duquel se permutent les trois branches de $\psi(z)$ fonction inverse de $\varphi(z)$, et c'est le seul point critique contenu dans (C). La courbe C_{-1} se définit très simlement par l'équation

$$\left(\frac{-z^2+4z}{4}\right) = 1.$$

Elle entoure les deux points -1 et $+1$, et les sépare du cercle C [1]. z décrivant l'intérieur du domaine (C_{-1}) ses trois antécédents décriront l'intérieur d'un domaine (C_{-2}) qui contient (C_{-1}) et qui est limité par une courbe algébrique simple C_{-2} antécédente de C_{-1}. C_{-2} entoure les deux points -1 et $+1$ et les sépare de la courbe C_{-1}. On continuera indéfiniment ainsi. Toutes les aires antécédentes successives (C), (C_{-1}), (C_{-2}), ... sont des aires simplement connexes chacune est contenue dans les suivantes; et contient le point à l'infini. (C_{-i}) est limitée par une courbe algébrique simple C_{-i} qui entoure les points (-1) et $(+1)$ et les sépare des courbes C_{-i+1}, ..., C. La limite de (C_{-i}) pour $i = \infty$ est un domaine R_∞, simplement connexe, contenant le point à l'infini, laissant à son *extérieur* les points -1 et $+1$ (ainsi que des cercles assez petits ayant pour centres ces deux points), tel que toute courbe fermée simple intérieure à R_∞, ou bien entoure les deux points -1 et $+1$, ou bien n'en entoure aucun, les laissant tous deux à son extérieur, mais ne sépare jamais -1 de $+1$ [2]. N'insistons par pour le moment sur la nature de la frontière de R_∞, nous verrons plus loin que c'est en effet *une courbe continue ayant des points multiples denses partout sur elle-même*. Sachons seulement,

---

(1) C'est-à-dire qu'on ne peut aller du point 1 par exemple, à un point de C sans traverser C_{-1}.

(2) Cette propriété résulte du fait que toute courbe fermée intérieure à R est, à partir d'un certain rang, intérieure à tous les domaines (C_{-i}) pour chacun desquels la propriété en question est évidente.

ce qui résulte immédiatement des faits précédents, que cette frontière est un continu séparant tout point intérieur à R_∞ des points (-1) et $+1$. Le point à l'infini étant point critique autour duquel se permutent les trois branches de $\psi(z)$, l'aire R_∞ coïncide avec toutes ses antécédentes : c'est à la fois le domaine immédiat et le domaine total de convergence vers le point à l'infini.

Il est bon de remarquer que tout point de l'axe imaginaire (excepté l'origine) est intérieur au domaine R_∞ ; il suffit pour s'en assurer de remarquer que si l'on pose $z = i\lambda$, $z_1 = i\lambda_1$, λ étant réel, λ_1 le sera aussi et l'on aura

$$\lambda_1 = \frac{\lambda^3 - 3\lambda}{2};$$

tout point de l'axe imaginaire a donc tous ses conséquents sur cet axe, et ces conséquents tendent régulièrement vers le point à l'infini, car on a toujours $|\lambda_1| > \frac{3}{2}|\lambda|$ dès que $\lambda \neq 0$.

L'origine est un point frontière [1] de R_∞, c'est un *point multiple* de cette frontière, car on peut atteindre ce point O, en restant dans R_∞ [2], par le côté positif et par le côté négatif de l'axe imaginaire, et il est impossible de joindre un point infiniment voisin de O situé sur le demi-axe imaginaire positif à un point infiniment voisin de O situé sur le demi-axe imaginaire négatif par un chemin infiniment petit qui ne sorte pas de R_∞. (Un tel chemin doit en effet couper l'axe réel en un point infiniment voisin de O, et l'on verra que les points de l'axe réel, aux environs de O, sont extérieurs à R_∞.)

L'axe imaginaire tout entier, sauf l'origine, appartenant à R_∞, il en sera de même de toutes les courbes antécédentes de cet axe (il est confondu avec toutes ses conséquentes). Les antécédentes d'ordre 1 sont : cet axe lui-même et, en outre, une hyperbole dont l'équation se tire de

$$\eta\left(\frac{z^3 - 3z}{2}\right) = 0.$$

---

(1) C'est un point de E, $\varphi(0) = 0$, $|\varphi'(0)| = 1$.

(2) L'origine est donc un point frontière de R_∞ *accessible par l'intérieur* de R_∞ (*voir* Préliminaires, § 4).

en posant $z = x + iy$. Cette hyperbole a pour équation

$$x^2 - 3y^2 - 3 = 0$$

Elle passe par les deux points $x = \pm\sqrt{3}$ de l'axe réel qui sont les deux antécédents de l'origine distincts de O. Ces deux points sont des points frontières de R_∞, tous les autres points de l'hyperbole sont intérieurs à R_∞.

Les antécédentes successives de cette hyperbole seront aussi des courbes intérieures à R_∞. L'axe imaginaire et l'axe réel sont axes de symétrie pour R_∞, puisque à deux points symétriques par rapport à Ox ou à Oy la transformation $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{z}{z_1}\right)$ fait correspondre deux points symétriques par rapport à Ox ou à Oy. Donc (au sens de la théorie des images par rapport à une courbe algébrique), toutes les courbes antécédentes de l'axe imaginaire ou de l'axe réel sont des axes de symétrie de R_∞ puisque à deux points de R_∞ symétriques par rapport à Oy, ou à Ox, correspondent, par la transformation $z_1 = \psi(z)$ inverse de $\varphi(z)$, deux antécédents symétriques par rapport à l'antécédente considérée de Oy ou de Ox. Toutes ces courbes antécédentes successives de l'axe imaginaire couperont l'axe réel à angle droit (l'axe réel coïncide avec une de ses propres courbes antécédentes), comme l'axe imaginaire lui-même, en des points qui seront tous les antécédents successifs réels de l'origine et qui sont des points frontières de R_∞. Ce seront des courbes algébriques dont les degrés iront constamment en croissant. Elles passent toutes par le point à l'infini qui coïncide avec tous ces antécédents. Dans le plan complet (ou sur la sphère de Riemann) elles sont à considérer comme des courbes fermées ayant le point à l'infini comme point multiple. Ainsi l'hyperbole $x^2 - 3y^2 - 3 = 0$ est à considérer comme une courbe fermée ayant pour point double le point à l'infini, les tangentes de ce point double (asymptotes), jointes à l'axe imaginaire (qui est aussi une courbe antécédente de l'axe imaginaire), étant régulièrement disposées en étoile autour du point à l'infini; ces tangentes (asymptotes de l'hyperbole) font en effet des angles de 60° entre elles et avec l'axe imaginaire. Tout ceci résulte de ce que l'axe imaginaire, dont on prend les antécédentes, passe par le point critique $z = \infty$ de $z_{-1} = \psi(z)$ autour duquel les *trois branches de* $\psi(z)$ *se permutent* et il est inutile d'insister plus longuement là-dessus. Ajoutons que

les *antécédents successifs de l'origine* sont tous points frontières de R_∞ et sont *partout denses sur la frontière de* R_∞. Ils sont tous, comme l'origine elle-même, *points multiples de cette frontière* [1], et c'est là un fait remarquable qu'on a signalé plus haut. On a vu d'ailleurs, au début de ce Mémoire, que les points frontières d'un domaine comme R_∞ sont des points de E'; d'autre part tout point de E', étant limite pour les antécédents d'un point arbitraire du plan (sauf l'infini) et en particulier d'un point intérieur à R_∞, devra être point frontière de R_∞, puisque les antécédents successifs d'un point intérieur à R_∞, étant tous intérieurs à R_∞, tout point limite pour ces antécédents devra être limite de points intérieurs à R_∞. *La frontière de* R_∞ *épuise donc tout l'ensemble* E' *auquel donne naissance la raction frationnelle*

$$z_1 = -\frac{z^3 + 3z}{9}.$$

Ceci, on le verra, est la source d'apparents paradoxes qui résultent de notre intuition élémentaire de la frontière d'un domaine sous forme de courbe simple, dès qu'on éclaircit la nature des domaines de convergence vers les points (-1) et $(+1)$. Tous ces paradoxes s'expliquent d'ailleurs parfaitement dès qu'on remarque, ainsi que je l'ai fait précédemment avec insistance, que la frontière de R_∞ renferme des *points multiples* partout denses sur elle-même.

Si l'on étudie l'axe réel, on voit bien facilement que seules appartiennent à R_∞ les deux demi-droites de cet axe qui vont de $(-\sqrt{3})$ à $(+\infty)$ et de $(+\sqrt{3})$ à $(-\infty)$.

Les points $+\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$ forment d'ailleurs un groupe circulaire appartenant à l'indice 2. Ils appartiennent à E, car ils satisfont à

$$z = z_1(z) \quad \text{avec} \quad |z_1(z)| > 1.$$

Ils sont points frontières de R_∞. Dès que $|z| > \sqrt{3}$, on a, en effet, $|z_1| > |z|$ et les conséquents d'un point du demi-axe $(+\sqrt{3}, -\infty)$, par exemple, tendent régulièrement sur cet axe vers $+\infty$.

---

(1) Et, comme l'origine, ils sont points frontières de R_∞ *inaccessibles par l'intérieur de* R_∞ : on les atteint par exemple en suivant une courbe asymptotique de l'axe imaginaire.

49. Passons maintenant au point $z = 1$ pour déterminer son domaine de convergence immédiat R_1. Nous partirons pour cela d'un petit cercle Γ de centre $z = 1$ dont les antécédentes successives embrasseront un domaine contenant $z = 1$ de plus en plus grand et tendant vers R_1. Ce cercle Γ devra être tel, nous le savons, que, si z décrit son intérieur, le conséquent z_1 devra rester dans une aire *complètement intérieure à* Γ.

Si ρ_0 est le rayon de Γ on devra avoir, dès que $|z-1| < \rho_0$,

$$|z_1 - 1| < K|z-1|,$$

K étant entre 0 et 1.

Or il est facile d'avoir la relation

$$z_1 - 1 = \frac{(z-1)(-3(z-1))}{2}.$$

Si $|z-1| = \rho$, on a

$$\rho_1 = |z_1 - 1| < \frac{\rho^2 + 3\rho^2}{2}.$$

Pour que $\rho_1 < \rho$, il suffit que $3\rho + \rho^2 < 2$, c'est-à-dire

$$0 < \rho < \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}.$$

Si donc on choisit ρ_0 positif et $< \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$, par exemple $\rho_0 = \frac{1}{2}$, on est sûr que pour $|z-1| < \rho_0$, on aura

$$|z_1 - 1| < K|z-1|,$$

K étant entre 0 et 1.

Imaginons que z décrive l'intérieur (Γ) de Γ; alors la branche de $\psi(z)$ inverse de $\varphi(z)$, qui présente en $z = 1$ un point critique simple, décrira l'intérieur d'une aire (Γ_{-1}) antécédente de (Γ), comprenant (Γ) à son intérieur. Γ_{-1} est la courbe limite de (Γ_{-1}) [1]. Si z est dans (Γ), il y a deux de ses antécédents et deux seulement dans (Γ_{-1}), ce sont les deux antécédents qui se permutent quand z fait un tour autour du point $z = 1$. Si l'on imagine deux feuillets superposés et ramifiés l'un à l'autre en $z = 1$ et l'aire à deux feuillets simplement connexe Σ découpée dans ces deux feuillets par Γ, contenant

[1] Γ_{-1} est évidemment une courbe algébrique simple fermée entourant $z = 1$. Elle rencontre l'axe réel à angle droit, comme Γ lui-même.

$z = 1$ et limitée par Γ deux fois parcouru, l'aire (Γ_{-1}) sera l'aire simple du plan analytique que décrira le point $z_{-1} = \psi(z)$ lorsque z décrira l'aire Σ [$\psi(z)$ est en effet uniforme sur Σ et ne prend qu'une fois chacune de ses valeurs dans Σ]. Γ ne rencontrant pas l'axe imaginaire Oy, Γ_{-1} *ne le rencontrera pas non plus*. Il est bon de remarquer encore que, lorsque z décrira (Γ), le troisième antécédent de z décrira une aire simple à un seul feuillet entourant le point $z = -2$ (qui est antécédent de $z = 1$) et limitée par une courbe algébrique simple fermée, *sans point commun avec* Oy, entourant $z = -2$.

La suite du processus est immédiate; z_{-1} décrivant l'intérieur de (Γ_{-1}), deux de ses antécédents z_{-2} décriront l'intérieur d'une aire simple (Γ_{-2}) limitée par une courbe algébrique fermée Γ_{-2}, sans point commun avec Oy, entourant Γ_{-1}; le troisième antécédent décrira une aire simple limitée par une courbe algébrique fermée, sans point commun avec Oy, entourant le point $z = -2$. Il est à peine besoin de remarquer que toutes les aires (Γ), (Γ_{-1}), (Γ_{-2})... successives que l'on construira ainsi seront toutes *intérieures* au cercle C de rayon $\rho = 3$, de centre O qui a servi de point de départ dans la construction de R_∞. Toutes ces aires seront dans la région intérieure à ce cercle, limitée par Oy, qui contient $z = 1$, c'est-à-dire dans la moitié *droite* de l'aire limitée par le cercle. Quant aux régions que décrirait le troisième antécédent de z, lorsque z décrit une des (Γ_{-i}), elles sont toutes dans la moitié *gauche* de l'aire limitée par C, et jamais elles n'auront de point commun ni avec Oy ni avec les aires (Γ_{-i}). Toutes les aires (Γ_{-i}) sont simplement connexes; leur limite, pour $i = \infty$, qui est le domaine de convergence immédiat R_1 vers $z = 1$, est donc une *aire simplement connexe* contenant $z = 1$, située dans la moitié droite de l'aire limitée par C. On reconnaît immédiatement que la portion d'axe réel comprise entre l'origine et le point d'abscisse $+\sqrt{3}$ appartient à R_1, les points O et $\sqrt{3}$ eux-mêmes sont frontières pour R_1 [$-\sqrt{3}$ est d'ailleurs antécédent de l'origine]. O est d'ailleurs le seul point où la frontière de R_1 touche l'axe imaginaire Oy.

30. Le domaine R'_1 symétrique de R_1 par rapport à l'origine est le domaine de convergence immédiat vers $z = -1$. Il contient le segment $(O, -\sqrt{3})$ de l'axe réel. La frontière de R'_1 comme celle de R_1 appartiennent à E'. Sur ces frontières les antécédents de

l'origine sont partout denses, mais alors que l'origine, considérée comme point frontière de R_∞, était point multiple de cette frontière, il ne semble pas *a priori* qu'elle soit point multiple de la frontière de R_1 ou de R'_1. Cela tient à ce que les courbes C_{-i}, entourant l'origine, dont la limite donnait la frontière de R_∞, tendaient à admettre l'origine (et tous ses antécédents) comme point double,

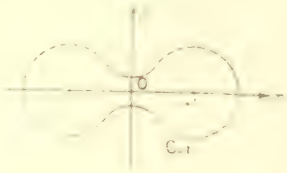


Fig. [illegible].

c'est-à-dire que deux arcs distincts de C_{-i}, symétriques par rapport à l'origine, séparés l'un de l'autre par une longueur finie de courbe, deux arcs, non infiniment voisins *sur la courbe*, tendaient tous deux vers O lorsque i grandissait indéfiniment, tandis qu'il ne semble pas *a priori* que sur (Γ_{-i}) deux arcs distincts, non infiniment voisins sur cette courbe, tendent tous deux vers O, puisque les (Γ_{-i}) *n'entourent pas l'origine* et n'atteignent pas Oy [1].

R_1 et R'_1 se touchent en leur point frontière commun O, et en ce point seulement. R_1 et R'_1 touchent le domaine R_∞ en O, comme en tous leurs points frontières, puisque tous ces points étant de E',

[1] Voici d'ailleurs une démonstration rigoureuse de ce fait que O, comme d'ailleurs tout point de la frontière de R_1 (ou de R'_1) qui est accessible par l'intérieur de R_1 (ou de R'_1), est *point simple* pour cette frontière. Prenons O par exemple; si c'était un point multiple pour la frontière de R_1, il existerait une ligne simple L fermée (ligne de Jordan) passant en O, dont chaque point distinct de O soit *intérieur* à R_1, et qui ne pourrait se réduire en seul point O par un mouvement continu sans rencontrer un point frontière au moins de R_1 distinct de O (c'est là la définition des points multiples d'une frontière); c'est dire que cette ligne contiendrait *à son intérieur* (on sait très bien qu'une ligne de Jordan divise le plan en une région intérieure et une région extérieure) un point Q, au moins, frontière de R_1. Ce point Q serait point de E', il serait donc point frontière de R_∞, car E' est identique à la frontière de R_∞. Il y aurait donc, *dans tout voisinage de* Q, des points *intérieurs* à R_∞. Il existerait donc dans la région intérieure à L une infinité de points intérieurs à R_∞. J'en prends un au hasard Q'. Prenant d'autre part un point Q'' intérieur à R_∞, et qui soit sûrement extérieur

appartiennent à la frontière de R_∞ [1]. Il faut maintenant déterminer les domaines de convergence totaux D_1 et D'_1 vers les points $z = 1$ et $z = -1$.

31. Si z est dans R_1, deux de ses antécédents sont dans R_1, le troisième décrit une aire simplement connexe que je désigne par $R_1^{(-1)}$, entourant le point $z = -2$, contenant à son intérieur un petit segment de l'axe réel, débutant à $z = -\sqrt{3}$, segment qui est antécédent réel du segment $(0, +\sqrt{3})$, du même axe. $R_1^{(-1)}$ n'accède par aucun point à l'axe Oy, car R_1 n'y accède que par le point O, dont les antécédents sont O, $(+\sqrt{3})$ et $(-\sqrt{3})$; il est tout entier à gauche de Oy, il n'a pas de point commun, même frontière, avec R_1, et il touche R_1 au point $z = -\sqrt{3}$ et en ce point seulement. $R_1^{(-1)}$ est intérieur au cercle C. Lorsque z décrira $R_1^{(-1)}$, chacun de ses trois antécédents est fonction analytique de z dans $R_1^{(-1)}$ et décrit par suite une aire simple à un seul feuillet simplement connexe : ces trois aires sont complètement extérieures les unes aux autres, elles sont extérieures à $R_1^{(-1)}$, à R_1, et à R'_1, je les appelle les aires $R_1^{(-2)}$: l'une d'elles contient un petit segment de l'axe réel positif antécédent réel du segment de l'axe réel négatif qui traverse $R_1^{(-1)}$; ce segment est séparé du segment $(0, +\sqrt{3})$ par le segment symétrique par rapport à O du segment négatif qui traverse $R_1^{(-1)}$, le segment séparatif est d'ailleurs intérieur à l'aire $R_1'^{(-1)}$ antécédente de R'_1, comme $R_1^{(-1)}$ est antécédente de R_1. Le processus est indéfini. On définit de proche en proche les aires $R_1^{(-3)}$ décrites par les antécédents de z lorsque z décrit les $R_1^{(-2)}$. Ces $R_1^{(-3)}$ sont simplement

---

à L, par exemple un point extérieur au cercle C [$|Z| > 3$], il serait impossible de joindre Q' et Q'', tous deux *intérieurs à* R_∞, par une ligne simple sans rencontrer L (en un point intérieur à R_1, donc extérieur à R_∞) ou sans passer par O (point frontière de R_∞). Ceci est absurde puisque Q', Q'' tous deux intérieurs à R_∞, domaine *d'un seul tenant*, doivent pouvoir être joints par une ligne simple dont tous les points soient intérieurs à R_∞. La contradiction rencontrée démontre donc que O est point simple de la frontière de R_1, et qu'il en est de même de tout point accessible de cette frontière. Le raisonnement précédent se retrouvera plus loin (p. 198 et suiv.).

[1] C'est là qu'est le paradoxe apparent : La frontière de R_1 est une partie de celle de R_∞, mais sur cette partie, la frontière de R_∞ a des *points multiples* dense partout : ce sont tous les antécédents de l'origine situés sur la frontière de R_1.

connexes et n'empiètent ni sur les R_1^{-1} ni sur R_1^{-2} ni sur R_1. On définit de même les $R_1'^{-2}$, les $R_1'^{-3}$, ... symétriques des R_1^{-2}, R_1^{-3}, ..., par rapport à O. Toutes les aires ainsi définies sont extérieures deux à deux et ne peuvent se toucher qu'en des points frontières.

L'ensemble des R_1, R_1^{-1}, R_1^{-2}, ..., constitue le domaine de convergence total vers -1, et l'ensemble des R_1', $R_1'^{-1}$, $R_1'^{-2}$, ..., le domaine de convergence total vers (-1). Tout point frontière d'un R_1^{-i} ou d'un $R_1'^{-i}$ est point de E', il est point frontière de R_∞, en sorte que R_∞ touche tous les R_1^{-i} et tous les $R_1'^{-i}$ en tous leurs points frontières. On voit bien de quelle étrange espèce est ce continu E' qui limite R_∞ et tous les R_1^{-i} et $R_1'^{-i}$, il porte des points multiples denses partout sur lui-même, et divise le plan en une infinité de régions. L'axe réel, par exemple, coupe E' en une infinité de points qui sont tous les antécédents réels de l'origine, auxquels il faut joindre l'ensemble des deux points $(+\sqrt{5}, -\sqrt{5})$ qui sont points limites de ces antécédents réels.

32. Si l'on suit l'axe réel Ox vers la droite, on traverse d'abord R_1 le long du segment $(0, +\sqrt{5})$, puis on traverse $R_1'^{-1}$, puis une R_1^{-1}, puis une $R_1'^{-2}$, puis une R_1^{-2}, etc.; suivant une loi évidente, les segments ainsi décrits décroissent constamment et ont $(+\sqrt{5})$ pour point limite. Puis, dépassant $(+\sqrt{5})$, on entre dans R_∞. Si l'on suit Ox' (axe réel vers la gauche) on traverse R_1', $R_1'^{-1}$, R_1^{-1}, $R_1'^{-2}$, R_1^{-2}, etc. Il serait facile également de voir que les antécédents de l'axe réel traversent une infinité de régions successives appartenant alternativement aux domaines totaux de $z = 1$ et de $z = -1$, puis entrent dans R_∞. Les régions R_1^{-i} et $R_1'^{-i}$ tendent vers zéro dans toutes leurs dimensions, lorsque i augmente indéfiniment. On s'en rend compte immédiatement en remarquant qu'à l'extérieur des cercles Γ et Γ' de centres $(+1)$ et (-1) de rayons $\rho = \frac{1}{2}$ la valeur de $\left|\frac{dz_1}{dz}\right| = \frac{5}{2}|1 - z^2|$ est $\geq M$, M étant un nombre > 1.

En effet, sur Γ et sur Γ', on a

$$\left|\frac{dz_1}{dz}\right| = \frac{5}{2}|1 - z||1 + z| = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{15}{8},$$

et évidemment la courbe

$$\frac{dz_1}{dz} = 1 - \frac{5}{2}|1 - z||1 + z|$$

sera une courbe algébrique, formée de deux ovales de Cassini entourant respectivement les points (-1) et $(+1)$ où $\frac{dz}{dz} = 0$. Donc sur Γ, Γ' et à l'extérieur, on a

$$\left|\frac{dz_1}{dz}\right| \leqq \frac{9}{8} < 1.$$

D'autre part, aucune des R_i ($i = 1, 2, \ldots, \infty$) ni des R_i' ne renferme de point critique de $\psi(z)$. Donc dans les R_1^{-i} comme dans les $R_1'^{-i}$, $\psi(z)$ est holomorphe. Ces $R_1^{(-i)}$ et $R_1'^{(-i)}$ sont toutes extérieures aux cercles Γ et Γ' qui sont dans R_1 et R_1'. Donc dans tout R_1^{-i}

$$\left|\frac{d\psi_1(z)}{dz}\right| < \frac{8}{9},$$

comme dans tout $R_1'^{-i}$. Si donc S est l'aire [1] couverte par R_1^{-i}, celle couverte par chacune des R_1^{-i} sera $< \left(\frac{8}{9}\right)^2 S$, et celle couverte par chacune des $R_1^{(-i)}$ sera $< \left(\frac{8}{9}\right)^{2(i-1)} S$. Elle tend donc vers zéro quand i augmente indéfiniment [2].

Tout point de E' est point frontière de R_∞, il est point limite de régions $R_1^{(-i)}$ et de régions $R_1'^{(-i)}$, dont l'indice i augmente indéfiniment, ou est point frontière d'une R_1^{-i} et d'une $R_1'^{-i}$, ou est point frontière d'une $R_1^{(-i)}$ et limite de région $R_1'^{(-i)}$, dont l'indice i croît indéfiniment, ou bien enfin est point frontière d'une $R_1'^{-i}$ et limite de région $R_1^{(-i)}$ dont l'indice i croît indéfiniment.

Cela résulte de ce qu'un point de E' est limite pour les antécédents d'un point arbitraire de R_∞, d'un point de R_1, d'un point de R_1'.

35. Il est assez difficile de se représenter exactement ce que peut être ce continu E'. Mais il n'est pas impossible de s'en faire une idée à l'aide d'un processus constructif, que je vais maintenant exposer et qui montrera qu'il n'y a nulle impossibilité par exemple à ce

---

(1) Il n'est pas absurde de parler de l'aire de R_1^{-i}, car R_1, par exemple, limite pour $i = \infty$ des aires quarrables contenues chacune dans la suivante (Γ), (Γ_{-1}), ..., (Γ_{-i}), ..., est *quarrable*. Il en est donc de même de tous les R_1^{-i}, de tous les $R_1'^{(-i)}$ et de R_∞.

(2) On montre de même que, si L est la *plus grande corde* de R_1^{-i}, sa plus grande corde de R_1^{-i} sera $< \left(\frac{8}{9}\right)^{i-1} L$, et, par suite, tend vers zéro avec i.

qu'une aire $\mathcal{R}_\infty$, simplement connexe, soit limitée par un continu linéaire E′ ayant des points multiples partout denses sur lui-même, continu qui divise le plan en une infinité de régions dont chacune touche $\mathcal{R}_\infty$ par toute sa frontière : la frontière de chaque petite région étant d'ailleurs une courbe simple.

Ce qui suit n'est évidemment qu'un schéma, mais il est très propre à aider l'intuition et à expliquer ce qu'il y a de paradoxal dans le fait que la frontière de $\mathcal{R}_\infty$ qui est un continu linéaire, tout en

touchant la frontière de chacune des petites régions précédentes en *tous les points* de cette dernière frontière, ne *coïncide cependant pas avec elle*. J'ai puisé l'idée du processus que je vais exposer dans un beau Mémoire de M. Helge von Koch, suédois aux *Acta Mathematica*, inséré aux *Acta* de 1906 (t. XXX) sous le titre *Une méthode géométrique élémentaire...*

34. Prenons de deux triangles équilatéraux égaux opposés par un sommet. Soit a leur côté, OAB, OA′B′ les deux triangles. L'ensemble des deux fait une ligne polygonale P_1 fermée (régulière et de côté a) OABOA′B′O qui divise le plan en trois régions : 1° $\mathcal{R}_1$ intérieure de OAB ; 2° $\mathcal{R}_2$ intérieure de OA′B′ ; 3° région contenant ∞ limitée par la ligne polygonale entière OABOA′B′O. O est point double pour la frontière de cette dernière région.

Au milieu de chacun des côtés de la ligne polygonale P_1 précédente, plaçons un sommet d'un triangle équilatéral de côté $\frac{a}{2}$, de côtés parallèles aux côtés de la ligne polygonale P_1 ; chacun de ces triangles étant d'ailleurs dans la région limitée par P_1 qui contient ∞.

CDE, FGH sont deux de ces triangles. L'ensemble de P_1 et des triangles ainsi construits fait une ligne polygonale fermée P_2 dont les sommets se suivent dans l'ordre OCDECAFGHFB.... P_2 divise le plan en $3+6=9$ régions, à savoir α_1, α', l'intérieur des six triangles qu'on vient de construire, enfin la région contenant ∞ et limitée à P_2; pour cette dernière région, la frontière, qui est P_2 tout entière, a des points multiples (doubles) en O, C, F, ... Il n'est pas inutile d'ajouter que si l'on décrit P_2 en ayant à sa gauche la région précédente (contenant ∞) les angles que font deux côtés consécutifs de la ligne P_2 (angles comptés vers l'intérieur de la région) sont de 120°, ou 60°, ou 300° (360°-60°) (Exemples : angles O, C, ou A).

55. Au milieu de chacun des côtés de la ligne P_2, nous plaçons un sommet d'un triangle équilatéral dont le côté est le [illegible] *du côté considéré de la ligne* P_2, dont les côtés sont parallèles à ceux de P_2, chacun des nouveaux triangles étant situé dans la région limitée par P_2 qui contient le point à l'infini (KLM, PQS sont deux de ces triangles). L'ensemble de P_2 et des nouveaux triangles fait une ligne polygonale fermée P_3 qui, quant aux angles, a les mêmes propriétés que P_2, mais qui détermine dans le plan un nombre de régions égal à celui qui déterminait P_2 augmenté du nombre des côtés de P_2. Il est facile de voir, en effet, que *deux des nouveaux triangles construits ne peuvent avoir aucun point commun, et qu'ils sont bien tous intérieurs à la région limitée par* P_2 *contenant le point à l'infini.*

Pour la construction de P_2, cette difficulté se présentait déjà, nous allons la lever. Prenons le triangle CDE construit sur le côté OA de P_1. A cause de $CD = \frac{a}{8} = \frac{CO}{7}$, il est visible que l'angle $COD < 30°$. (On a construit à côté de la figure un triangle équilatéral abc; $cd = \frac{1}{5}cb$ et $ce = \frac{1}{7}cb$. Il est visible que

$$\widehat{COD} = \widehat{cae} = 5 < 30°.)$$

Donc le triangle CDE ne peut empiéter sur le triangle analogue construit sur OB'. Point de difficulté donc pour P_2. Pour P_3 il importe seulement de montrer que deux triangles construits sur deux côtés consécutifs de P_2, faisant entre eux un angle de 120° (compté intérieurement à la région limitée par P_2 contenant ∞), ne peuvent empiéter l'un sur l'autre. Par exemple, KLM et PQS construits sur

les côtés OC et CD de P_2. Il est visible en effet que

$$\widehat{LOK} = \widehat{MCK} = \beta \quad \text{à cause de} \quad KL = \frac{OC}{8} = \frac{OK}{4}.$$

De même

$$\widehat{OCP} = \beta \quad \text{à cause de} \quad PQ = \frac{CD}{8} = \frac{CP}{4}.$$

Donc le triangle LKM est intérieur à l'angle $\widehat{MCO} = \beta$ et le triangle PQS est intérieur à l'angle $\widehat{PCQ} = \beta$. Ces deux angles sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la bissectrice de l'angle OCD et sont séparés l'un de l'autre par cette bissectrice et par un angle égal à 2α ($\alpha = 15^0 - \beta$), pour la ligne qu'elle bissecte. Les deux triangles en question ne peuvent empiéter l'un sur l'autre.

On a déjà vu à propos de P_1 que deux triangles construits sur deux côtés consécutifs de P_1 faisant entre eux 120^0 (tels les côtés issus de O) ne peuvent empiéter l'un sur l'autre. Il est visible, d'autre part, que les triangles construits sur les côtés de P_2 tels que DE ou GH ne peuvent empiéter sur les autres triangles.

Tout ceci tient en somme dans cette simple remarque : le triangle construit sur un des côtés de la ligne polygonale P_1 ou P_2 est tout entier *intérieur* à un triangle isoscèle, dont la base est ce côté, dont l'angle à la base est β. Il était donc essentiel que cet angle β fût choisi $< 30^0$ afin que les triangles isoscèles d'angle à la base β construits sur deux côtés consécutifs de P_2 comme base, faisant entre eux un angle de 60^0, fussent sûrement extérieurs l'un à l'autre et n'eussent en commun que le point d'articulation des deux côtés considérés [1].

Il est bien établi donc que P_3 limite une région d'un seul tenant, simplement connexe, contenant le point à l'infini; chacun des sommets de cette région est accessible, de l'intérieur de la région, par tout chemin situé dans un angle de 2α au moins bissecté par la bissectrice des deux côtés de P_3 qui aboutissent au sommet considéré.

---

[1] C'est à cette fin que j'ai pris le côté de chaque nouveau triangle égal au $\frac{1}{8}$ du côté de P_2 sur lequel il est construit; cela donne un $\beta < 30^0$, mais j'aurais pu remplacer le dénominateur 8 par tout autre nombre > 5 (car pour 4 l'angle β eût été égal à 30^0). J'ai pris 8 pour la simplicité de l'exposition.

36. Le processus peut se continuer indéfiniment. Au milieu de chaque côté de P_i plaçons le sommet d'un triangle équilatéral, dont le côté sera le $\frac{1}{8}$ du côté de P_i considéré, dont les côtés seront parallèles à ceux de P_i, et qui sera situé dans la région d'un seul tenant limitée par P_i contenant le point à l'infini. Les nouveaux triangles joints à P_i donneront une ligne polygonale fermée P_{i+1}. On démontrera de proche en proche que la construction est toujours possible sans que les nouveaux triangles à chaque fois construits empiètent l'un sur l'autre ou sur les précédents déjà construits. La raison en est immédiate : si l'on considère les côtés de P_3, les nouveaux triangles qu'on construit sur eux sont intérieurs aux triangles isoscèles d'angle à la base β construits sur ces côtés comme base. Les triangles isoscèles ainsi construits sur chacun des côtés de P_3 sont deux à deux extérieurs, et par suite les triangles qu'on construit pour passer de P_3 à P_4 sont deux à deux extérieurs et n'empiètent pas sur les triangles de P_3. On vérifie ensuite que les triangles isoscèles construits sur les côtés de P_4 comme base avec l'angle à la base β sont encore extérieurs deux à deux [1]. Ces triangles sont dans la région du plan d'un seul tenant limitée par P_4 et contenant l'infini, et par suite le processus peut se continuer sur P_4 comme sur P_3 pour donner P_5, etc.

37. Imaginons donc que le processus se continue indéfiniment. La ligne polygonale fermée P_i aura pour limite pour $i = \infty$ une ligne fermée continue $\mathcal{E}'$ ayant des points doubles partout denses sur elle-même [2]. Ce seront les points tels que O, K, C, P, F, etc., qui évidemment sont denses sur chaque côté d'une P_i quelconque. Les triangles qu'on ajoute à P_i pour passer à P_{i+1} ont des côtés qui tendent vers zéro lorsque i croît indéfiniment. La portion du continu $\mathcal{E}'$ comprise entre deux sommets consécutifs d'une P_i est tout entière à l'intérieur du triangle isoscèle d'angle à la base β construit sur le côté de P_i unissant les deux sommets comme base. C'est immédiat. $\mathcal{E}'$ divise le plan en une infinité dénombrable de régions, qu'on

---

(1) Ces triangles isoscèles étant *intérieurs* à ceux construits sur les côtés de P_3, il suffit d'examiner ce qui se passe à l'intérieur d'un des triangles isoscèles construits sur les côtés de P_3, et là encore la vérification est immédiate.

(2) Il est clair que $\mathcal{E}'$ a tous ses points à l'intérieur des triangles isoscèles d'angle à la base β construits sur les côtés des deux triangles équilatéraux initiaux comme base.

peut ranger par ordre : 1° $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}$; 2° l'intérieur des triangles construits pour passer de P_1 à P_2 ; 3° l'intérieur de ceux construits pour passer de P_2 à P_3, etc. ; enfin une région simplement connexe $\mathcal{R}_\infty$ d'un seul tenant contenant le point à l'infini, et limitée par $\mathcal{E}'$, c'est la limite de la région contenant le point à l'infini et limitée par P_i quand $i = \infty$. Tout sommet d'une ligne P_i quel que soit i est un point de $\mathcal{E}'$, un *point accessible* (1) de l'intérieur de $\mathcal{R}_\infty$ par tous les chemins compris dans un angle 2α ayant même bissectrice que la bissectrice de l'angle considéré de la ligne P_i (bissectrice dirigée vers l'intérieur de R_∞). $\mathcal{E}'$ est identique à l'ensemble dérivé de l'ensemble dénombrable formé par tous les sommets des lignes P_i ($i = 1, 2, \ldots, \infty$). Sur $\mathcal{E}'$, tout point qui est sommet d'une ligne P_i où les deux côtés de P_i font entre eux un angle de 60° (compté vers l'intérieur de $\mathcal{R}_\infty$) est un point *double* de la frontière de de $\mathcal{R}_\infty$. O est aussi point double. Les points doubles de $\mathcal{E}'$ sont denses partout sur $\mathcal{E}'$. (Ces sommets des P_i jouent le rôle des antécédents de l'origine dans l'itération de $z_1 = \frac{-z^2+3z}{2}$.)

38. Le continu linéaire $\mathcal{E}'$ que nous venons de construire jouit donc de toutes les propriétés de l'ensemble E′ relatif à la fonction rationnelle

$$z_1 = \frac{-z^2+3z}{2}.$$

J'ai, avec intention, affecté de lettres correspondantes les éléments qui, dans l'itération de $z_1 = \frac{-z^2+3z}{2}$ et dans la construction précédente, jouaient ce même rôle : ainsi $\mathcal{E}'$ et E′, $\mathcal{R}_1$ et R_1, $\mathcal{R}_\infty$ et R'_1, $\mathcal{R}_\infty$ et R_∞. Quant aux triangles que les lignes polygonales P_2, P_3, ... ajoutent à la ligne P_1, on peut y voir l'analogue des domaines R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{14}, ...

Tous les points (2) de la frontière de $\mathcal{R}_1$ sont, ici aussi, des points de la frontière $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{R}_\infty$, sans que $\mathcal{E}'$ coïncide pour cela dans la région du plan considérée avec la frontière de $\mathcal{R}_1$; $\mathcal{E}'$ contient cette

(1) Le sens de l'expression point frontière d'un domaine *accessible par l'intérieur de ce domaine* est bien net (*voir*, par exemple, les Préliminaires).

(2) Il est évident que tout point de la frontière de $\mathcal{R}_1$ est simple sur cette frontière $\mathcal{R}_1$ puisque $\mathcal{R}_1$ est l'intérieur d'un triangle équilatéral.

dernière frontière, c'est vrai, mais sur sur cette dernière frontière, il faut bien le remarquer, car c'est essentiel, $\mathcal{E}'$ a des *points doubles* partout denses.

Je n'ai pas besoin d'insister sur la nouveauté des circonstances que cet exemple bien simple, $z_1 = \frac{z^2 + 3z}{2}$, a fait surgir. Il montre avec quelle précaution il faut raisonner dès qu'on ne suppose rien *a priori* dans les questions d'analyse et de théorie des fonctions. Les notions les plus subtiles relatives aux frontières des domaines plans simplement connexes, sur lesquelles récemment il a été écrit bien des Mémoires intéressants [1], surgissent naturellement, et c'est au regard des circonstances actuelles que l'on peut dire, ainsi que je l'ai déjà fait remarquer plus haut, que les exemples d'itération jusqu'à ce jour traités étaient *les plus simples possibles*.

39. *Deuxième exemple.* — J'ai annoncé qu'il était d'ordre général et qu'il était fourni par l'application de la règle de Newton à une équation algébrique quelconque.

Si $f(z) = 0$ est une équation algébrique, $f(z)$ étant un polynome, on sait que la méthode de Newton pour évaluer une racine ζ de $f(z) = 0$ consiste à procéder par approximations successives à partir d'une valeur z assez voisine de ζ; le conséquent de z se définit par la relation rationnelle

$$z_1 = z - \frac{f(z)}{f'(z)},$$

les conséquents successifs de z sont les approximations successives, leur limite est une racine ζ de $f(z) = 0$. $f(z)$ étant un polynome quelconque, envisageons donc l'itération définie par

$$z_1 = z - \frac{f(z)}{f'(z)} = \varphi(z),$$

si f est de degré k, $\varphi(z)$ est rationnelle et de degré k.

Si

$$f(z) = a_0 z^k + \ldots,$$
$$f'(z) = k a_0 z^{k-1} + \ldots.$$

---

(1) *Voir* LINDELOF, *Sur un principe général de l'Analyse* (Acta Soc. Sci. Fennicae, 1915), où se trouve une bibliographie complète. — *Voir* aussi MONTEL, *Sur la représentation conforme* (Comptes rendus, 1 [illegible]).

et

$$z_1 = \varphi(z) = \frac{(k-1)a_1 z^2 + \ldots}{k a_1 z^2 + \ldots}.$$

Le point $z = \infty$ est une racine infinie de $z = \varphi(z)$, c'est un point double de la transformation $z_1 = \varphi(z)$ du plan. Si on le ramène à l'origine par l'homographie auxiliaire $z = \frac{1}{Z}$, $z_1 = \frac{1}{Z_1}$, la substitution transformée de $z_1 = \varphi(z)$ est

$$Z_1 = \frac{k a_1 Z + \ldots}{(k-1)a_1 + \ldots},$$

numérateur et dénominateur étant cette fois ordonnés suivant les puissances croissantes de Z. On voit bien qu'à $Z = 0$ correspond $Z_1 = 0$. D'ailleurs, à l'origine, $\frac{dZ_1}{dZ} = \frac{k}{k-1}$, donc $\frac{dZ_1}{dZ} > 1$. Donc l'origine est un point de l'ensemble E relatif à $Z_1 = \Phi(Z)$.

Revenant à $z = \varphi(z)$, l'infini est un point de E pour cette substitution. L'équation $z = \varphi(z)$ a, en outre, k racines à distance finie, ce sont les k racines de $f(z) = 0$.

En chacune de ces racines ζ, on a

$$\frac{dz_1}{dz} = 1 - \frac{f'' - ff'^2}{f'^2} = \frac{ff''}{f'^2},$$

et à cause de $f(z) = 0$, on a

$$\left(\frac{dz_1}{dz}\right)_{z=\zeta} = 0.$$

Donc les k racines de $f(z)$ sont k points limites à convergence régulière, et aussi k points critiques de la fonction algébrique inverse de

$$z_1 = \varphi(z) = z - \frac{f}{f'},$$

et aussi k points où $\frac{dz_1}{dz} = 0$. Le point à l'infini étant point ordinaire pour l'inverse de $\varphi(z)$, on voit que, outre les k racines de $f(z)$, les seuls points du plan complet qui soient critiques pour l'inverse de $\varphi(z)$ sont les conséquents des $(k-1)$ points où $f'(z) = 0$.

D'ailleurs

$$\frac{dz_1}{dz} = \frac{f}{f'} - \frac{ff'}{f'^2} = \left(\frac{ff''}{f'^2}\right).$$

et en une racine ζ de $f(z) = 0$, on a

$$\frac{d^2 z_1}{dz^2} = \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}.$$

Donc $\frac{d^2 z_1}{dz^2} \neq 0$ si, comme on peut le supposer dans le cas général, chacune des racines rend $f''(\zeta) \neq 0$.

En un point où $f''(z) = 0$, on a

$$\frac{d^2 z_1}{dz^2} = \frac{ff'''}{f'^2}$$

et, dans le cas général, $\frac{d^2 z_1}{dz^2}$ sera $\neq 0$ en un tel point.

Donc, dans le cas général, les points critiques de $\psi(z)$ inverse de $\varphi(z)$ sont :

1° Les k racines de $f(z) = 0$ qui sont des points critiques simples autour desquels se permutent deux branches de $\psi(z)$;

2° Les conséquents d'ordre 1 des $(k-2)$ racines de $f''(z) = 0$, qui sont aussi des points critiques simples autour desquels se permutent deux branches de $\psi(z)$. Cela fait bien, si $f(z)$ est quelconque de degré k, $2k-2$ points critiques distincts pour la fonction algébrique $\psi(z)$ inverse de

$$z_1 = \varphi(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}.$$

60. *a.* Liquidons d'abord le cas le plus simple : celui où $f(z)$ est du deuxième degré. Si l'on désigne par ζ_1 et ζ_2 ses racines, ce sont aussi les deux seuls points critiques de l'inverse de $z_1 = \varphi(z)$; dans ce cas [car $f''(z) = \text{const.}$], ce sont deux points limites à convergence régulière. On est donc dans le cas simple, traité à l'application 3° (p. 150 du présent Mémoire). Le plan doit donc se diviser en deux régions R_1 et R_2 séparées par un continu linéaire, chacune de ces régions contenant un des points limites, dont elle est le domaine de convergence total (R_1 contient ζ_1 et R_2 contient ζ_2).

Pour apercevoir tous ces résultats, il suffit de se rappeler qu'on a

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-\zeta_1} + \frac{1}{z-\zeta_2}.$$

et, par suite, la relation d'itération s'écrit

$$(1) \qquad \frac{1}{z - z_1} = \frac{1}{z - \zeta_1} + \frac{1}{z - \zeta_2},$$

z_1 étant le conséquent de z. De là se conclut que : *si z décrit la perpendiculaire au milieu du segment $\zeta_1 \zeta_2$, z_1 la décrit aussi.*

FIG. [illegible]

Le plus simple pour le voir est de faire une transformation homographique auxiliaire qui soit un simple déplacement du plan z et amène ζ_1 et ζ_2 à être sur l'axe réel symétrique l'un de l'autre par rapport à l'axe imaginaire; il est clair qu'on aura la même relation que (1) entre les transformés des points z, z_1, ζ_1, ζ_2.

FIG. [illegible]

Rien n'empêche donc de supposer d'emblée ζ_1 réel positif et $\zeta_2 = -\zeta_1$. Ce n'est pas non plus diminuer la généralité que de supposer $\zeta_1 = 1$ (il suffit d'une simple homothétie auxiliaire pour

y arriver). Le problème se ramène donc à étudier

$$\frac{1}{z - z_1} = \frac{1}{z - 1} + \frac{1}{z - 1}.$$

Alors, si z est purement imaginaire, $\frac{1}{z-1}$ et $\frac{1}{z-1}$ seront deux points symétriques par rapport à Oy. Donc leur somme sera un point de Oy. Donc $\frac{1}{z - z_1}$ sera purement imaginaire, comme z et par suite comme z_1. Donc la perpendiculaire au milieu de $\zeta_1 \zeta_2$ est conservée par la relation de Newton

$$z_1 = z - \frac{f(z)}{f'(z)}.$$

Il est encore facile de prouver que chacun des demi-plans qu'elle détermine se transforme aussi en lui-même. On est donc dans le cas de ces fractions à cercle fondamental que M. Fatou considère dans sa Note du 21 mai 1917 aux *Comptes rendus*. Le plus simple pour le voir consiste à revenir à l'expression

$$z_1 = z - \frac{f(z)}{f'(z)},$$

où l'on suppose $f(z) = z^2 - 1$, ainsi qu'une homographie auxiliaire qui transforme ζ_1 et ζ_2 en les points (-1) et $(+1)$ le permet assurément. Cela donne

$$z_1 = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

et, sur cette expression, il est clair que chacun des demi-plans que détermine la perpendiculaire au milieu de $\zeta_1 \zeta_2$ est transformé en lui-même par la substitution

$$z_1 = z - \frac{f(z)}{f'(z)} = \varphi(z);$$

chacun d'eux est le domaine de convergence total vers celui des points ζ_1 ou ζ_2 qu'il contient. Sur la frontière commune des deux domaines, qui est la perpendiculaire commune au milieu de $\zeta_1 \zeta_2$, les points racines des équations $z = \varphi_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ pour lesquels $|\varphi'_n(z)| > 1$ (ensemble E) sont partout denses.

61. *b.* Si l'on revient à un polynome général $f(z)$ de degré k, le

fraction

$$z = \varphi(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$$

admet, on l'a vu, pour points limites à convergence régulière les k racines distinctes de $f(z) = 0$. La fonction $\psi(z)$ inverse de $\varphi(z)$ admet pour points critiques les k racines de $f(z) = 0$ et les $(k-2)$ racines de $f''(z)$ qui sont distinctes en général des précédentes. Il suit de là que $(k-1)$ *au moins des racines de* $f(z)$ *ont un domaine de convergence total formé d'une infinité d'aires* du genre de ceux considérés dans le premier exemple. Il suffit de se reporter aux remarques faites page 155 pour s'en assurer immédiatement.

62. Si, par exemple, on considère le polynome $f(z) = z(z^2 - 1)$ dont les racines sont $0, -1, +1$, on a

$$z_1 = z - \frac{z(z^2-1)}{3z^2-1} = \frac{2z^3}{3z^2-1},$$

et si l'on transforme cette substitution par l'homographie auxiliaire

$$z = \frac{1}{Z}, \qquad z_1 = \frac{1}{Z_1},$$

il vient

$$Z_1 = \frac{3Z - Z^3}{2},$$

c'est-à-dire le *premier exemple traité*, sur lequel il est par suite inutile d'insister.

Donc, en général, la division du plan en régions, qui conduisent chacune à une racine déterminée de $f(z) = 0$, sera un problème impraticable, puisque $(k-1)$ au moins des racines ayant un domaine de convergence formé d'une infinité d'aires, on serait conduit à diviser le plan en une infinité de régions. Voilà la raison de l'échec de la tentative de Cayley pour l'application de la règle aux équations de degré $\geqq 3$.

63. Citons, pour terminer, le cas de $f(z) = z^3 - a^3$.

Alors

$$z_1 = \frac{2z^3 + a^3}{3z^2} = \varphi(z).$$

Les trois racines de f, a, $a\omega$, et $a\omega^2$ $(\omega^3 = 1)$ sont trois points limites à convergence régulière et trois points critiques de l'inverse

de $\varphi(z)$. Le quatrième point critique de $\psi(z)$ est évidemment le point à l'infini, car le point à l'infini a deux antécédents confondus à l'origine. C'est un point de E'. Il n'y a donc pas de groupe circulaire limite, ni d'autre point limite à convergence régulière. Le domaine immédiat de convergence vers chacun des points a, $a\omega$, $a\omega^2$, ne contiendra pas à son intérieur d'autre point critique que ce point lui-même qui permute entre elles deux branches seulement de $\psi(z)$. Donc chacun des domaines de convergence totaux vers a, $a\omega$ ou $a\omega^2$ se composera d'une *infinité de pièces*, comme dans l'exemple précédent, chacun des domaines de convergence vers -1 et $+1$. Chacun de ces domaines totaux fournit les deux autres par deux rotations successives de 120° autour de l'origine, car, évidemment, à z et $z\omega$ correspondent les conséquents z_1 et $z_1\omega$.

Le continu linéaire E', qui forme l'ensemble des frontières des domaines totaux précédents (chaque domaine *total* a évidemment pour frontière tout l'ensemble E', car tout point de E' est limite pour les antécédents successifs d'un point arbitraire pris dans chacun de ces domaines), se conserve par une rotation de 120° autour de l'origine. Par une transformation homographique simple ($z = aZ$), on ramène au cas où $a^3 = 1$. Alors, sans diminuer la généralité, on prendra

$$z_1 = \frac{2z^3+1}{3z^2}.$$

Les trois points limites sont 1, ω, ω^2.

On reconnaît *a priori* que la partie positive de l'axe réel appartient au domaine immédiat vers $(+1)$, O et ∞ étant points frontières. Cet axe réel est axe de symétrie pour le domaine considéré. On a ainsi quelques renseignements sur les domaines des points 1, ω, ω^2.

64. *Troisième exemple.* — Conformément aux considérations exposées aux pages 153-158 du présent Mémoire, montrons que le domaine immédiat de convergence vers un point limite peut être limité par un ensemble infini de *courbes* deux à deux extérieures et non seulement de points comme dans les exemples $z_1 = z^2$ et $z_1 = z^3$ mentionnés précédemment. J'obtiendrai immédiatement un tel exemple par le procédé suivant : $z_1 = \varphi(z)$ sera un *polynome* pour lequel $\varphi'(z) = 0$ n'aura que deux racines distinctes à distance finie, 0 et a. Je prendrai a *réel*, et je m'arrangerai pour que le point

$z = a$ soit du domaine immédiat du point ∞; on sait que pour un polynome quelconque le point ∞ a un domaine immédiat de convergence R_∞ confondu avec le domaine total. Si a appartient à R_∞, il est clair que R_∞ ne sera pas simplement connexe, car R_∞ contiendra deux points critiques de $\psi(z)$ qui sont ∞ et le conséquent de a, et un contour décrit autour des ces deux points critiques seulement [1] ne pourra pas permuter une détermination quelconque de $\psi(z)$ avec *toutes les autres* déterminations de $\psi(z)$. En effet, la surface de Riemann $\mathcal{R}$ relative à $\psi(z)$ inverse d'un polynome de degré k, peut être construite en prenant pour lignes de croisement entre les divers feuillets des lignes unissant les points critiques de $\psi(z)$ situés à distance finie au point ∞. Un peu de réflexion suffit alors à se rendre compte de ce que je viens d'avancer.

Si maintenant j'impose au point O d'être un point limite à convergence régulière en prenant $\varphi(0) = 0$ avec $\varphi'(0) = 0$, ce point aura un domaine immédiat R_0 de convergence simplement connexe limité par un continu linéaire qui appartiendra à la frontière de R_∞. Et il est clair que le domaine total de convergence vers zéro sera composé d'une infinité d'aires antécédentes de R_0, toutes simplement connexes évidemment, toutes extérieures à R_∞, limitées chacune par un continu linéaire. L'ensemble de tous ces continus linéaires et de leurs points limites formera la frontière de R_∞. R_∞ est ainsi limité par une infinité de continus linéaires (et leurs points limites), sans que tous les continus réunis forment un continu (on le voit d'après le mode même de génération). Entre deux points appartenant à deux de ces continus distincts, la frontière de R_∞ est mal enchaînée; on peut tracer, dans le domaine R_∞, une infinité de courbes fermées deux à deux extérieures qui contiennent à leur intérieur comme à leur extérieur une infinité de ces continus linéaires. La génération de R_∞, à partir d'un petit domaine entourant le point ∞, met tout ceci en évidence, comme pour l'exemple

$$z = z^2 - 1;$$

mais dans cet exemple-là les courbes limites des antécédentes successives de ce petit domaine tendaient vers zéro dans toutes leurs dimensions, et se réduisaient, à la limite, à un ensemble de points, dont le dérivé était l'ensemble parfait discontinu E'.

---

[1] Il n'y a pas d'ambiguïté possible sur le sens de cette expression.

65. Ceci bien compris, la réalisation de l'exemple est facile. Je prends tout simplement

$$\varphi'(z) = A z^2 (z - a)^2.$$

A étant un nombre réel positif à déterminer et a un nombre positif arbitraire, mais fixe. Alors, je prendrai

$$\varphi(z) = A\left(\frac{z^5}{5} - 2a\frac{z^4}{4} + a^2\frac{z^3}{3}\right)$$

pour avoir

$$\varphi(0) = 0, \qquad \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0.$$

Le point O est point limite à convergence régulière. Il faut s'arranger pour que les conséquents de a tendent vers l'infini.

La courbe $z_1 = \varphi(z)$, z et z_1 étant considérés comme des coor-

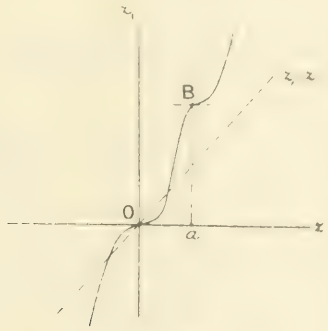


Fig. 11.

données rectangulaires d'un point à l'allure ci-contre; il suffira que la portion de courbe correspondant à la variation de z dans $(a; +\infty)$ soit tout entière *au-dessus de la bissectrice* $z_1 = z$ pour qu'on soit sûr que les conséquents de a ont des abscisses régulièrement croissantes vers $+\infty$. Or, c'est là une chose aisée : il suffira de choisir A assez grand pour que l'on ait, pour $z \geqq a > 0$,

$$\frac{z^5}{5} - 2a\frac{z^4}{4} + \frac{a^2 z^3}{3} > \frac{z}{A}.$$

Or, la courbe

$$Z_1 = \frac{z^5}{5} - 2a\frac{z^4}{4} + a^2\frac{z^3}{3},$$

ayant une forme *bien déterminée* analogue à la précédente, il sera en effet toujours possible de choisir $\frac{1}{A}$ assez petit et positif pour que

la droite de coefficient angulaire $\frac{1}{A}$ issue de l'origine soit tout entière au-dessous de la portion de cette courbe

$$Z_1 = \frac{z^5}{5} - 2a\frac{z^4}{4} + a^2\frac{z^3}{3}$$

qui correspond à la variation de z dans $(a, +\infty)$.

66. A étant ainsi choisi,

$$z_1 = \varphi(z) = A\left[\frac{z^5}{5} - 2a\frac{z^4}{4} + a^2\frac{z^3}{3}\right]$$

aura pour points limites à convergence régulière o et ∞. Il n'y aura ni autre point $z = \varphi(z)$ où $|\varphi'(z)| < 1$, ni groupe circulaire limite. L'équation $\varphi'(z) = 0$ n'a que deux racines distinctes, o et a. $\psi(z)$, inverse de $\varphi(z)$, n'a que deux points critiques qui sont o et $\frac{Aa^5}{30}$ à distance finie.

Autour de O se permutent trois déterminations de $\psi(z)$; autour du point $z = \frac{Aa^5}{30}$ se permutent aussi trois déterminations. On peut imaginer les trois feuillets supérieurs 1, 2 et 3 ramifiés autour de $z = 0$, et les troisième, quatrième, cinquième ramifiés en $z = \frac{Aa^5}{30}$. Les cinq feuillets sont ramifiés en $z = \infty$. Les lignes de croisement peuvent être tracées de o à $-\infty$ et de $\frac{Aa^5}{30}$ à $+\infty$ sur l'axe réel. Quand on tourne autour de o dans le sens positif, on passera du premier au deuxième, puis du deuxième au troisième, puis du troisième au premier feuillet. En tournant autour de $z = \frac{Aa^5}{30}$, on passera du troisième au quatrième, du quatrième au cinquième, du cinquième au troisième, etc.

Partant d'un point du premier feuillet et décrivant dans le sens négatif un circuit qui entoure les deux points critiques, on passe sur le cinquième feuillet, etc.

67. Les cinq feuillets se ramifiant autour du point ∞, le domaine R_1 sera à la fois domaine immédiat et domaine total de convergence vers l'infini. R_1 est d'un seul tenant et infiniment connexe. Partant d'une courbe c qui délimite l'aire (c) entourant le point à l'infini et

prenant ses antécédentes successives, l'une d'elles délimitera une région (C_{-i}) contenant l'infini et $z = \frac{Aa'}{30}$ et les antécédentes (C_{-i}) ... seront d'un ordre de connexion de plus en plus grand. Toutes ces aires (C_{-p}) laissent o à leur extérieur. Quant à R_0, domaine immédiat de convergence vers o, il contiendra le seul point critique o de $\psi(z)$. R_0 sera simplement connexe. R_∞ laissera R_0 à son extérieur, mais aura tous les points frontières de R_0 pour points frontières. Cela résulte de ce que ces points sont points de E', et R_∞, d'un seul tenant, étant domaine total de convergence vers l'infini, la frontière de R_∞ *est identique à l'ensemble* E', puisque tout point de E', étant limite pour les antécédents successifs d'un point de R_∞, antécédents qui sont tous intérieurs à R_∞, devra être point frontière de R_∞.

68. R_0 découpe dans la surface de Riemann $\mathfrak{R}$ de $\psi(z)$: 1° un morceau simplement connexe S_0 qui comprend les portions (ramifiées entre elles autour de o) des trois feuillets supérieurs qui se projettent à l'intérieur de R_0; 2° deux autres morceaux simplement connexes identiques à R_0 qui sont les parties des quatrième et cinquième feuillets projetés sur R_0. z décrivant R_0, trois de ses antécédents décriront R_0, les deux autres, correspondant aux quatrième et cinquième déterminations de $\psi(z)$ décriront chacun une aire simplement connexe, extérieure à R_0, ces deux aires n'ayant ni entre elles, ni avec R_0 *de point commun intérieur ou frontière*. Ce seront les aires R_0^{-1}. On pourra tracer un contour simple entourant R_0 et laissant à son extérieur les deux aires R_0^{-1} et de même un contour entourant une des aires R_0^{-1} et laissant l'autre et R_0 à son extérieur. Continuant ainsi, on déterminera les aires R_0^{-i} antécédentes de $R_0^{(-1)}$, etc. Toutes ces aires R_0^{-i} seront simplement connexes, aucune d'elles ne contiendra de point critique de $\psi(z)$. Elles sont toutes à distance finie. Elles s'agglomèrent entre elles [1] de façon que tout point frontière d'une aire R_0^{-i}, étant point de E', soit, par exemple, point limite pour les antécédents successifs des continus linéaires frontières des aires $R_0^{-(i+1)}$, $R_0^{-(i+2)}$, ..., toutes aires qui sont extérieures à l'aire R_0^{-i} envisagée. Il n'est pas

(1) Par un processus analogue à celui suivant lequel se groupent les points d'un ensemble parfait discontinu.

utile d'insister davantage sur un processus de formation qui nous est déjà familier. Le domaine R_∞ apparaît ainsi comme un plan dans lequel seraient percés une infinité dénombrable de trous tous à distance finie et extérieurs deux à deux dont les courbes frontières s'agglomèreraient pour former un ensemble parfait, tout point d'une courbe frontière étant point limite d'une infinité de courbes frontières de plus ou plus petites, extérieures à la première.

Le domaine total de convergence vers l'origine serait l'ensemble des aires intérieures à tous ces trous.

69. *Quatrième exemple.* — Nous avons vu, page 180, à propos de l'exemple $z_1 = \frac{2z^3 - a}{3z^2}$, tiré de la règle de Newton, qu'un point critique de la fonction $\psi(z)$ inverse de $\varphi(z)$, conséquent d'un point où $\varphi'(z) = 0$ pouvait faire partie de l'ensemble E'. En écrivant pour un polynome du deuxième degré que le deuxième conséquent du point où $\varphi'(z) = 0$ est un point double, on tombe sur l'exemple

$$z_1 = az^2 - \frac{1}{a},$$

a étant un paramètre arbitraire; posant $az = Z$, il vient

$$Z_1 = Z^2 - 2,$$

et cet exemple est intéressant. On voit immédiatement que $Z = 2$ est un point de E, *son antécédent* (-2) *est point critique de* $\psi(Z)$, *c'est un point de* E'. On voit que *tous les antécédents* du point $Z = 2$ sont réels et compris entre -2 et $+2$. Tout point du segment $(-2, +2)$ a des conséquents *qui ne sortent pas de ce segment.* Donc ce segment $(-2, +2)$ n'appartient pas au domaine du point à l'infini. $Z = 2$ étant de E, ses antécédents sont partout denses sur E' qui est donc l'ensemble dérivé de l'ensemble des antécédents de $Z = 2$. E' a donc tous ses points sur le segment $(-2, +2)$. Tout point du plan hors de ce segment a donc des conséquents qui convergent régulièrement vers l'infini. Le domaine R_∞ comprend tout le plan, sauf la coupure $(-2, +2)$. On en conclut que le segment $(-2, +2)$, frontière complète de R_∞, est l'ensemble E' lui-même, et que les antécédents de $Z = 2$, comme de tout point du segment, sont partout denses sur ce segment.

Cet exemple montre que E' peut être un continu linéaire avec deux bouts distincts. Jusqu'ici on n'avait donné que des exemples de *continus linéaires fermés* pour E'.

TROISIÈME PARTIE.

Sur la nature des continus linéaires qui délimitent les divers domaines de convergence.

70. En étudiant la convergence régulière vers un point limite (comme aussi la convergence irrégulière vers un groupe circulaire limite), il arrive d'avoir simultanément plusieurs points limites à convergence régulière. Chacun d'eux a alors un domaine immédiat de convergence dont l'intérieur est séparé de tout point extérieur par un continu linéaire qui coupe toute ligne simple joignant un point intérieur au domaine à un point extérieur. On peut essayer de pénétrer plus avant dans la question en recherchant quelle est la nature des continus linéaires qui se présentent ainsi. Déjà, à propos de l'exemple $z_1 = \frac{-z^3+2z}{2}$, on a eu affaire à des continus d'une nature très compliquée. On peut cependant montrer dans des cas très généraux que la complexité de tels continus peut se résoudre en une agglomération de continus linéaires d'une nature beaucoup plus simple, par exemple de lignes de Jordan, courbes continues fermées, sans points multiples. Je n'ai pas toujours réussi à disséquer les propriétés caractéristiques de tous les continus qui se présentent dans les itérations de fractions rationnelles; j'ai néanmoins, sous des hypothèses très générales, réussi à montrer qu'ils se ramènent à des lignes de Jordan. Ceci jettera un jour nouveau sur la structure de ces continus, et expliquera les difficultés rencontrées jusqu'à ce jour dans la délimitation des domaines de convergence. A ce titre, on verra que les exemples d'itération traités jusqu'ici, et notamment celui des fractions à cercle fondamental, sont des exemples particulièrement simples (*voir* p. 110, n° 20 et la généralisation indiquée en remarque, p. 114-118 de ce Mémoire).

Je commencerai par un exemple simple, qui fera bien comprendre la méthode que j'ai suivie. Ainsi qu'il est bien naturel, je prendrai toujours des fractions rationnelles dont je saurai *a priori* qu'elles ont au moins deux points limites distincts à convergence régulière; je serai sûr ainsi *a priori* que l'ensemble E' comprend un continu linéaire qui divise le plan en régions, et c'est sur la nature de ce continu que va porter la recherche actuelle.

71. *Premier exemple.* — Je reprendrai le cas de $z_1 = \frac{z - z^2}{2}$ signalé par M. Fatou dans sa Note du 15 octobre 1906, aux *Comptes rendus*. Nous avons reconnu antérieurement qu'il y a dans ce cas deux points limites (0 et ∞) à convergence régulière. Le plan se divise en deux régions R_0 et R_∞ simplement connexes contenant respectivement 0 et ∞, ayant pour commune frontière un continu linéaire E′ (*voir* p. 138 du présent Mémoire). E′ est la limite commune des antécédentes successives de deux cercles, l'un C entourant l'origine $|z| = \frac{1}{2}$, l'autre Γ entourant le point à l'infini $|z| = 4$ [1]. Les points critiques de l'inverse de $\varphi(z)$ sont $z = -\frac{1}{8}$ et $z = \infty$. Si donc z décrit une fois C, l'ensemble de ses deux antécédents décrit une courbe algébrique fermée C_{-1} entourant C. Si z décrit C deux fois, chacun de ses antécédents décrit C_{-1} une fois; on peut dire la même chose des antécédentes successives C_{-2}, C_{-3}, ..., qui tendent vers E′. Je dis que la convergence des C_{-i} vers E′ est *uniforme;* voici ce qu'il faut entendre par là. Les courbes C_{-i} successives sont emboîtées les unes dans les autres; d'après le processus de formation, quel que soit le nombre positif ε donné à l'avance, il sera possible de déterminer un indice N assez grand tel que, quels que soient les indices n et p *supérieurs à* N, *l'écart des deux courbes* C_{-n} et C_{-p} soit toujours $< \varepsilon$. On pourra appeler écart de deux courbes *le maximum* [2] *de la plus courte distance d'un point de l'une à l'autre quand le point considéré décrit la courbe sur laquelle il est situé*. Dire que deux courbes L et L′ ont un écart $< \varepsilon$, c'est dire que L′ est tout entière dans la bande balayée par un cercle de rayon ε dont le centre décrirait L.

72. Pour montrer ceci, je remarquerai que de la relation

$$\frac{dz_1}{dz} = \varphi'(z) = \frac{1}{2} - z,$$

il résulte que l'on a $|\varphi'(z)| > 1$ en tout point extérieur au cercle γ de centre $\left(-\frac{1}{2}\right)$ de rayon 1.

---

(1) Il n'y a pas d'équivoque sur ce qu'il faut entendre par là.

(2) C'est un nombre bien défini, positif lorsque les deux courbes, comme c'est le cas pour C_{-n} et C_{-p}, sont des courbes continues sans point commun.

Écrivons d'ailleurs

$$z_1 = \frac{z + z^2}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8},$$

et nous verrons que lorsque z décrit le cercle précédent, $\left|z + \frac{1}{2}\right| = 1$,

$$\left|z_1 + \frac{1}{8}\right| = \frac{1}{2}\left|z + \frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{2};$$

donc z_1 décrit au cercle γ_1 de centre $-\frac{1}{8}$ de rayon $\frac{1}{2}$, c'est un cercle γ_1 complètement intérieur au précédent, et qui contient à son intérieur le point critique $\left(-\frac{1}{8}\right)$, et aussi le point de convergence o. Il n'en faut pas plus pour affirmer que γ est tout entier intérieur à R_0, les conséquentes successives de γ ayant o pour seul point limite. On voit immédiatement que pour définir R_0 on peut partir de γ aussi bien que de C, on arrivera toujours à la frontière E′ comme limite des antécédentes successives $\gamma_{-1}, \gamma_{-2}, \ldots, \gamma_{-i}, \ldots$. Les γ_{-i} jouissent les unes par rapport aux autres des mêmes propriétés que les C_{-i} les unes par rapport aux autres. Si z décrit une γ_{-i} une fois, son conséquent z_1 décrira $\gamma_{-(i-1)}$ deux fois de suite, etc. Sans qu'il soit nécessaire d'insister, on voit que l'aire contenant O limitée par une C_{-i} quelconque sera, pour P assez grand, intérieure à toutes les γ_{-p} d'indice $p > P$. Inversement, une γ_{-i} quelconque sera, pour P assez grand, intérieure à toutes les C_{-p} d'indice assez grand. Tout ceci tient, répétons-le, à cette propriété essentielle que, si z décrit une aire (C_{-i}) ou une aire (γ_{-i}), *ses deux antécédents* décrivent une aire $(C_{-(i+1)})$, ou une aire $(\gamma_{-(i+1)})$ qui comprend à son intérieur l'aire (C_{-i}) ou l'aire (γ_{-i}); j'ai longuement insisté, lors de la recherche du domaine immédiat de convergence vers un point limite à convergence régulière, sur ce fait essentiel qui permet de définir le domaine immédiat comme limite des domaines (C_{-i}) ou des (γ_{-i}) lorsque i augmente indéfiniment.

75. Puisque, en tout point extérieur à γ, on a $|\varphi'(z)| > 1$, il en résulte que, pour l assez grand, toutes les $C_{-(i+l)}$ entourant γ, on aura à l'extérieur de ces $C_{-(i+l)}$ $|\varphi'(z)| > M > 1$. Pour la même raison, $\psi(z)$ étant la fonction inverse de $\varphi(z)$, on aura, pour l'indice assez grand l,

$$|\psi'(z)| < N < 1.$$

dès que z est extérieur à C_{-1}. Il suffira de choisir pour cela I de telle façon que C_{-I} entoure γ, car alors, si z est extérieur à C_{-I}, chacun des antécédents est extérieur à C_{-I+1}, et l'on a

$$|\psi'(z)| = \frac{1}{|\psi(z)|}.$$

Donc, z_{-I} étant extérieur à γ,

$$|\psi'(z)| = \frac{1}{|\psi(z_{-I})|} < \frac{1}{M} = N < 1.$$

Désignons par δ l'écart entre C_{-I} et C_{-I+1}, cela veut dire que la plus courte distance de tout point de C_{-I+1} à C_{-I} est $\leqq \delta$. Imaginons une quelconque de ces plus courtes distances AB. Aux points B et A correspondent des antécédents situés respectivement sur C_{-I-1} et C_{-I-2}.

Soit B_{-1} un antécédent de B; z décrivant BA, la détermination de $\psi(z)$ dont l'affixe est B_{-1} quand z est en B, aura pour affixe un cer-

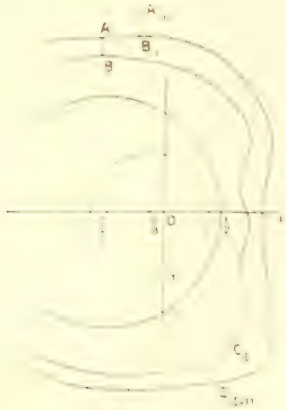


Fig. [illegible]

tain point A_{-1} quand z viendra en A. A_{-1} sera un antécédent de A, et z décrivant BA, $\psi(z)$ décrira une courbe unissant B_{-1} A_{-1}. Puisque, sur BA, on a $|\psi'(z)| = N < 1$, on aura

$$\text{longueur arc } A_{-1}B_{-1} = N \times \text{segment } AB = N\delta,$$

car $AB = \delta$. Il est donc clair que l'*écart de* C_{-I-1} et C_{-I-2} *sera* $\leqq N\delta$, puisque la plus courte distance de A_{-1} [qui est en somme un point quelconque de C_{-I+2}, à condition de choisir convenablement A sur

$C_{-(I+1)}$ à $C_{-(I+1)}$ étant sûrement [illegible] arc $A_{-1}B_{-1}$ sera $\leqq N\delta$, quel que soit le point A_{-1} de $C_{-(I+2)}$.

74. On montrera de même que l'écart entre $C_{-(I+p)}$ et $C_{-(I+p+1)}$ sera $\leqq N^p\delta$, N étant < 1. On voit donc que l'écart entre C_{-i} et $C_{-(i+1)}$ décroît dès que $i > I$ suivant une progression géométrique. Il est, d'autre part, évident que l'*écart entre* C_{-n} et $C_{-(n+p)}$ *est inférieur à la somme des écarts entre* C_{-n} *et* $C_{-(n+1)}$, $C_{-(n+1)}$ et $C_{-(n+2)}$, ..., $C_{-(n+p-1)}$ et $C_{-(n+p)}$; puisque l'on peut, d'un point quelconque A de C_{-n}, aller à un certain point de $C_{-(n+p)}$ par un chemin formé de segments rectilignes AA_1, A_1A_2, ..., $A_{p-1}A_p$, A_i étant sur $C_{-(n+i)}$, A_iA_{i+1} étant la plus courte distance de A_i à $C_{-(n+i+1)}$, et puisque chacun de ces segments est inférieur, quel que soit A initial, à l'écart entre les deux courbes que décrivent ses extrémités. On en conclut donc que, si l'on considère la série convergente,

$$N\delta + N^2\delta + \ldots + N^p\delta + \ldots,$$

l'écart entre C_{-n} et $C_{-(n+n')}$ sera, dès que $n \geqq n_0$, n_0 étant assez grand, quel que soit d'ailleurs n', inférieur au *reste de la série précédente*, pris à partir d'un certain rang p, et ce reste est arbitrairement petit si p est assez grand. Il est bien prouvé ainsi que les C_{-i} convergent uniformément vers leur limite qui est E'. Il en résulte immédiatement que, i tendant vers l'infini, C_{-i} tend vers une *courbe continue*, c'est-à-dire vers un ensemble de points E' représenté par les équations

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t) \qquad (0 \leqq t \leqq 1),$$

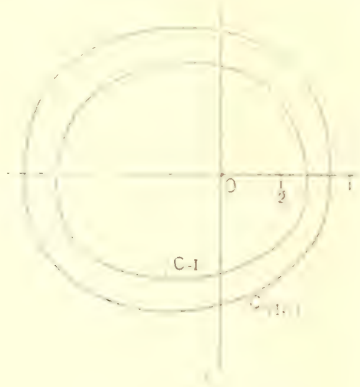
les fonctions f et φ étant des *fonctions continues de t* dans l'intervalle $(0, 1)$.

75. Je vais montrer ceci d'une façon bien nette en formant, théoriquement, les fonctions $\psi(t)$ et $\varphi(t)$, et je déduirai d'autres propriétés de E'.

A partir d'un certain rang I, on sait que toutes les C_{-i} $(i > I)$ sont dans la région où $|\varphi'(z)| < M > 1$, par suite aussi dans une région où $|\psi'(z)| < N < 1$, $\psi(z)$ étant la fonction inverse de $\varphi(z)$.

Considérons l'anneau compris entre les deux courbes C_{-1} et $C_{-(1+1)}$. Les deux courbes limites sont des courbes algébriques simples formées *d'un seul arc analytique* fermé, puisque le C initial (ou

aucune des C_{-i}) ne passant par aucun point critique de ψ, aucune des C_{-i} n'aura de point anguleux. On peut alors faire une représentation conforme de l'anneau (C_{-1}, C_{-1+1}) sur un anneau $(\varepsilon\varepsilon')$ compris entre deux cercles concentriques. Il suffit pour cela que le rapport des rayons des cercles ε et ε' soit un nombre conve-



nable. La fonction analytique $F(z)$ qui, à tout point z intérieur à l'anneau $(\varepsilon\varepsilon')$, fait correspondre un point $F(z)$ intérieur à l'anneau (C_{-i}, C_{-i+1}) est encore analytique sur ε, ε' et un peu au delà, puisque C_{-i} comme C_{-i+1} sont formés d'un seul arc analytique [1]. Aux rayons tels que $\mathcal{A}\mathcal{A}'$ qui unissent un point de ε à un point de ε' correspondent des courbes analytiques unissant un point A de C_{-i} à un point B de C_{-i+1}. A et A', B et B' se correspondent par la fonction $F(z)$. L'arc de courbe analytique AB coupe orthogonalement les courbes C_{-i} et C_{-i+1}, puisque le rayon $\mathcal{A}\mathcal{A}'$ coupe orthogonalement ε et ε', et puisque les angles sont conservés par la représentation conforme que $F(z)$ définit. A *tous*

(1) Voir Picard, *Traité d'Analyse*, t. II (2e édition), p. 361 et suiv.

les rayons de l'anneau $\varpi\varpi'$ correspondent ainsi des trajectoires orthogonales de C_{-1} *et* $C_{-(l+1)}$; ces trajectoires font correspondre à tout point A de C_{-1} un point B et un seul de $C_{-(l+1)}$ situé sur la trajectoire orthogonale de AB. A deux points distincts de C_{-1} correspondent deux points distincts de $C_{-(l+1)}$ et réciproquement. Deux trajectoires orthogonales issues de deux points distincts de C_{-1} n'ont aucun point commun, et par chaque point de C_{-1} ne passe qu'une de ces trajectoires.

76. z décrivant C_{-1}, considérons un de ses antécédents z_{-1} [$\psi(z_{-1}) = z$]: il décrira $C_{-(l+1)}$; si z décrit la trajectoire orthogonale AB, z_{-1} va décrire une courbe $A_{-1}B_{-1}$ qui sera orthogonale à $C_{-(l+1)}$ comme AB l'est à C_{-1}; en B_{-1}, cette courbe $A_{-1}B_{-1}$ sera orthogonale à $C_{-(l+2)}$ comme AB l'est en B à $C_{-(l+1)}$. Lorsque z occupe toutes les positions sur C_{-1}, à chaque antécédent z_{-1} de z correspond ainsi une trajectoire qui coupe orthogonalement $C_{-(l+1)}$ et $C_{-(l+2)}$; si la trajectoire orthogonale AB issue de z balaie *deux fois de suite* l'anneau $(C_{-1}, C_{-(l+1)})$, la trajectoire $A_{-1}B_{-1}$, antécédente de AB [qui est décrite par une détermination quelconque de $\psi(z)$ quand z décrit AB] *balaie une fois* l'anneau $(C_{-(l+1)}, C_{-(l+2)})$. Cela tient à ce que si z décrit deux fois de suite C_{-1}, chacun de ses deux antécédents correspondant à une quelconque des deux déterminations de $\psi(z)$ décrit une fois d'une façon continue $C_{-(l+1)}$ en marchant toujours dans le même sens.

77. Chaque trajectoire orthogonale AB de l'anneau $(C_{-1}, C_{-(l+1)})$ admet deux antécédentes qui sont trajectoires orthogonales de l'anneau $(C_{-(l+1)}, C_{-(l+2)})$. Ce dernier anneau est donc, lui aussi, sillonné de trajectoires orthogonales à $C_{-(l+1)}$ et $C_{-(l+2)}$ et qui sont telles évidemment que deux quelconques de ces trajectoires sont ou bien identiques, ou bien n'ont aucun point commun. Ces nouvelles trajectoires prolongent celles de l'anneau $(C_{-1}, C_{-(l+1)})$, *avec continuité de la tangente*, mais *sans nécessairement les prolonger analytiquement* [1]. En effet, la trajectoire BD de $(C_{-(l+1)}, C_{-(l+2)})$ qui passe en B a pour tangente en B *la normale à la courbe* $C_{-(l+1)}$, mais c'est un *arc analytique* qui est antécédent d'une trajectoire de $(C_{-1}, C_{-(l+1)})$,

[1] Il ne faut pas croire que les trajectoires de $(C_{-(l+1)}, C_{-(l+2)})$ qui prolongent deux trajectoires déterminées, d'ailleurs quelconques de $(C_{-1}, C_{-(l+1)})$, sont les antécédentes de ces dernières; il n'en est rien en général.

issue du conséquent B_1 *de* B, et il n'y a aucune raison *a priori* pour que l'antécédente BD de la trajectoire B_1D_1 de $(C_{-1}, C_{-(1+2)})$ soit *prolongement analytique* de la trajectoire AB de $(C_{-1}, C_{-(1+2)})$.

L'anneau $(C_{-1}, C_{-(1+2)})$ (1) est donc sillonné de trajectoires orthogonales à C_{-1}, $C_{-(1+2)}$, $C_{-(1+3)}$ formées chacune de deux arcs analytiques se raccordant sur $C_{-(1+1)}$ avec continuité de la tangente. Deux trajectoires n'ont aucun point commun ou coïncident sur tout leur parcours.

Le processus peut évidemment se continuer, car la zone où l'on opère (région entre C et Γ) ne contient pas de point critique de $\psi(z)$. On définira ainsi des trajectoires *orthogonales à toutes les* C_{-i} d'indice $i \geqq 1$. Elles seront formées chacune d'une infinité d'arcs, à savoir les portions entre C_{-i} et $C_{-(i+1)}$, qui seront individuellement analytiques, se raccordant les unes aux autres avec continuité de la tangente. Deux trajectoires ou bien sont identiques ou bien n'ont aucun point commun *intérieur à* R_0 (2).

78. On voit que, à l'aide de ces trajectoires orthogonales, s'établit une correspondance biunique et continue entre les points d'une C_{-i} quelconque d'indice $i \geqq 1$ et les points de C_{-1} elle-même (3). Faisant correspondre à chaque point de C_{-1} un paramètre variant de 0 à 1 (par exemple, on choisira sur C_{-1} une origine ω et un sens de parcours; si l est la longueur de C_{-1}, à tout point A de C_{-1} correspondra le paramètre $t = \frac{s}{l}$, s étant l'arc de C_{-1} décrit dans le sens positif pour aller de ω à A; t variant de 0 à 1, A décrit une fois C_{-1} dans le sens positif de ω à ω), on voit que les coordonnées x, y d'un point qui décrit C_{-i} seront des fonctions continues du paramètre t

$$x = f_i(t), \quad y = g_i(t), \quad (0 \leqq t \leqq 1; \quad i = 1, 2, \ldots, \infty).$$

---

(1) Si l'on faisait la représentation conforme de l'anneau $(C_{-1}, C_{-(1+2)})$ sur un anneau $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ formé de deux cercles concentriques, il n'y a aucune raison pour que les trajectoires qu'on vient de trouver correspondent aux rayons qui coupent orthogonalement les cercles $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}''$, car, dans cette représentation, *la courbe* $C_{-(1+1)}$ *ne correspondra pas en général à un cercle concentrique à* $\mathcal{C}$ $\mathcal{C}'$.

(2) *A priori*, rien n'empêche deux trajectoires distinctes, issues de deux points distincts de C_{-1}, de tendre vers un *même point de* E; nous verrons plus loin que c'est impossible.

(3) On fera correspondre entre eux les points situés sur une même trajectoire orthogonale.

et l'on n'aura simultanément

$$f_i(a) = f_i(b),$$
$$g_i(a) = g_i(b),$$

que si $a = 0$, $b = 1$, ou bien $a = b$ [1].

Tous les points des C_{-i} ($i = I + 1, I + 2, \ldots$) situés sur une même trajectoire orthogonale correspondent à la même valeur de t.

79. Je vais montrer que les $f_i(t)$ tendent uniformément vers une limite $f(t)$ ainsi que les $g_i(t)$.

Lorsque A, de paramètre t, décrit C_{-I} l'arc de trajectoire compris entre C_{-I} et $C_{-(I+1)}$ a un maximum Δ et un minimum tous les deux positifs (le maximum Δ joue un rôle analogue à ce qu'on a appelé plus haut l'*écart* entre C_{-I} et $C_{-(I+1)}$). Il est clair que $|\psi'(z)|$ étant $< N$ dans toute la région où sont les C_{-i} d'indice $i \geqq I$, toute portion de trajectoire comprise entre $C_{-(I+1)}$ et $C_{-(I+2)}$ sera $< N\Delta$, car ces portions sont décrites par $\psi(z)$ quand z décrit les portions situées entre C_{-I} et $C_{-(I+1)}$. De même on voit, en continuant, que toute portion de trajectoire comprise entre $C_{-(I+p)}$ et $C_{-(I+p+1)}$ sera $< N^p\Delta$. On en déduit immédiatement

$$|f_{I+p}(t) - f_{I+p-1}(t)| < N^p\Delta,$$
$$|g_{I+p}(t) - g_{I+p-1}(t)| < N^p\Delta$$
$$(p = 0, 1, \ldots, \infty),$$

quel que soit t, car évidemment $|x_{i+1}(t) - x_i(t)|$ différence des abscisses de deux points extrémités d'un arc de trajectoire compris entre C_{-i} et $C_{-(i+1)}$ est, en valeur absolue, inférieure à la longueur de cet arc qui est elle-même $< N\Delta$ d'après ce que l'on vient de voir.

Donc la suite des $f_i(t)$ tend *uniformément* pour $i = \infty$ vers une fonction limite $f(t)$ qui est *continue*. De même la suite des $g_i(t)$ tend *uniformément* vers une fonction limite $g(t)$ continue. Cela résulte en somme de ce que la série

$$(\Sigma) \qquad \Delta + N\Delta + N^2\Delta + \ldots + N^p\Delta + \ldots$$

convergeant [c'est une progression géométrique ($N < 1$)], on en

[1] C_{-i} répond exactement à la définition des courbes de Jordan *simples* fermées, que, pour abréger, l'on appelle *courbes de Jordan*.

déduit

$$|f_{(p+q)}(t) - f_{(p+q)}(t)| < \varepsilon,$$
$$|g_{(p+q)}(t) - g_{(p+q)}(t)| < \varepsilon,$$

quel que soit q positif, ε étant arbitrairement donné à l'avance, dès que p est pris assez grand pour que le reste R_p de la série (Σ) soit $< \varepsilon$.

80. L'ensemble E′ est donc l'ensemble des points

$$x = f(t), \qquad y = g(t) \qquad (0 \leq t \leq 1),$$

f et g étant deux fonctions continues, et

$$f(0) = f(1),$$
$$g(0) = g(1).$$

Toute trajectoire orthogonale est formée d'une infinité d'arcs dont les longueurs successives sont $\leq$ aux termes de la progression (Σ). Chacune de ces trajectoires a donc une *longueur finie*, et le point où elle coupe C_{-i} tend uniformément vers *un point limite et un seul*, quand i grandit indéfiniment; à savoir le point $[f(t), g(t)]$ correspondant à la valeur de t qui caractérise la trajectoire considérée.

81. Il peut subsister dans l'esprit du lecteur un doute relatif à la représentation particulière choisie pour les C_{-i} d'où découle une représentation particulière pour la limite des C_{-i}. Il est facile de la dissiper. Si P est un point quelconque de E′, il est, on l'a vu, limite de points des C_{-i}. On peut sur chaque C_{-i} choisir un point P_i tel que l'ensemble des P_i ait P pour seul point limite. On prendra par exemple pour P_i le pied de la plus courte distance $\overline{PP_i}$ abaissée de P sur C_{-i}, alors

$$\overline{PP_{-i+1}} < \overline{PP_i} < \overline{PP_{-i-1}},$$

car C_{-i+1} entoure C_{-i}; $\overline{PP_i}$ est une fonction de i qui décroît constamment vers zéro quand i croît indéfiniment. Evidemment avec ce choix des P_i l'ensemble des P_i n'a pour point limite que le point P. Soit t_i la valeur du paramètre t qui correspond au point P_i; P_i a pour coordonnées $f(t_i)$ et $g(t_i)$. L'ensemble des t_i est en général un ensemble infini dénombrable compris entre 0 et 1. Il a donc au moins un point limite τ (si une infinité de t_i coïncident, on prendra pour τ une des valeurs qui coïncident avec une infinité de t_i, ceci pour lever l'objection relative au cas où les t_i ne seraient

distincts qu'en nombre fini à cause des coïncidences précédentes), c'est-à-dire qu'on peut trouver dans tous les cas une infinité d'indices croissants

$$i_1, \quad i_2, \quad \ldots, \quad i_{p+1}, \quad \ldots,$$

tels que, quel que soit ε donné à l'avance, on ait $|\tau - t_{i_p}| < \varepsilon$, dès que $p > P$, P étant assez grand. Il est clair alors qu'à cause de la convergence uniforme des $f_i(t)$ vers $f(t)$ et des $g_i(t)$ vers $g(t)$, la suite

$$f_{i_1}(t_{i_1}), \quad f_{i_2}(t_{i_2}), \quad \ldots, \quad f_{i_p}(t_{i_p}), \quad \ldots$$

tendra vers $f(\tau)$ et

$$g_{i_1}(t_{i_1}), \quad g_{i_2}(t_{i_2}), \quad \ldots, \quad g_{i_p}(t_{i_p}), \quad \ldots$$

tendra vers $g(\tau)$. Or la première suite est celle des abscisses de la suite

$$P_{i_1}, \quad P_{i_2}, \quad \ldots, \quad P_{i_p}, \quad \ldots$$

qui tend vers P et P seul, et la seconde est celle des ordonnées de la même suite. Il en résulte que P (qui est un point quelconque de E′) a des coordonnées fournies par les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ pour la valeur τ du paramètre. Donc la *courbe continue*

$$x = f(t), \qquad y = g(t) \qquad (0 \leq t \leq 1),$$

est bien *identique à l'ensemble* E′.

82. Dans ce qui précède, rien ne nous assure *a priori* que l'ensemble des t_i n'a pas plus d'un point limite τ; donc rien ne nous assure *a priori* que E′ est une courbe continue *simple* fermée, c'est-à-dire dont chaque point ne correspond qu'à une valeur t du paramètre (exception faite bien entendu pour les valeurs 0 et 1 qui donnent le même point). Dire que tout point P de E′ correspond à une valeur au moins τ, de t, cela veut dire qu'il y a au moins une trajectoire orthogonale du système considéré dont P est l'extrémité, c'est celle qui passe par le point de C_{-1} de paramètre τ.

Cette trajectoire orthogonale, aboutissant en P, est une *ligne simple*, [c'est-à-dire une courbe continue qui correspond biunivoquement et continûment à un segment de droite (*voir* Préliminaires, § 2 et 4)], dont tous les points, sauf P, sont intérieurs à R_0. C'est dire que *tout point* P *de* E *qui est point frontière de* R_0 *est accessible par l'intérieur de* R_0 *en suivant une des trajectoires orthogonales précédentes.*

83. Je vais maintenant, en m'aidant de considérations nouvelles puisées dans la théorie des continus frontières d'un domaine, montrer que E′ est *ligne de Jordan fermée* SIMPLE.

Je dis en effet que tout point P de E′ est point *simple* de la frontière de R_0. L'hypothèse contraire conduirait à dire qu'on peut trouver une ligne simple fermée L ou courbe de Jordan fermée, issue de P et revenant en P (1), dont tous les points, sauf P, soient des points intérieurs à R_0, telle aussi qu'elle délimite une région intérieure (2), *dans laquelle se trouve au moins un point* Q *frontière de* R_0 (3), car cela revient à dire qu'on ne peut réduire cette courbe de Jordan L au seul point P d'un mouvement continu sans rencontrer de point Q de E′ distinct de P. Un raisonnement déjà fait antérieurement [*voir* p. 166, note (1)] prouve que Q ne pourrait alors être limite pour les antécédents successifs d'un point arbitraire de R_0 sans qu'on se heurte à une contradiction, car il y aurait alors des points intérieurs à R_∞ dans l'intérieur de la ligne L, points qu'on ne saurait joindre à des points intérieurs à R_∞ assez éloignés dans le plan (pour lesquels par exemple $|z| > 4$) pour être extérieurs à L, par aucune ligne simple qui ne rencontre L, c'est-à-dire qui ne sorte de R_∞ (car les points de L sont dans R_0), on ne passe en P, c'est-à-dire encore en un point non intérieur à R_∞, et ceci contredit le fait que R_∞ est d'un seul tenant et simplement connexe.

Tout point P de E′ étant *accessible par* R_0 et *point simple de la frontière de* R_0, *cette frontière ne peut être qu'une courbe de Jordan* (*voir* Th. XXIV, p. 366, du Mémoire cité plus haut, de M. Carathéodory).

84. Il n'est point nécessaire de recourir à ce théorème pour vérifier que E′ est une *courbe de Jordan*.

En effet, on a vu que tout point de E′ est accessible par l'intérieur de R_0. Mais tous les raisonnements faits pour R_0 valent pour R_i et pour l'approximation de E′ à l'aide des courbes Γ_i successives;

(1) P étant accessible par l'intérieur de R_∞, il n'y a rien là de contradictoire.

(2) On sait ce qu'il faut entendre par l'*intérieur* d'une courbe de Jordan fermée simple.

(3) Tous les auteurs ne donnent pas cette définition pour un point multiple de la frontière (*voir*, par exemple, CARATHÉODORY, *Math. Ann.*, t. LXXIII, p. 365 et suiv., § 44, 45, 46, 48 et surtout Th. XXIV), mais dans le cas où le point frontière considéré est *accessible*, ces définitions reviennent à celle que j'indique.

car, dans la région comprise entre C_{-i} et Γ, région où sont tracées toutes les Γ_{-i}, on a $|\psi'(z)| < N < 1$, et c'est là ce qui sert à établir la convergence uniforme des Γ_{-i} vers E', comme on a établi celle des C_{-i} vers E'. On voit donc que *tout point de* E' *est accessible aussi par l'intérieur de* R_∞. Une courbe continue E' fermée, dont tout point est ainsi accessible par son intérieur (R_0) et par son extérieur (R_∞), n'est autre qu'une *courbe de Jordan, courbe continue fermée dont les points correspondent biunivoquement et continûment aux points d'une circonférence* (*voir* SCHŒNFLIES, *Die Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*, 2e Partie, Chap. V, § 11 et 12).

85. La ligne fermée simple E', frontière commune de R_0 et R_∞, renferme des points racines des équations

$$z = \varphi_n(z) \quad (n = 1, 2, \ldots, r),$$

où $|\varphi'_n(z)| > 1$ (points de E), partout denses sur elles-mêmes. Elle passe, en particulier, par le point $z = 1 = \varphi(1)$, $\varphi'(1) = \frac{3}{2}$. Tout point de E' a tous ses conséquents et tous ses antécédents sur E'. C'est dire que E' reste invariante par la substitution simplement rationnelle $z_1 = \varphi(z)$ et par ses inverses. M. Fatou, à l'aide de la théorie des équations fonctionnelles, annonce dans sa Note des *Comptes rendus* qu'elle n'est pas analytique. Il est facile de voir qu'en un point de E, elle n'a pas en général de tangente déterminée.

86. Et tout d'abord remarquons qu'à cause de la relation

$$z_1 = \frac{z + z'}{2} = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4},$$

à un point arbitraire z_1 de E' correspondent deux antécédents z, symétriques par rapport au point $-\frac{1}{2}$, situés sur E'. Ceci montre que la courbe E' *admet le point* $-\frac{1}{2}$ *pour centre de symétrie*; il est clair qu'elle admet pour axe de symétrie l'axe réel Ox, puisque C_0 et les C_{-i} successives sont symétriques par rapport à cet axe. D'ailleurs les points de E sont deux à deux symétriques par rapport à cet axe puisque $z = \varphi_n(z)$ est une équation à coefficients réels, et ces points de E, partout denses sur la courbe de Jordan E' simple,

suffisant à la déterminer, la déterminent symétrique par rapport à Ox, comme l'ensemble E lui-même.

En définitive E′ admet pour axes de symétrie Ox, et la parallèle à l'axe Oy menée par le point $\left(-\frac{1}{2}\right)$. Ox coupe E′ en deux points qui sont le point 1 et le point -2, le segment $(-2, 1)$ est intérieur à R_0, les deux demi-droites $(1, +\infty)$ et $(-2, -\infty)$ sont intérieures à R_∞. Cela se voit immédiatement dès qu'on remarque que le segment $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ de l'axe réel est intérieur à R_0, car tous ses points, sauf le point $z = 1$, ont 0 pour seul point limite de leurs conséquents; le segment $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ symétrique du précédent par rapport à $z = -\frac{1}{2}$ (qui est centre de E′) est aussi intérieur à R_0. La demi-droite $(1, +\infty)$ est, on le voit de suite, intérieure à R_∞, ainsi que sa symétrique $(-2, -\infty)$ par rapport à $z = -\frac{1}{2}$.

E′ n'a sur Ox d'autre point que les points $z = 1$ et $z = -2$. E n'a donc sur Ox d'autre point que $z = 1$.

87. Considérons alors un point ζ de E, racine imaginaire de $z = \varphi_n(z)$, non située sur Ox. Désignons par $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-1}$ les points de E qui, avec ζ, forment groupe circulaire d'ordre n [1].

On a

$$\varphi_n(\zeta) = \varphi'(\zeta)\varphi'(\zeta_1)\ldots\varphi'(\zeta_{n-1})$$

Or

$$\varphi'(\zeta) = \zeta + \frac{1}{2}.$$

Les arguments de $\zeta + \frac{1}{2}, \zeta_1 + \frac{1}{2}, \ldots, \zeta_{n-1} + \frac{1}{2}$ sont les angles que font avec Ox les segments allant du point $-\frac{1}{2}$ aux points $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$. Ces arguments ne sont pas nuls si ζ est un point arbitraire de E, donc imaginaire. La somme de ces arguments ne jouit pas d'une propriété particulière. Elle n'est pas *constamment nulle* pour les points de E. En général $\varphi_n(\zeta)$ *n'est donc pas réel* en un point arbitraire de E. Il pourrait, à ce sujet, y avoir doute pour les groupes circulaires d'ordre pair, pour lesquels comme pour le groupe d'ordre 2,

---

(1) Si ζ est imaginaire, les ζ_i le sont aussi en général.

$\left(\zeta = \frac{-3 - i\sqrt{15}}{2}, \zeta_1 = \frac{-3 + i\sqrt{15}}{2}\right)$, il pourrait arriver peut-être que les $\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$ fussent deux à deux symétriques par rapport à l'axe réel [l'équation $z = \varphi_n(z)$ étant à coefficients réels], auquel cas $\varphi'_n(\zeta)$ serait réel. Mais pareil fait ne se produira certainement pas pour les groupes d'*ordre impair*, les racines d'un tel groupe ne pouvant se grouper deux à deux par symétrie. On est donc en droit de penser que, sauf des points exceptionnels, un point arbitraire ζ de E, appartenant à l'indice n, rend $\varphi'_n(\zeta)$ imaginaire. Il est même probable, dans le cas général, que l'argument de $\varphi'_n(\zeta)$ sera incommensurable à 2π. Considérons alors un tel point ζ de E, $\zeta = \varphi_n(\zeta)$ où $\arg\varphi'_n(\zeta) \neq 0$ ou π. Les points critiques de l'inverse de $\varphi_n(z)$ étant ceux de l'inverse de $\varphi'(z)$ (c'est-à-dire $-\frac{1}{8}$ et ∞) et leurs conséquents jusqu'à l'ordre n, qui n'ont pour point limite (n devenant ∞) que 0 et ∞, on pourra entourer ζ d'un cercle dans lequel la fonction inverse de $\varphi_n(z)$ aura une branche holomorphe $\psi_n(z)$ devenant égale à ζ pour $z = \zeta$. On aura $\psi'_n(\zeta) = \frac{1}{\varphi'_n(\zeta)}$. Donc $|\psi'_n(\zeta)| < 1$ et $\arg\psi'_n(\zeta) \neq 0$ ou π, et même $\arg\psi'_n(\zeta) =$ incommensurable à 2π, en général. On peut alors entourer ζ d'un cercle C de rayon ρ dans lequel la relation $|z - \zeta| < \rho$ entraîne

$$|\psi_n(z) - \zeta| < H|z - \zeta| \quad (0 < H < 1).$$

C'est dire que les points $\psi_n(z), \psi_{2n}(z), \ldots, \psi_{pn}(z), \ldots$ qui sont des antécédents d'ordre n, $2n$, $3n$, ... du point z tendent vers ζ dès que $|z - \zeta| < \rho$.

Mais il est clair que, dès que $|z - \zeta|$ est assez petit, on aura

$$\arg|\psi_n(z) - \zeta| - \arg(z - \zeta) = \text{sensiblement } \arg\psi'_n(\zeta),$$
$$\arg|\psi_{pn}(z) - \zeta| - \arg(z - \zeta) = \text{sensiblement } \arg\psi'_{pn}(\zeta) = p\arg\psi'_n(\zeta).$$

Ceci veut dire que les points $\psi_n(z), \psi_{2n}(z), \ldots$ se rapprochent de ζ et les rayons qui joignent ζ à deux points consécutifs de cette suite font entre eux *un angle qui tend vers* $\arg\psi'_n(\zeta)$, quand, leur indice devenant ∞, les points considérés tendent vers ζ.

Si donc $\arg\psi'_n(z) \neq 0$ ou π, $\arg|\psi_{pn}(z) - \zeta|$ ne tendra pas vers une limite déterminée quand, p augmentant indéfiniment, $\psi_{pn}(z)$ tend vers ζ, et même, si $\arg\psi'_n(\zeta)$ incommensurable à 2π, $\arg|\psi_{pn}(z) - \zeta|$ sera voisin de *toute valeur choisie entre* 0 *et* 2π,

pourvu que p soit choisi assez grand. Remarquant maintenant que, si z est choisi sur E′, tous les $\psi_{pn}(z)$ seront sur E′, cela voudra dire que E′ *n'a pas en* ζ *de tangente déterminée*, et même si

$$\arg \psi_n(\zeta) = \text{incommensurable} \times \pi,$$

cela voudra dire que E′ *a, au voisinage de* ζ, *des points voisins de toute droite issue de* ζ. ζ est alors analogue à ces points doubles de substitutions loxodromiques E′ situés sur la frontière du domaine d'existence d'une fonction kleinéenne [*voir* Poincaré, *Mémoire sur les groupes kleinéens* (*Acta*, t. III, 1883, p. 77), et aussi Schœnflies, *Die Lehre* ..., Chap. V, § 14, déjà cité plus haut]. La courbe E′ entoure un de ces points ζ à la manière d'une double spirale logarithmique ayant un seul pôle (1). Je n'insiste pas là-dessus, les travaux récents sur la nature des lignes de Jordan ayant suffisamment éclairci l'allure de ces courbes au voisinage d'un de leurs points.

88. Mais, puisque j'ai parlé d'un rapprochement entre les points ζ de E situés sur E′ et les points doubles des substitutions d'un groupe kleinéen admettant une courbe fondamentale du genre de celles signalées par Poincaré, je vais indiquer une génération de E′, d'un caractère théorique, tout à fait parallèle à la génération de la courbe fondamentale du groupe kleinéen à partir du domaine fondamental de ce groupe. Dans ce dernier cas, on sait que Poincaré part d'un domaine fondamental D simplement connexe limité par des cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tels que C_1 touche C_2, C_2 touche C_3, ... C_{n-1} touche C_n, C_n touche C_1, tous les contacts étant extérieurs. En ajoutant à D les domaines déduits de D par symétries relatives à ses côtés, puis ajoutant au domaine obtenu ses symétriques par rapport à ses côtés, ... indéfiniment, le lieu des sommets des domaines successifs, l'ensemble dérivé de l'ensemble de ces sommets, est la courbe signalée par Poincaré.

---

(1) Cela n'a rien de contradictoire. Entre deux spirales logarithmiques non

sécantes ayant même pôle ζ, on peut observer une aire simplement connexe pour laquelle ζ est point frontière (*voir* la figure).

89. Je rappelle que j'ai signalé au début de ce Mémoire un rapprochement entre la génération des antécédents successifs d'un point z_1 dans l'itération de $z_1 = \varphi(z)$ et la génération des homologues d'un point z_1 dans un groupe automorphe, comme antécédents successifs (¹) du point z_1, un antécédent z de z_1 étant défini par la relation

$$f(z, z_1) = (z_1 - S_1(z))(z_1 - S_2(z))\ldots(z_1 - S_n(z)) = 0,$$

les $S_i(z)$ étant les substitutions fondamentales du groupe (*voir* p. 105 et suiv.). Le domaine fondamental D du groupe kleinéen est tel que, quel que soit le point z intérieur au domaine d'existence, il ait un homologue seulement intérieur à D (deux dans le cas où l'homologue est sur une frontière de D).

90. Je vais déterminer, parallèlement, un domaine fondamental ω pour l'itération de $z_1 = \frac{z - z^2}{2}$, c'est-à-dire un domaine ω, intérieur à R_n, tel que si l'on choisit un point quelconque z intérieur à R_n, il y ait, dans l'ensemble de ses antécédents, *un antécédent au plus de chaque ordre* (²) qui soit intérieur à ω (exception faite pour les points situés sur le contour de ω), tel aussi qu'à partir d'un certain indice i, il y ait, dans ω, *un conséquent de chaque ordre* $z_i, z_{i+1}, \ldots$.

Pour faire une exposition plus simple, nous ramenons d'abord, en posant

$$z = -\frac{1}{2} + Z,$$

la substitution $z_1 = \varphi(z) = \frac{z - z^2}{2}$ à s'écrire

$$Z_1 = \frac{4Z^2 + 3}{8}$$

pour laquelle les points limites à convergence régulière sont ∞ et $\frac{1}{2}$

(¹) z_1 étant dit conséquent de z, il est évident qu'ici l'ensemble des *conséquents* successifs d'un point est identique à celui de ses *antécédents* successifs.

(²) J'ai dû faire ainsi parce qu'en réalité, dans le cas où les homologues d'un point z_1 dans un groupe automorphe sont définis comme antécédents ou conséquents successifs de z_1 par la relation $f(z, z_1) = 0$, il y a une *infinité* d'antécédents qui tombent dans D, mais *ils sont tous confondus en un même point*, et il n'y en a qu'un *de chaque ordre*. Ce sont toutes ces propriétés de D que j'ai attribuées à ω.

Tout point Z_1 du plan a deux antécédents symétriques par rapport à la nouvelle origine $Z = 0$. Donc, il a un antécédent et un seul *dans le demi-plan supérieur* $\mathfrak{I}(z) > 0$ que j'appelle D_{-1}.

Remarquons maintenant que $Z_1 = \frac{3}{8}$ est point critique pour la fonction $Z = \Psi(Z_1)$ inverse de $Z_1 = \frac{4Z^2+3}{8}$. Si donc Z_1 décrit l'axe réel de $+\infty$ à $-\infty$, à la demi-droite $(+\infty, \frac{3}{8})$ correspond pour Z la demi-droite $(+\infty, 0)$, Z étant l'antécédent de Z_1 qui est situé dans le demi-plan supérieur quand Z_1 est quelconque dans le plan; Z_1 décrivant $(\frac{3}{8}, -\infty)$, Z décrira *la partie positive* Oy *de l'axe imaginaire;* Z_1 décrivant le demi-plan $\mathfrak{I}(Z_1) > 0$, celui de ses antécédents qui est dans le demi-plan supérieur *décrira le premier quadrant* XOY $[\mathfrak{R}(Z) > 0, \mathfrak{I}(Z) > 0]$ que j'appelle D_{-2}.

Tout point du plan a donc un antécédent d'ordre 1 dans le demi-plan supérieur D_{-1} et un deuxième antécédent symétrique du précédent par rapport à O; parmi les antécédents d'ordre 2 : ceux qui naissent du premier antécédent d'ordre 1 sont l'un dans le premier, l'autre dans le troisième quadrant; ceux qui naissent du deuxième antécédent d'ordre 1 sont respectivement dans le deuxième et le quatrième quadrant [car à deux points symétriques par rapport à l'axe réel correspondent des antécédents symétriques par rapport à cet axe ($Z_1 = \frac{4Z^2+3}{8}$ étant à coefficients réels), donc à un point quelconque du demi-plan inférieur correspond un antécédent dans le quatrième quadrant et un antécédent opposé dans le deuxième].

Tout point du plan a donc un antécédent d'ordre 2 et un seul dans le premier quadrant D_{-2}.

On continue l'application du procédé. Tout point Z du demi-plan supérieur avait un antécédent Z_{-1} et un seul dans le premier quadrant; tout point Z_{-1} de ce premier quadrant aura donc un antécédent et un seul Z_{-2} dans une partie du premier quadrant qui sera décrite par l'antécédent Z_{-1} d'ordre 1 de Z quand Z décrira le premier quadrant.

Pour cela, on fait décrire à Z : 1° le demi-axe réel $(+\infty, \frac{3}{8})$ auquel

cas Z_{-1} décrit $(+\infty, 0)$; 2° les egment $\left(\frac{3}{8}, 0\right)$ auquel cas Z_{-1} décrit un segment OO_{-1}, de l'axe imaginaire OY (O_{-1}, antécédent de O a pour affixe $\frac{i\sqrt{3}}{2}$); 3° le demi-axe imaginaire OY auquel cas Z_{-1} décrit une demi-branche d'hyperbole H issue du point $\left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$ orthogonale à OY et située dans le premier quadrant.

L'équation de cette hyperbole est aisée à obtenir : à $Z = X + iY$ correspond $Z_1 = X_1 + iY_1$, tel que

$$X_1 = \frac{4(X^2 - Y^2) - 3}{8},$$
$$Y_1 = XY.$$

L'hyperbole H en question s'obtient par $X_1 = 0$; elle a donc pour équation

$$X^2 - Y^2 + \frac{3}{4} = 0.$$

Elle est équilatère.

Lorsque Z décrit le premier quadrant, celui de ses antécédents qui est au-dessus de OX décrit l'aire limitée par OX, OO_{-1} et la branche H, aire contenant la bissectrice de XOY. J'appelle D_{-3} cette aire. Tout point du plan a donc un antécédent d'ordre 3 et un seul dans D_{-3}, comme il avait un antécédent d'ordre 2 et un seul dans D_{-2}. Reprenant tout cela, on voit qu'un point quelconque du plan a un antécédent d'ordre 1 et un seul dans D_{-1}, un antécédent d'ordre 2 et un seul dans D_{-2}, un antécédent d'ordre 3 et un seul dans D_{-3}. Mais on a vu aussi qu'un point arbitraire du plan a deux antécédents d'ordre *deux* dans D_{-1}; il aurait donc deux antécédents d'ordre *trois* dans D_{-2}, et quatre antécédents d'ordre *trois* dans D_{-1}, etc. Donc, si nous voulons rechercher un domaine ω fondamental tel qu'il n'y ait *qu'un antécédent au plus de chaque ordre* dans ω pour tout point intérieur à R_∞, nous ne pouvons prendre pour ω ni D_{-1}, ni D_{-2}, ... mais *il faut pousser le procédé indéfiniment.*

Tout point Z intérieur à D_{-3} a un antécédent et un seul dans une aire D_{-4} intérieure à D_{-3} limitée par : 1° l'axe OX; 2° le segment OO_{-1}, de OY; 3° l'arc $O_{-1}O_{-2}$ de la branche d'hyperbole H, qui limite D_{-3} (O_{-2} étant l'antécédent de O_{-1} sur cette branche); 4° une

branche infinie H_{-1} d'une courbe algébrique antécédente d'ordre 1 de H, issue de O_{-2} orthogonalement à H, tracée dans l'intérieur de D_{-3}, ayant une direction asymptotique qui fait l'angle $\frac{\pi}{8}$ avec OX, la direction asymptotique de H faisant $+\frac{\pi}{4}$ avec OX. De même tout point intérieur à D_{-4} aura un antécédent et un seul dans une aire D_{-5} antécédente de D_{-4} intérieure à D_{-4}, limitée par OX, OO_{-2}, l'arc de H qui va de O_{-1} à O_{-2}, l'arc de H_{-1} qui va de O_{-2} à O_{-1} antécédent de O_{-2}, enfin une branche infinie H_{-2} de courbe algébrique antécédente de H_{-1} qui part de O_{-2} orthogonalement à H_{-1} et est tracée dans D_{-4}, sa direction asymptotique est $\frac{\pi}{16}$.

91. Poursuivons ce processus indéfiniment, les aires D_{-1}, D_{-2}, ... sont contenues chacune dans la précédente; si Z décrit D_{-i}, il a un antécédent d'ordre 1 et un seul dans D_{-i-1}; D_{-i-1} est antécédente de D_{-i}. Je dis que l'aire D_{-i} ne tend pas vers zéro quand i augmente indéfiniment. Envisageons en effet le voisinage de $Z = \frac{1}{2}$ qui est point limite à convergence régulière, par exemple, *la partie* $(\mathcal{E}_1)$ *située au-dessus de* OX *de l'aire limitée par un cercle assez petit* (1) *de centre* $Z = \frac{1}{2}$, c'est une aire située dans D_{-1}, D_{-2}. Je dis que si elle est dans D_{-1}, elle est aussi dans D_{-2}. En effet, si Z décrit l'aire $(\mathcal{E}_1)$, son antécédent d'ordre 1 situé au-dessus de OX décrit une aire $(\mathcal{E})$ qui *contient à son intérieur* (2) l'aire $(\mathcal{E}_1)$, les frontières de ces deux aires n'ayant en commun qu'un segment de l'axe réel. Or $(\mathcal{E})$ est contenue dans D_{-2}, car D_{-2} est décrite par l'antécédent de Z situé dans

---

(1) On pourra prendre le cercle $\left|Z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{16}$, car la distance de $\frac{1}{2}$ au point critique voisin qui est $Z = \frac{3}{8}$ étant $\frac{1}{8}$, nous prendrons un cercle $\mathcal{E}_1$ de rayon $< \frac{1}{8}$ laissant le point critique extérieur pour ne pas avoir de difficulté relativement à l'antécédent choisi.

(2) Ceci résulte de la remarque évidente que si $Z = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, par exemple, on a

$$Z_1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}\left(Z - \frac{1}{2}\right),$$

par un procédé maintes fois employé dans ce Mémoire.

le demi-plan supérieur quand Z décrit D_{-i}. Donc D_{-i+1} contenant (ε) contient l'aire (ε_1) intérieure à ε.

Donc tous les D_{-i} contiennent (ε_1). On peut donc parler sans équivoque de *l'aire* Δ *limite de* D_{-i} *pour* $i = \infty$. Elle contient l'aire (ε_1). Elle est limitée par une infinité de lignes algébriques : 1° l'axe réel OX ; 2° le segment OO_{-1} de OY ; 3° l'arc $O_{-1}O_{-2}$ de la branche H ; 4° l'arc $O_{-2}O_{-3}$ de la branche H_{-1} antécédente de H ; 5° l'arc $O_{-3}O_{-4}$ de la branche H_{-2} antécédente de H_{-1}, ... ; $(i+1)^{\text{e}}$ l'arc $O_{-i-1}O_{-i}$ de la branche H_{-i-2} antécédente de H_{-i-3} ....

Δ est un polygone curviligne d'une infinité de côtés dont tous les angles sont droits ; si on le parcourt, à partir du point $+\infty$ en venant vers O sur l'axe réel, puis décrivant OO_{-1}, ..., on a l'aire Δ à sa droite, et chaque côté du polygone est *antécédent* d'ordre 1 du précédent. Il faudrait encore remarquer que le point $\frac{3}{8}$ est à considérer comme un sommet du polygone (sommet critique) dont l'antécédent est O ; OO_{-1} est antécédent du segment $(0, \frac{3}{8})$ de OX, et OX est antécédent de la demi-droite $(+\frac{3}{8}, +\infty)$ de OX.

92. *Un point intérieur à* Δ est intérieur à tous les D_{-i} ; donc l'antécédent d'ordre 1 de ce point situé au-dessus de OX est aussi intérieur à tous les D_{-i} d'après la définition de ces D_{-i} ; donc cet antécédent est *intérieur à* Δ. Tout point intérieur à Δ a un antécédent d'ordre 1 et un seul intérieur à Δ. Tout point intérieur à Δ a son conséquent intérieur à Δ, car ce conséquent est intérieur à tous les D_{-i}.

Tous les conséquents d'un point intérieur à Δ *sont intérieurs à* Δ. Examinons les antécédents successifs d'un point intérieur à Δ. Il y en a un d'ordre 1 et un seul intérieur à Δ. D'ailleurs tout *point extérieur à* Δ *n'a aucun antécédent d'ordre* 1 *dans* Δ, ni sur son contour, car le conséquent d'un point intérieur à Δ (ou sur son contour) étant intérieur à Δ ou sur son contour, il faudrait admettre, contrairement à l'hypothèse, que le point donné est intérieur à Δ. Donc un point extérieur à Δ n'a *aucun antécédent* dans Δ. Mais un point intérieur à Δ ayant un antécédent d'ordre 1 et un seul intérieur à Δ aura, de ce fait, *un antécédent de chaque ordre et un seul* intérieur à Δ.

Δ possède donc déjà cette propriété que tout point du plan aura

un antécédent et un seul de chaque ordre dans Δ, s'il est intérieur à Δ, et n'en aura aucun s'il est extérieur à Δ.

95. Je dis que Δ *est tout entier à distance finie*, tout point intérieur à Δ a par exemple un module $|Z| < \frac{1}{4}$, de même tout point du contour de Δ, sauf peut-être des points de l'axe OX, est à distance finie. En effet tout point du contour de Δ, non situé sur OX, a un conséquent sur OO_{-1}, et un sur le segment $(0, \frac{3}{8})$ de l'axe OX, tous les points de ce dernier segment sont d'ailleurs intérieurs à R_0, comme on le voit immédiatement. Donc tous les points du contour de Δ, sauf la demi-droite $(\frac{3}{2}, +\infty)$ de OX [1], sont intérieurs à R_0. On pourrait en conclure, puisque Δ étant un domaine simplement connexe limité par un seul contour, que Δ tout entier est intérieur à R_0. Il y a cependant une difficulté qui se lève facilement.

Pour cela, je remarque que, tout point Z intérieur à Δ ayant tous ses conséquents Z_n dans Δ, si θ_n désigne l'argument du conséquent Z_n on devra avoir $\operatorname{tang}\theta_n > 0$, quel que soit n.

Or si r et θ sont les coordonnées de Z,

$$Z = re^{i\theta}$$

si r_1 et θ_1 sont les coordonnées de Z_1,

$$Z_1 = r_1 e^{i\theta_1}.$$

On a

$$r_1 = \left(\frac{4r^2-3}{8}\right)^2 + \frac{3r^2}{4}\cos^2\theta$$

et

$$\operatorname{tang}\theta_1 = \frac{8r^2\operatorname{tang}\theta}{4r^2-3+(4r^2+3)\operatorname{tang}^2\theta}.$$

Si $|r| < \frac{1}{4}$, on a

$$4r^2-3 > 0, \qquad r_1 > \frac{4r^2-3}{8} > \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad 4r^2-3 > 0;$$

d'où

$$\operatorname{tang}\theta_1 > \operatorname{tang}\theta \quad \text{à condition que} \quad \operatorname{tang}^2\theta < \frac{4r^2+3}{4r^2-3},$$

et

$$\operatorname{tang}\theta_1 < 0 \quad \text{si} \quad \operatorname{tang}^2\theta > \frac{4r^2+3}{4r^2-3}.$$

---

(1) Qui d'ailleurs, on le reconnaîtra immédiatement plus tard, n'est pas frontière de Δ, n'étant pas limite de points intérieurs à Δ.

Dans ce dernier cas, si $\tang^2\theta > \frac{4r^2+3}{4r^2-3}$, $\tang\theta_1 < 0$; donc z_1 n'est pas dans Θ; donc z n'y est pas non plus.

Si $\tang^2\theta < \frac{4r^2+3}{4r^2-3}$, on aura

$$\tang\theta_1 > \tang\theta \quad \text{et} \quad r_1 > r,$$

donc θ_1 grandit ainsi que r. On continuera, tant que

$$\tang^2\theta_i < \frac{4r_i^2+3}{4r_i^2-3},$$

à avoir

$$\tang\theta_{i+1} > \tang\theta_i \quad (\theta_{i+1} > \theta_i) \quad \text{et} \quad r_{i+1} > r_i.$$

Mais, r_i grandissant indéfiniment avec l'indice i, $\frac{4r_i^2+3}{4r_i^2-3}$ décroît constamment vers 1, tandis que $\tang\theta_i$ croît constamment, il arrivera que, pour un certain indice p, on aura $\tang^2\theta_p > \frac{4r_p^2+3}{4r_p^2-3}$ et le conséquent Z_{p+1} étant alors hors de Δ, Z ne peut être dans Δ.

Je dis qu'il arrivera fatalement qu'un certain Z_p soit tel que

$$\tang\theta_p < \frac{4r_p^2+3}{4r_p^2-3};$$

car l'hypothèse contraire obligerait $\tang\theta_p$ croissant à avoir une limite positive $+1$ pour $p = \infty$, mais la relation

$$\tang\theta_p = \frac{8r_{p-1}^2 \tang\theta_{p-1}}{4r_{p-1}^2 + 3 - (4r_{p-1}^2 - 3)\tang^2\theta_{p-1}},$$

où r_p tend vers ∞ si p augmente indéfiniment, prouve qu'il est impossible que $\tang\theta_{p-1}$ et $\tang\theta_p$ tendent vers une même limite $l \neq 0$, car on devrait avoir pour l la relation

$$l = \frac{8l}{4(1-l^2)} = \frac{2l}{1-l^2},$$

qui n'est satisfaite que pour le nombre réel $l = 0$ et les imaginaires $l = \pm i$. Il est donc prouvé que tout point du cercle $|Z| = 1$ est extérieur à Δ, car un au moins de ses conséquents est extérieur à Δ (celui pour lequel $\tang\theta_p < 0$). Donc Δ *tout entier est intérieur à* $|Z| = 1$. Tout point *intérieur à* Δ a tous ses conséquents *intérieurs* à Δ, et non sur son contour, ces conséquents sont donc *tous à distance finie*. Donc tout point intérieur à Δ est intérieur à R_1, ainsi

que tout point du contour de Δ, sauf la demi-droite $(+\frac{3}{2}, +\infty)$ de l'axe réel OX. *Nous conviendrons que cette demi-droite n'appartient*

Fig. 1.

pas au contour de Δ, aussi bien il n'y a pas de point de Δ hors de l'axe réel au voisinage de tout point de $(+\frac{3}{2}, +\infty)$. Donc Δ aura pour frontière le segment $(0, \frac{3}{2})$ de OX, puis OO_{-1}, $O_{-1}O_{-2}$, etc., tous ces côtés étant intérieurs à R_0 et délimitant une région simplement connexe contenant l'aire (ε_1) $Z = \frac{3}{2}\left|\frac{\varepsilon_1}{10}\right|$ située au-dessus de OX, dont il a été fait mention plus haut.

94. Soit Δ', le domaine symétrique de Δ par rapport à l'axe réel. Envisageons le domaine ω formé par la réunion de Δ et Δ', après suppression de leur segment commun de frontière $(0, \frac{3}{2})$ situé sur l'axe réel. ω est un domaine d'un seul tenant simplement connexe, intérieur à R_0, n'ayant en commun avec la frontière de R_0 que le point $Z = \frac{3}{2}$. Δ' ayant exactement les mêmes propriétés que Δ, à cause de ce fait que deux points symétriques par rapport à OX ont leurs antécédents et leurs conséquents symétriques par rapport à OX, la relation $Z_1 = \frac{4Z^2 - 9}{8}$ établit donc une transformation

biunivoque de l'intérieur de Δ' en lui-même, comme de l'intérieur de Δ en lui-même.

L'ensemble $\Delta + \Delta' = \omega$ contient le cercle ε_1, $Z = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{6}}$ qui entoure le point limite $Z = \frac{1}{2}$ à convergence régulière. Il en résulte que tout point intérieur à R_n, ayant, à partir d'un certain rang, tous ses conséquents intérieurs à ε_1, aura, à partir d'un certain rang, tous ses conséquents intérieurs à ω.

95. ω a bien les propriétés requises :

1° Tout point intérieur à R_n ne peut avoir qu'un antécédent au plus de chaque ordre intérieur à ω. Et cela arrivera en effet et n'arrivera que si le point considéré est intérieur à ω. S'il est intérieur à Δ, il y a un antécédent de chaque ordre intérieur à Δ; s'il est intérieur à Δ', il y a un antécédent de chaque ordre intérieur à Δ'.

2° Tout point intérieur à R_n a, à partir d'un certain rang, tous ses conséquents successifs dans ω (il n'y a bien sûr qu'un conséquent de chaque ordre).

A tout point intérieur à ω correspond un antécédent intérieur à ω, mais pour dire que l'intérieur de ω est transformé biunivoquement en lui-même, il faut, à cause du point critique $Z = \frac{3}{8}$, supposer qu'on a coupé ω suivant le segment $\left(O, +\frac{1}{2}\right)$ de OX (qui contient $Z = \frac{3}{8}$), et imaginer que la coupure ainsi tracée appartient à la frontière de ω. | Cette coupure a pour antécédente le segment $\left(-\frac{i\sqrt{3}}{2}, \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$ de OY, suivi du segment $\left(O, \frac{1}{2}\right)$ de OX |

96. A cause de la propriété 2° de ω, on voit que R_n s'obtient en ajoutant aux aires Δ et Δ' toutes leurs antécédentes d'ordre 1, puis toutes leurs antécédentes d'ordre 2, ..., indéfiniment et en supprimant toutes les parties communes aux frontières de deux aires ainsi déterminées. Cela nous donne une génération de R_n à partir de Δ qui rappelle la génération du domaine d'existence d'un groupe kleinéen rappelée plus haut.

En effet, les antécédentes de Δ sont Δ et sa symétrique par rapport à O, celles de Δ' sont Δ' et sa symétrique par rapport à O

Ces quatre aires réunies après suppression des frontières communes

$$\left| \text{segment } \left(-\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\right) \text{ de OX, segment } -\frac{i\sqrt{3}}{2}, +\frac{i\sqrt{3}}{2} \text{ de OY} \right|$$

forment un polygome curviligne $\mathfrak{D}_{-1}$ symétrique par rapport à OX et OY limité par des arcs des courbes algébriques $H, H_{-1}, \ldots$ qui limitaient Δ, polygone dont tous les angles sont droits. $\mathfrak{D}_{-1}$ est le polygone décrit par les deux antécédents de Z, quand Z décrit $\mathfrak{D}$. $\mathfrak{D}_{-1}$ est formé de $\mathfrak{D}$ et de son symétrique par rapport à OY. Or à deux points symétriques par rapport à OY correspondent des antécédents deux à deux symétriques par rapport à l'hyperbole H équilatère qui est antécédente de l'axe OY (c'est la définition même de la symétrie par rapport à une courbe analytique, au sens de Schwarz). Donc lorsque Z décrira $\mathfrak{D}_{-1}$, ses deux antécédents décriront le polygone $\mathfrak{D}_{-1}$, auquel il faudra adjoindre son image par rapport à l'hyperbole H. Cette image se compose de *deux polygones curvilignes séparés*, le premier touchant $\mathfrak{D}_{-1}$ le long du côté $O_{-1}O_{-2}$ et de son symétrique par rapport à OY [1], le deuxième symétrique du premier par rapport à O. L'ensemble de $\mathfrak{D}_{-1}$ et de son image par rapport à H fait un polygone curviligne $\mathfrak{D}_{-2}$ à angles droits du même genre que $\mathfrak{D}_{-1}$.

Le même raisonnement, qui, de $\mathfrak{D}_{-1}$ formé par l'ensemble de $\mathfrak{D}$ et de son symétrique par rapport à OY, déduit $\mathfrak{D}_{-2}$ formé de l'ensemble de $\mathfrak{D}$ et de son image par rapport à l'hyperbole H, côté de $\mathfrak{D}_{-1}$ antécédent de OY, prouve que, Z décrivant $\mathfrak{D}_{-2}$, ses deux antécédents décriront un domaine $\mathfrak{D}_{-3}$ formé de $\mathfrak{D}_{-2}$ et de son image par rapport à la courbe algébrique H_{-1}, antécédente de l'hyperbole H.

L'image de $\mathfrak{D}_{-2}$ par rapport à H_{-1} est formée de quatre polygones séparés symétriques l'un de l'autre par rapport aux deux axes coordonnés et touchant respectivement $\mathfrak{D}_{-2}$ suivant quatre arcs qui se déduisent de l'arc $O_{-2}O_{-3}$ de H_{-1} qui est côté de Δ (*arc prolongé par son image relative à* H) par symétrie relative aux axes coordonnés et à l'origine. Le processus se poursuit indéfiniment, $\mathfrak{D}_{-(i+1)}$ se déduit de $\mathfrak{D}_{-i}$ en lui ajoutant l'image de $\mathfrak{D}_{-i}$ par rapport à la courbe algébrique $H_{-(i-1)}$ antécédente d'ordre i de OY; Z décrivant $\mathfrak{D}_{-i}$, ses deux antécédents décrivent $\mathfrak{D}_{-(i+1)}$.

R_0 sera évidemment la limite de $\mathfrak{D}_{-i}$ pour $i = \infty$. Il saute aux

---

[1] Première branche de l'hyperbole H.

yeux que le procédé employé pour engendrer R_0 à partir de $\mathcal{D}$ est celui qui sert à engendrer le domaine d'existence d'une fonction kleinéenne à courbe fondamentale, à partir du domaine fondamental D du groupe, en adjoignant à ce domaine D ses images successives par rapport à ses côtés.

Rien d'étonnant alors à ce que la frontière de R_0, comme la courbe limite signalée par Poincaré, soit une *courbe de Jordan* E′ simple fermée, sur laquelle les points où elle n'a pas de tangente peuvent former un ensemble partout dense. Ces points de E, partout denses sur E′, qui sont des *points coïncidant avec un de leurs antécédents* (1), jouent ici un rôle parallèle à celui des points doubles (2) des substitutions du groupe kleinéen, situés sur la courbe fondamentale du groupe. En tous ceux de ces derniers points qui sont points doubles de substitutions loxodromiques, la courbe fondamentale du groupe ne peut, on le sait bien, avoir de tangente déterminée (*voir* Schönflies, *loc. cit.*, Chap. V, § 14). C'est pour la même raison que E′ ne peut avoir de tangente déterminée en tout point ζ de E où $\arg \varphi'_n(\zeta) \neq 0$ ou π.

Je ne me suis aussi longuement étendu sur l'exemple précédent que parce qu'il est un type simple d'une catégorie d'exemples beaucoup plus généraux conduisant aux mêmes conclusions, qu'il suffira maintenant d'indiquer. Ces exemples seront choisis parallèles à ceux exposés dans les applications 3° et 4° (p. 140 à 145 du Mémoire présent) de la deuxième Partie.

97. *Deuxième exemple.* — Prenons d'abord le cas d'une fraction quelconque du deuxième degré $z_1 = \varphi(z)$ admettant deux points limites ζ_1 et ζ_2 à convergence régulière, et supposons qu'on puisse entourer respectivement ζ_1 et ζ_2 de deux courbes C et Γ telles que :

1° La conséquente de l'aire (C) contenant ζ_1 soit une aire (C) *intérieure* à (C) contenant un point critique de $\psi(z)$ fonction inverse de $\varphi(z)$;

2° La conséquente de l'aire (Γ) contenant ζ_2 soit une aire (Γ)

(1) Car ils satisfont à $Z = \varphi_n(Z)$ pour $n = 1, 2, \ldots, \infty$; ces points de E, coïncidant avec leur conséquent d'ordre n, coïncident avec un de leurs antécédents d'ordre n.

(2) Ces points doubles sont, en effet, des points qui coïncident avec un de leurs homologues dans le groupe.

intérieure à (Γ) et contenant un point critique de $\psi(z)$ [cela veut dire que (C) et (Γ) contiennent chacune une racine de $\varphi'(z) = 0$];

3° Dans l'aire doublement connexe comprise entre C et Γ, on ait

$$|\varphi'(z)| > M > 1.$$

Alors il est évident que, entre C et L, on aura

$$|\psi'(z)| < N = \frac{1}{M} < 1.$$

L'aire (C) est intérieure à R_1, domaine de convergence vers ζ_1;

L'aire (Γ) est intérieure à R_2, domaine de convergence vers ζ_2.

Les antécédentes (C_{-i}) successives de l'aire (C) convergent uniformément vers l'aire R_1, car les courbes C_{-i} antécédentes successives de C convergent uniformément vers leur limite à cause de l'inégalité $|\psi'(z)| < N$ valable entre C et Γ, région sillonnée par les C_{-i}. Les antécédentes Γ_{-i} de Γ convergeront aussi uniformément vers leur limite qui sera identique à celle des C_{-i} et sera une *courbe de Jordan* fermée simple E' séparant R_1 de R_2.

Il est même possible d'étendre à ce cas la génération indiquée pour R_0 dans le premier exemple en remplaçant l'axe réel de l'exemple précédent par une coupure convenable du plan unissant les points critiques de $\psi(z)$.

On peut, au lieu de la troisième condition, *réclamer seulement que : 4° entre* C *et* Γ *on ait* $|\varphi'_n(z)| > M > 1$ *pour une certaine valeur de n*, on verra alors que les C_{-n}, C_{-2n}, ..., C_{-pn}, ... convergent uniformément vers leur limite, et cela suffit, pour que cette limite soit *courbe de Jordan* fermée simple.

Quant aux courbes C et Γ dont il est question dans les première et deuxième conditions précédentes on les choisira le plus commodément possible; ce seront généralement des antécédentes d'ordre assez élevé de petits cercles entourant ζ_1 et ζ_2.

98. *Troisième exemple.* — *a.* Mais il est clair qu'à toute fraction d'ordre 2 satisfaisant aux conditions de l'exemple précédent, on pourra substituer, *toutes les conclusions restant valables* [1], une frac-

[1] Sauf évidemment la génération des domaines de convergence par symétries successives.

tion d'un degré quelconque n'ayant que deux points où $\varphi'(z) = 0$ [1] (c'est-à-dire dont la fonction inverse n'aura que deux points critiques) et ayant deux points limites ζ_1, ζ_2 à convergence régulière remplissant les première et deuxième conditions de l'exemple précédent, et, soit la troisième, soit la quatrième condition de ce même deuxième exemple. On aura encore, pour séparer les domaines de convergence R_1 et R_2 vers ζ_1 et ζ_2, une *courbe de Jordan* simple fermée E′.

b. Parallèlement à l'application 4°, *b* (p. 142), on peut laisser de côté la restriction imposée à $\varphi'(z)$ de ne s'annuler qu'en deux points distincts.

Soit une fonction rationnelle $z_1 = \varphi(z)$ de degré K ayant deux points limites, ζ_1 et ζ_2 à convergence régulière

$$|\zeta_1 = \varphi(\zeta_1), \ |\varphi'(\zeta_1)| < 1; \ \zeta_2 = \varphi(\zeta_2), \ |\varphi'(\zeta_2)| < 1|$$

jouissant des propriétés suivantes analogues aux propriétés 1° et 2° des 3° et 4° exemples précédents.

1° On peut trouver une courbe fermée simple C entourant ζ_1

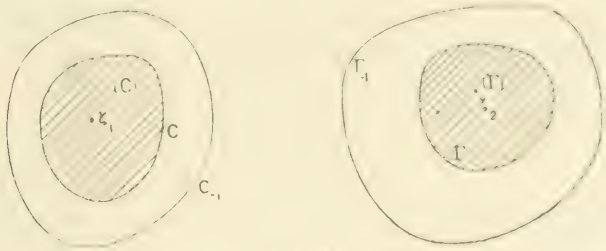


FIG. [illegible].

(séparant ζ_1 de ζ_2) délimitant une aire (C) contenant ζ_1, telle que l'*ensemble des* K *antécédents* d'un point z intérieur à (C) décrive une aire (C_{-1}) contenant (C) à son intérieur, la courbe C_{-1} étant une courbe simple fermée qui est alors décrite une fois par chaque antécédent de z quand z décrit K fois la courbe C.

2° On peut trouver une courbe fermée simple Γ entourant ζ_2, séparant ζ_2 de ζ_1 et de la courbe C, Γ étant extérieure à C et telle que

---

(1) Par exemple une fraction du type $z_1 = \frac{z^2 + h}{z(z^2 + 2)}$ *pour* application [illegible] p. 142).

l'aire (Γ), limitée par Γ et contenant ζ_2, ait pour ensemble de ses K antécédents une aire simplement connexe (Γ_{-1}) contenant l'aire (Γ) limitée par une courbe simple fermée Γ_{-1} qui est décrite une fois par chaque antécédent de z quand z décrit K fois la courbe Γ (*voir* le schéma ci-dessus).

3° On suppose en outre que dans l'aire doublement connexe limitée par C et L (ou dans l'aire limitée par deux antécédentes quelconques C_{-i} et Γ_{-j} de C et Γ), on ait constamment $|\varphi'_n(z)| > M > 1$ pour une certaine valeur de l'indice n (le plus souvent, ce sera $|\varphi'(z)| > M > 1$ qu'on reconnaîtra).

Alors, d'après ce qu'on a dit dans l'application 4°, *b* (p. 142, 143, 144), le plan se divise en deux régions R_1 et R_2, chacune domaine de convergence du point ζ_1 ou ζ_2 qu'elle contient, séparées par un continu linéaire E' qui est la limite des antécédentes successives de C et de Γ.

Mais *il suffit que l'on ait dans l'aire doublement connexe, limitée par deux antécédentes quelconques* C_{-i} *et* Γ_{-j} *de* C *et* Γ, *la relation*

$$|\varphi'_n(z)| > M > 1,$$

pour un certain indice n, pour pouvoir affirmer que les antécédentes de C et Γ convergent uniformément vers une *courbe de Jordan simple fermée* qui coïncide avec E'.

Dans la pratique on reconnaîtra facilement les cas où l'on a

$$|\varphi'(z)| > M > 1$$

dans l'anneau limité par C *et* Γ, ils rentrent dans le cas général précédent.

99. *Quatrième exemple.* — En particulier, revenons aux exemples signalés par M. Fatou dans sa Note du 21 mai 1917 aux *Comptes rendus*, et repris dans le Mémoire actuel (application 4°, *b*, de la deuxième Partie, p. 144 et suiv.). Prenons une fonction à cercle fondamental $\mathcal{C}$, pour laquelle existent deux points limites ζ_1 et ζ_2 à convergence régulière, symétriques par rapport au cercle fondamental $\mathcal{C}$. Dans le cas où ce cercle fondamental est à distance finie (c'est-à-dire non dégénéré en une droite, ζ_1 et ζ_2 étant le centre du cercle et le point à l'infini, cas auquel on se ramène aisément par homographie, on a vu précédemment que l'on avait $|\varphi'(z)| > 1$ sur tout le cercle.

La fonction $\psi(z)$ inverse de $\varphi(z)$ admet en général $K-1$ points critiques simples *à l'intérieur* de $\mathcal{C}$, ses $K-1$ autres points critiques simples étant les symétriques des premiers par rapport à $\mathcal{C}$.

On a vu que, z étant un point quelconque intérieur au cercle $\mathcal{C}$, on avait

$$|\varphi(z)| < |z|,$$

en vertu du lemme de Schwarz et, si z est extérieur au cercle $\mathcal{C}$,

$$|\varphi(z)| > |z|.$$

On sait que

$$\varphi(0) = 0, \qquad \varphi(\infty) = \infty, \qquad |\varphi'(0)| < 1.$$

Considérons donc un cercle C de centre ζ_1 intérieur à $\mathcal{C}$, ainsi que son symétrique Γ par rapport à $\mathcal{C}$, C étant choisi *assez voisin de* $\mathcal{C}$ pour que : 1° les points critiques de $\psi(z)$ soient intérieurs à C ou extérieurs à Γ; 2° entre C et Γ on ait

$$|\varphi'(z)| > M > 1.$$

Ceci est possible puisque, sur $\mathcal{C}$, on a $|\varphi'(z)| > 1$ et jamais $|\varphi'(z)| = 1$. Alors, évidemment, si z décrit C, ses K antécédents décrivent une courbe simple fermée C_{-i} entourant C, tracée dans l'anneau $(C, \mathcal{C})$ entre C et $\mathcal{C}$. Les antécédentes successives de C, C_{-1}, C_{-2}, ... s'entourent mutuellement, C_{-i} étant dans l'anneau $(C_{-(i-1)}, \mathcal{C})$ entourant $C_{-(i-1)}$, ...

Les antécédentes successives de Γ, Γ_{-1}, Γ_2, ... contiennent chacune la suivante. Γ_{-i} est dans l'anneau $(\Gamma_{-(i-1)}, \mathcal{C})$, et entoure $\mathcal{C}$.

Toutes les conditions 1°, 2°, 3° précédentes sont remplies. Les C_{-i} et les Γ_{-j} convergent uniformément vers le cercle $\mathcal{C}$.

100. Mais si l'on fait varier les coefficients de $\varphi(z)$ dans des limites assez étroites, on verra que la nouvelle fonction rationnelle $\Phi(z)$ sera telle que :

1° Elle aura deux points limites à convergence régulière voisins de 0 et ∞, car aux racines 0 et ∞ de $z = \varphi(z)$ correspondent des racines voisines pour $z = \Phi(z)$, avec variation *petite* du module de la dérivée en ces points. J'appellerai Z_1 et Z_2 ces deux points limites.

2° $\Psi(z)$, fonction inverse de $\Phi(z)$, aura encore $K-1$ points critiques intérieurs à C et $K-1$ points critiques extérieurs à Γ; cela

est évident puisque les points critiques de $\Psi'(z)$ sont voisins de ceux de $\psi(z)$.

3° L'ensemble des K antécédents $\Psi'(z)$ de z, lorsque z décrira C, décrira une courbe fermée C'_{-1} entourant C et très voisine de C_{-1} trouvée précédemment. C'_{-1} entourera donc C et sera tracée dans l'anneau (C, Γ).

De même l'ensemble des K antécédents de z, lorsque z décrira Γ, décrira une courbe fermée Γ'_{-1} située dans l'anneau (C, Γ) et entourant C'_{-1}.

4° Enfin, entre C et Γ, on aura $|\Phi'(z)| > M_1 > 1$ comme on avait $|\varphi'(z)| > M > 1$.

Ces quatre conditions sont satisfaites *si les variations des coefficients de $\varphi(z)$ qui font passer de $\varphi(z)$ à $\Phi(z)$ sont assez petites.*

L'ensemble des quatre conditions précédentes prouve que le plan est alors divisé en deux régions simplement connexes R_1 et R_2, domaines respectifs de Z_1 et Z_2, régions séparées par une *courbe de Jordan* simple fermée E′ qui est la limite commune des antécédentes successives des cercles C et Γ, par la transformation $z_1 = \Phi(z)$. E′ est évidemment tracée dans l'anneau (C, Γ). Cet anneau lui-même est très voisin du cercle fondamental.

Il est donc visible que, pour des variations très petites (en valeur absolue) des coefficients d'une fraction $\varphi(z)$ à cercle fondamental $\mathfrak{C}$, du type signalé plus haut (variations par ailleurs arbitraires), les relations auxquelles les nouveaux coefficients seront astreints étant uniquement des *inégalités*, ce qui fournit de nouvelles fractions $\Phi(z)$ *beaucoup plus générales* que les fractions à cercle fondamental), on obtient des fractions $\Phi(z)$ relativement auxquelles le plan se divise en deux régions séparées par une *courbe de Jordan* simple fermée E′, voisine du cercle $\mathfrak{C}$. En résumé, la courbe séparatrice des domaines de convergence vers ζ_1 et ζ_2, quand on fait varier infiniment peu les coefficients de $\varphi(z)$, *varie continûment* avec ces coefficients. C'est là un fait qui est loin d'être évident *a priori*.

101. En considérant une des fonctions $\Phi(z)$ qui dérivent d'une $\varphi(z)$ à cercle fondamental par variations assez petites des coefficients, et envisageant la *courbe de Jordan* E′ qui sépare les domaines de ζ_1 et de ζ_2, on sait que sur E′ sont partout denses les racines de équations

$$z = \Phi_p(z)$$

pour lesquelles

$$|\Phi_n(z)| > 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty).$$

Envisageons une de ces racines, c'est un point P de l'ensemble appelé E, et il est évident qu'*en général, en* P, $\Phi_n(z)$ *ne sera pas réel*. Voici comment on peut préciser ceci.

Si l'on considère conjointement avec $\Phi(z)$ la fraction à cercle fondamental $z_1 = \varphi(z)$ de laquelle dérive $\Phi(z)$, $\Phi(z)$ aura des coefficients arbitraires qui seront des paramètres assujettis seulement à certaines inégalités, par rapport à ceux de $\varphi(z)$: par exemple, chaque coefficient de $\Phi(z)$ sera assujetti à avoir son affixe intérieur à un petit cercle dont le centre sera l'affixe de la *valeur du coefficient considéré dans* $\varphi(z)$. Les valeurs de $\Phi'_n(z)$ aux points racines de $z = \Phi_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ sont des fonctions des paramètres précédents, et écrire qu'un $\Phi'_n(z)$ est réel, c'est écrire *une relation d'égalité entre ces paramètres*. Pour préciser encore, la valeur de $\Phi'_n(z)$ en un point racine de $z = \Phi_n(z)$ est fonction algébrique des paramètres-coefficients de $\Phi(z)$, et écrire que $\Phi_n(z)$ est réel, c'est écrire une relation algébrique (non identique) entre ces paramètres. Si l'on écrit toutes ces relations pour $n = 1, 2, \ldots, \infty$, on a une infinité de relations algébriques $(\mathcal{R})$ entre les paramètres. Comme ces paramètres, ainsi qu'on l'a vu, peuvent varier chacun dans un petit cercle de leur plan, *il est toujours possible de les choisir de façon qu'aucune des relations précédentes* $(\mathcal{R})$ *ne soit satisfaite*. Pour cela, on choisira par exemple tous les paramètres sauf un arbitrairement, puis on choisira le dernier paramètre *distinct des racines de toutes les équations algébriques par rapport à ce paramètre* auxquelles se réduisent dans ces conditions les relations algébriques entre paramètres $(\mathcal{R})$, car ces racines-là ne forment qu'un *ensemble dénombrable*, alors que l'ensemble des valeurs permises au dernier paramètre a la puissance du continu.

Une fraction $\Phi(z)$ ainsi choisie sera évidemment ce qu'on peut appeler une fraction *générale*, c'est-à-dire une fraction *dont les coefficients ne satisfont à aucune relation particulière*.

On peut imposer à $\Phi(z)$ pour être dite *générale*, d'être telle qu'*aucune des valeurs de* $\Phi'_n(z)$ *en un point racine* $z = \Phi_n(z)$ pour $n = 1, 2, \ldots, \infty$, *n'ait un argument commensurable à* 2π, ce revenant à dire encore que les paramètres ne doivent satisfaire à aucune des relations d'égalité d'un groupe $(\mathcal{S})$ de relations en *infinité dénombrable*,

Quoi qu'il en soit, pour une fraction $\Phi(z)$ générale, en répétant un raisonnement antérieurement fait, on verra qu'*en aucun point* P *de* E, *la courbe* E′ *ne peut avoir de tangente déterminée*, et les points de E sont partout denses sur E′. (Il va sans dire que ce que nous disons là s'applique en particulier aux fractions générales des 2e, 3e et 4e exemples, car dans toutes ces fractions, les paramètres coefficients ne sont assujettis qu'à des relations d'*inégalité* et peuvent demeurer arbitraires chacun dans une petite aire du plan où on le représente par un affixe.)

Dans tous ces exemples, pour lesquels, dans les applications 1°, 2°, 3°, 4° de la deuxième Partie, on a fait remarquer qu'ils étaient les plus simples possibles, on trouve déjà des courbes séparatrices pour les domaines qui sont loin d'avoir la simplicité des courbes analytiques. C'est pourtant déjà un grand point que de pouvoir dire qu'elles sont des *courbes de Jordan simples fermées*.

102. *Cinquième exemple.* — Voici maintenant un exemple plus compliqué, où certains domaines ont pour frontières des courbes de Jordan simples fermées, et d'autres des courbes continues fermées, mais qui ne sont pas *simples*, car elles ont des points doubles denses partout sur elles-mêmes. Je veux parler de la fraction

$$z_1 = \frac{z - i\,z}{\;}\qquad |z| = 1$$

traitée à la fin de la deuxième Partie (p. 158 et suiv.).

Envisageons le domaine R_1 entourant le point limite $z = 1$: c'est la limite des aires (Γ_{-1}), (Γ_{-2}), ..., (Γ_{-i}), ... antécédentes de l'aire $\Gamma\left(|z - 1| = \frac{1}{3}\right)$ qui entourent cette aire. On a déjà fait remarquer que, en dehors des cercles Γ, Γ' qui servent à définir R_1 et R_0 (j'emploie les notations de la deuxième Partie), on avait

$$\frac{dz_1}{dz} = \frac{9}{8}\,;$$

c'est dans cette région extérieure à Γ et Γ' que sont tracées les courbes Γ_{-i}. Dans cette région on a

$$\left|\frac{dz}{dz_1}\right| = \left|\frac{8}{9}\right| = \frac{8}{9}.$$

On peut donc conclure, comme on l'a fait pour R_0 dans l'exemple

$z_1 = \frac{z + z''}{2}$, que les courbes Γ_{-i}, antécédentes de Γ qui entourent Γ, tendent uniformément vers une courbe limite $\mathcal{C}$ qui est une courbe continue représentable par les équations

$$(\mathcal{C}) \qquad x = f(t), \qquad y = g(t) \qquad \text{pour } 0 \leq t \leq 1,$$

f et g étant deux fonctions continues de t. Tout point de la frontière de R_1 est un point de $\mathcal{C}$, et l'on voit qu'il est *accessible par l'intérieur de* R_1. | Tout ceci se fait à l'aide des trajectoires orthogonales de l'anneau (Γ, Γ_{-1}) qu'on prolonge dans tout R_1, ainsi qu'on l'a vu pour $z_1 = \frac{z + z^2}{2}$. |

D'autre part, j'ai montré [*voir* p. 166, note (1)] que tout point de la frontière de R_1 est simple pour cette frontière. On en conclut donc que cette frontière $\mathcal{C}$ est une *courbe de Jordan* simple fermée. La même conclusion s'impose pour la frontière $\mathcal{C}'$ de R'_1, qui est symétrique de $\mathcal{C}$ relativement à l'origine, et aussi pour les frontières de toutes les aires R_1^- et $R_1'^-$ de R_1 et R'_1 qui constituent les domaines totaux de convergence vers $(+1)$ ou (-1).

La frontière E' du domaine R_∞ du point à l'infini, est une *courbe continue*

$$x = f(t), \qquad y = g(t) \qquad (0 \leq t \leq 1),$$

car on peut la définir, à partir du cercle C, $|z| = 3$, comme limite des C_{-i} antécédentes de C qui convergent *uniformément vers leur limite*, à cause de l'inégalité

$$|z_1 - z| \leq \frac{5}{9},$$

vérifiée hors de Γ et Γ', c'est-à-dire dans toute la région où sont tracées les C_{-i} (1). Mais, sur cette frontière, on a vu que l'origine était *point multiple*, ainsi que les antécédents de cette origine, qui sont partout denses sur E'. E' *est donc continue et fermée, mais n'est point* « DE JORDAN, SIMPLE ». E' est formée de la réunion des courbes de Jordan $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, de toutes leurs antécédentes, et de tous les points qui sont des points limites pour l'ensemble de ces antécédentes (points au voisinage desquels se pressent une infinité de ces antécédentes).

(1) On verrait, comme dans les précédents exemples, que tout point de E' est accessible par l'intérieur du domaine R_∞ du point à l'infini.

QUATRIÈME PARTIE.

L'étude des convergences singulières.

103. Je me suis attaché surtout dans les deuxième et troisième Parties à l'étude de la convergence vers un point limite à convergence régulière $\{\zeta = \varphi(\zeta), |\varphi'(\zeta)| < 1\}$, ou vers un groupe circulaire limite $\{\zeta = \varphi_n(\zeta), |\varphi_n(\zeta)| < 1\}$.

Déjà, dans ce champ de recherches, les résultats ont été nouveaux et variés. La considération de l'ensemble parfait E′ a dominé cette étude et a jeté sur elle un jour précieux. Je vais maintenant m'occuper des cas singuliers : points racines de

$$\zeta = \varphi(\zeta) \quad \text{ou} \quad |\varphi'(\zeta)| = 1$$

ou de

$$\zeta = \varphi_n(\zeta) \quad \text{avec} \quad |\varphi_n'(\zeta)| = 1.$$

L'étude est moins aisée que celle des points limites réguliers. Les résultats que j'ai obtenus ne sont pas tout à fait généraux, mais, ainsi qu'on le verra, ils permettent déjà de se faire une idée convenable de la question qui est difficile. Pour l'historique, je remarquerai que M. Leau a, dans sa thèse, étudié les environs d'un point $\zeta = \varphi(\zeta)$ où $|\varphi'(\zeta)| = 1$. Mais on peut dire plus que ce qu'il a dit, à condition de se servir de l'ensemble E′.

M. Fatou, dans sa Note du 21 mai 1917, étudie les cas singuliers relatifs aux fractions à cercle fondamental; ce sont toujours des cas $\zeta = \varphi(\zeta)$ avec $\varphi'(\zeta) = 1$ et ils sont très simples. Je donnerai des compléments à tous ces résultats connus et l'on verra clairement la raison de leur simplicité. Je donnerai des exemples moins aisés à traiter et d'une portée plus générale que ceux jusqu'ici étudiés. Enfin j'esquisserai pour le cas général des points $\zeta = \varphi(\zeta)$, $\varphi'(\zeta) = e^{i\theta}$, θ étant réel et quelconque, un mode de raisonnement qui réduit les hypothèses possibles à deux, telles que la réalisation de l'une, si elle est reconnue dans un exemple donné, exclut la possibilité de l'autre pour ce même exemple. Je n'ai pas réussi jusqu'ici, quand θ est incommensurable à 2π, à décider [1] si l'on peut

[1] J'ai réussi, postérieurement au dépôt de ce Mémoire, à exclure l'une des deux possibilités; cela fera l'objet d'un Mémoire ultérieur.

construire des exemples de fractions $\varphi(z)$ pour chacune des deux possibilités précédentes. Pour θ commensurable à 2π, et $\varphi(z)$ rationnel, *c'est toujours l'une des deux hypothèses*, toujours la même, qui est vérifiée et jamais l'autre.

104. *Étude des points* $\zeta = \varphi(\zeta)$ *avec* $\varphi'(\zeta) = e^{i\theta}$ *et* $\zeta = \varphi_p(\zeta)$ *avec* $\varphi_p'(\zeta) = e^{i\theta}$, *lorsque* θ *est commensurable à* 2π. — Je vais montrer qu'*un tel point appartient toujours à* E'.

Il suffit de considérer un point $\zeta = \varphi(\zeta)$ avec $\varphi'(\zeta) = 1$, car : 1° si l'on avait $\zeta = \varphi(\zeta)$ avec $\varphi'(\zeta) = e^{\frac{m}{n}i\pi}$, la substitution $z_1 = \varphi(z)$ admettrait le point double $\zeta = \varphi_q(\zeta)$ avec $\varphi_q'(\zeta) = 1$ et cette substitution $z_q = \varphi_q(z)$ ayant même E' que $z_1 = \varphi(z)$ le théorème sera démontré; 2° si l'on a $\zeta = \varphi_p(\zeta)$ avec $\varphi_p'(\zeta) = e^{\frac{m}{n}i\pi}$, la substitution $z_p = \varphi_p(z)$ aura le point double $\zeta = \varphi_q(\zeta)$ avec $\varphi_q'(\zeta) = e^{\frac{m}{n}i\pi}$ et l'on retombe sur le 1°. Dans tout ce qui va suivre, je me bornerai donc aux $\zeta = \varphi(\zeta)$, $\varphi'(\zeta) = 1$, les extensions à 1° et 2° étant très faciles.

On peut supposer que ζ est à l'origine : $\zeta = 0$; alors soit

$$\varphi(z) = z + a_n z^n + \ldots \qquad (n > 1)$$

le développement de Taylor de φ. On aura

$$\varphi_p(z) = z + p a_n z^n + \ldots \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

Les fonctions $\varphi_p(z)$ sont nulles à l'origine. Si l'origine n'était pas point de E', la suite des φ_p serait normale dans une petite aire D entourant O, et comme les φ_p sont bornées en O elles le seraient dans tout D. On pourrait en extraire une suite infinie $\varphi_{p_0}, \varphi_{p_1}, \ldots$ qui, dans D, convergerait *uniformément* vers une fonction limite $f(z)$ analytique dans D, pour laquelle $f(0) = 0$, $f'(z) = 1$. Ceci est impossible puisque le deuxième coefficient du développement de Taylor de φ_{p_0} qui est $p_0 a_n$ devient infini avec p_0. Donc O est un point de E', les φ_p n'y sont pas normales.

105. M. Leau (Thèse, 1897) a montré qu'un point $\zeta = \varphi(\zeta)$ où $\varphi'(\zeta) = 1$ pouvait être entouré d'un petit cycle contenant des points dont les *conséquents* tendaient vers ζ et des points dont les *antécédents* successifs, définis par la branche de l'inverse de φ qui

égale ζ en ζ, tendaient aussi vers ζ''. Je vais le montrer autrement à l'aide de la proposition établie dans les Préliminaires (§ 5) qui généralise le lemme de Schwarz.

Débutons par le cas le plus simple, où $\varphi(z)$ se développe autour de $\zeta = 0$ par

$$z_1 = \varphi(z) = z + a_2 z^2 + \ldots \qquad (a_2 \neq 0).$$

Considérons le cercle γ de centre α *passant par l'origine*, son équation sera

$$zz' - \alpha' z - \alpha z' = 0 \qquad (z \text{ et } z' \text{ étant conjugués});$$

d'où

$$z_1 z_1' - \alpha' z_1 - \alpha z_1' = [zz' - \alpha' z - \alpha z'] + a_2 z^2 (z' - \alpha') + a_2' z'^2 (z - \alpha) + \ldots,$$

les termes non écrits étant d'ordre $\geqq 4$ si l'on suppose α infini-

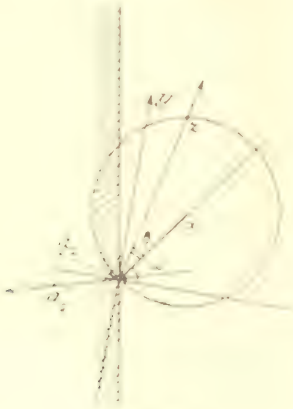


Fig. [illegible]

ment petit du premier ordre et le point z choisi intérieur à γ ou sur γ.

Si le point z est pris sur γ on aura, en posant $\alpha = re^{i\theta}$,

$$z - \alpha = re^{i(\theta+\varphi)}, \qquad z = r\cos\theta\, e^{i(\theta+\varphi)}, \qquad z' - \alpha' = re^{-i(\theta+\varphi)},$$

et par suite

$$z_1 z_1' - \alpha' z_1 - \alpha z_1' = 4r^2\cos^2\theta\,(a_2 e^{i\theta} + a_2' e^{-i\theta}) + \ldots,$$

les termes suivants étant d'ordre $\geqq 4$ en r.

La partie principale de $z_1 z_1' - \alpha' z_1 - \alpha z_1'$, dont le signe fixe la position de z_1 par rapport au cercle γ quand r est choisi assez petit, étant

$$4r^2\cos^2\theta\,(a_2 e^{i\theta} + a_2' e^{-i\theta}) = 4r^2\cos^2\theta \times 4\,(\text{partie réelle de } a_2 e^{i\theta}),$$

a un signe constant si θ varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, z décrivant γ à condition que $\mathfrak{R}(a_2 e^{i\omega}) \neq 0$. C'est le signe $-$ si l'on a choisi α tel que

$$\frac{\pi}{2} < \arg \alpha + \arg a_2 < \frac{3\pi}{2},$$

car alors

$$\frac{\pi}{2} < \arg(a_2 e^{i\omega}) < \frac{3\pi}{2} \quad \text{et} \quad \mathfrak{R}(a_2 e^{i\omega}) < 0.$$

Supposons l'argument ω de α ainsi choisi tel que $\mathfrak{R}(a_2 e^{i\omega}) < 0$; pour cette valeur de ω on pourra choisir r assez petit ($r < r_0$) pour que, z décrivant le cercle γ de centre α, de rayon r ($\alpha = re^{i\omega}$), le signe de $z_1 z'_1 - \alpha' z_1 - \alpha z'_1$ soit constamment le signe $-$. Alors le point z_1 sera intérieur au cercle γ et ne viendra sur γ que lorsque z viendra en O. D'après notre lemme, tout point intérieur au cercle γ aura O pour seul point limite de ses conséquents.

Faisant varier ω entre ses limites extrêmes depuis $\frac{\pi}{2} - \arg a_2$ jusqu'à $\frac{3\pi}{2} - \arg a_2$ et pour chaque valeur de ω déterminant r positif de façon que $z_1 z'_1 - \alpha' z_1 - \alpha z'_1$ ($\alpha = re^{i\omega}$) soit constamment négatif lorsque z décrit le cercle γ, on aura tout un domaine Δ dont la forme rappelle celle de la cardioïde avec un angle rentrant nul en O dont la tangente (vers l'extérieur de Δ) serait la direction ($-\arg a_2$), c'est-à-dire la direction qui va de O à a'_2 conjugué de a tel qu'un point intérieur admettra O pour seul point limite de ses conséquents.

Si l'on passe à la branche de fonction inverse nulle à l'origine, on aura

$$z = \psi(z_1) = z_1 - a_2 z_1^2 - \ldots$$

et les mêmes considérations donneront un domaine Δ' sensiblement symétrique de Δ par rapport à O, dont tout point a des antécédents successifs définis par $\psi(z)$ qui tendent vers O et vers O seulement. Δ et Δ' ont une partie commune à cause de leur forme en cardioïde.

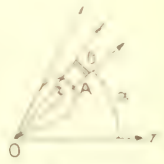
Dans toute région *intérieure à* Δ, les $\psi_p(z)$ tendent donc vers zéro uniformément et forment une suite normale. Δ est donc intérieur à une région R du plan z, d'un seul tenant, limitée par l'ensemble E' telle que tout point intérieur à R admette O pour seul point limite de ses conséquents. R sera le domaine de convergence immédiat du point O. Nous verrons que R peut ne pas être le domaine total

de O. Il est clair que si l'on part d'un petit cercle c entourant O et intérieur à l'ensemble de Δ et de Δ' et si l'on prend les antécédentes successives de l'aire (c) par la branche de $\psi(z)$ qui est nulle à l'origine, la portion de (c) qui est intérieure à Δ' aura *des antécédentes qui tendront vers* O *et celle qui est intérieure à* Δ *aura des antécédentes qui tendront vers le domaine* R. R est donc la limite des aires (C_{-i}) antécédentes successives de l'aire (c) définies par la branche de $\psi(z)$ nulle en O [1].

106. Tout ce qui précède suppose évidemment $a_2 \neq 0$ et tombe si $a_2 = 0$, mais on peut présenter des considérations plus générales, inspirées du cas précédent, et plus faciles à suivre quand on a bien compris le cas $a_2 \neq 0$. Soit, généralement, le développement autour de O.

$$z = \ldots + a_p z^p + \ldots \qquad (a_p \neq 0, \; p \geq 2)$$

Cherchons à remplacer le cercle γ précédent par une courbe ana-



logue Γ passant par l'origine : nous prendrons une boucle de la rosace $r = a^n \cos n\theta$ dont l'axe OA fait l'angle α avec OX, et nous chercherons à déterminer n, α, a (assez petit) de façon que, $z = re^{i\theta}$ décrivant cette boucle Γ, z_1 reste intérieur à la boucle et ne vienne sur la boucle que lorsque z viendra en O, amenant aussi z_1 en O.

La boucle Γ sera définie par

$$z = \ldots a^n \ldots e^{n\theta i} + \ldots$$

$$= \ldots \frac{a^n}{2} \ldots e^{n\theta i} \ldots$$

$$= \ldots \frac{a^n}{2} \ldots e^{-n\theta i} \ldots$$

θ variant de $-\frac{\pi}{2n}$ à $+\frac{\pi}{2n}$.

[1] Si une (C_{-i}) vient à contenir un point critique de la branche considérée, cela ne gênera pas, ainsi qu'on l'a déjà vu. Je montrerai que ce fait se produit toujours ici : le domaine R contient toujours un point critique de $\psi(z)$.

Donc

$$(\Gamma) \qquad z^n z_1 - \frac{a^n e^{-n i\alpha}}{2} z_1 - \frac{a^n e^{n i\alpha}}{2} z = 0.$$

Considérons, a étant positif infiniment petit du premier ordre, la quantité

$$\delta = z_1^n z_1^{-n} - \frac{a^n e^{-n i\alpha}}{2} z_1 - \frac{a^n e^{n i\alpha}}{2} z_1^{-n};$$

on aura, en développant δ et se rappelant que z est sur Γ,

$$\delta = n z^{n-p-1} a_p \left[z^{n} - \frac{a^n}{2} e^{-n i\alpha} \right] + n z^{n-p-1} a_p' \left[z^{n} - \frac{a^n}{2} e^{n i\alpha} \right] + \ldots$$

les termes non écrits étant d'ordre supérieur à $2n + p - 1$ par rapport à a pris comme infiniment petit principal. Le signe de δ, si a est choisi assez petit, est donc, quel que soit z sur Γ, le signe de

$$\delta_1 = n z^{n-p-1} a_p \left[z^{n} - \frac{a^n}{2} e^{-n i\alpha} \right] + n z^{n-p-1} a_p' \left[z^{n} - \frac{a^n}{2} e^{n i\alpha} \right]$$

qui se réduit, *en prenant* $n = p - 1$, à

$$\delta_1 = n \mathcal{R} \left[a_p \frac{a^n}{2} r^{n} e^{n i\alpha} \right] + n \frac{a^n}{2} r^{n} \mathcal{R} \left[a_p e^{n i\alpha} \right].$$

Si donc on prend α tel que

$$\frac{\pi}{2} < n\alpha + \arg a_p < \frac{3\pi}{2} \pmod{2\pi},$$

on voit que l'on pourra ensuite déterminer a assez petit pour que, z *décrivant la boucle* Γ d'axe OA (OA faisant avec OX l'angle α), d'équation $r^n = a^n \cos n\theta$ par rapport à OA, le *signe de* δ *soit constamment celui de* $\mathcal{R}(a_p e^{n i\alpha})$ *qui est négatif*. Alors, δ étant constamment négatif, z_1 sera *intérieur à la boucle considérée* Γ et ne viendra en O que si z vient en O (z_1 sera évidemment intérieur à la boucle considérée, et non à une autre boucle de la même rosace, parce que z_1 diffère de z par un infiniment petit d'ordre $p^2 + 2$). Un raisonnement tout pareil à celui qu'on a fait pour $p = 0$ et une extension immédiate du lemme qui nous a servi, au cas où Γ

remplace le cercle γ [1], prouve alors que tout point z intérieur à Γ admet O pour seul point limite de ses conséquents.

Les inégalités

$$\frac{\pi}{2} < n\alpha + \arg a_p < \frac{3\pi}{2} \pmod{2\pi},$$
$$n = p - 1$$

prouvent que la direction déterminée par l'angle α peut être prise arbitrairement dans $p - 1 = n$ angles égaux chacun à $\frac{\pi}{n}$ (angles hachurés), régulièrement disposés autour de O. A chaque α ainsi

Fig. [illegible].

déterminé correspond un a assez petit, jouissant de la propriété précédente (on pourra prendre le plus grand nombre a jouissant de la propriété). Puis, α prenant ainsi toutes les valeurs admissibles, Γ balaiera un domaine Δ qui aura $n = p - 1$ pointes rentrantes

---

(1) Cette extension peut se faire en représentant Γ conformément sur un cercle γ par la transformation $Z = z^n$; alors Z_1 devient une fonction de Z régulière dans le cercle γ jouissant des propriétés prévues par notre lemme. En O, il est vrai [illegible], Z_1 n'est pas analytique en Z, elle est algébroïde en Z autour de O, mais Z tendant vers O par l'intérieur de Γ, on voit que Z_1 tend vers zéro, $\frac{dZ_1}{dZ}$ tend vers 1, $\frac{d^2Z_1}{dZ^2}$ tend vers une limite bien déterminée finie, en sorte que le lemme continue de s'appliquer.

(2) On a aux environs de O, dans Γ, $Z_1 = Z - [illegible]$ tendant vers zéro avec Z, mais n'étant qu'algébroïde en Z.

en O dont les tangentes sont les bissectrices des angles qui séparent les angles balayés par OA. Tout point intérieur à Δ aura O pour seul point limite de ses conséquents.

Si l'on considère la branche $\psi(z)$ inverse de φ qui est nulle en O, on aura, tout comme pour $a_2 \neq 0$,

$$z = \psi(z_1) = z_1 - a_p z_1^p + \ldots,$$

et l'on tombe sur un domaine Δ', analogue à Δ, ayant cette fois pour pointes les bissectrices des angles hachurés (Δ' sera sensiblement symétrique de Δ par rapport à une quelconque de droites qui déterminent les angles limites de α dans les inégalités précédentes). Δ et Δ' auront des parties communes ($2n$ en général opposées par O) à cheval sur les $2n$ demi-droites limites des angles hachurés. Tout point intérieur à Δ' aura des antécédents successifs définis par $\psi(z)$ qui tendront vers O.

Si donc on envisage un petit cercle c entourant l'origine et assez petit pour être intérieur dans toutes ses parties soit à Δ, soit à Δ', et si l'on prend les antécédentes successives de l'aire (c) contenant O, *à l'aide de la branche* $\psi(z)$ *nulle en* O, on verra, comme précédemment, que ces antécédentes (c_{-i}) tendent pour $i = \infty$ vers une aire (R) limitée par l'ensemble E', qui aboutit en O, point frontière de cette aire par $p - 1$ pointes dont les tangentes sont les tangentes aux points de Δ; cette aire (R) pourra être formée de plusieurs régions distinctes aboutissant en O et sans connexion entre elles. (R) *sera le domaine immédiat de convergence vers* O.

A vrai dire, les parties de (c) qui sont intérieures à Δ' tendront vers zéro et ce ne sont que celles qui sont intérieures à Δ qui tendront vers R. Dans toute aire intérieure à R, la suite des φ_i est normale et tend uniformément vers zéro. R contient Δ. Nous verrons que R peut ne pas être le domaine total de convergence vers O.

107. Si, en particulier, $p = 3$, on peut avoir un résultat plus simple. Prenons

$$z_1 = z - a_2 z^2 + \ldots,$$
$$z_1' = z' - a_2 z'^2 + \ldots$$

et cherchons encore un cercle Γ passant par O, qui contienne son conséquent. Il faut déterminer le nombre complexe $a = re^{i\theta}$ de

façon que si

$$z = -\alpha' z - \alpha z' = 0$$

avec

$$z - \alpha = r e^{i(\omega + 2\theta)}, \qquad z = 2 r \cos\theta\, e^{i(\omega + \theta)},$$

θ variant de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, on ait

$$\delta_1 = z_1 z_1' = \alpha' z_1 - \alpha z_1' = 0.$$

Or

$$\delta_1 = \mathcal{R}[a_3 z'^3 (z - \alpha)] = \ldots,$$

les termes non écrits étant de degré > 4 en r pris pour infiniment petit principal. δ_1 a le signe de $\mathcal{R}[a_3 z'^3 (z - \alpha)]$ si r est pris assez petit, et cette dernière quantité n'est autre que

$$\mathcal{R}[a_3 . 8 r^4 \cos^3\theta\, e^{i(2\omega - \theta)}];$$

θ variant de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, cette quantité n'aura un signe constant, qui sera négatif, que si l'on a pris

$$2\omega - \arg a_3 = \pi \pmod{2\pi}.$$

Ceci détermine deux directions opposées sur lesquelles doit se trouver α. On prendra r assez petit sur ces directions pour que, z décrivant Γ, δ_1 soit négatif, et par suite z_1 soit *intérieur à* Γ. Donc Δ ici accède en O par deux pointes opposées, et il est plus simple de prendre pour Δ l'ensemble des deux plus grands cercles tangents extérieurement en O qui satisfont à la dernière condition énoncée; prenant les antécédentes successives des aires intérieures à ces deux cercles, on aura à la limite le domaine de convergence vers O.

108. Ceci a lieu par exemple pour les fractions singulières à cercle fondamental de M. Fatou (*Comptes rendus*, 21 mai 1917).

Considérons

$$z_1 = z + \sum \frac{b_i}{a_i - z} \qquad (b_i > 0,\ a_i \text{ réel})$$

(L'axe réel est cercle fondamental.

Le point à l'infini est un point limite singulier.

En effet, on peut écrire autour du point $z = \infty$

$$z_1 = z - \frac{\delta_1}{z} + \frac{\delta_2}{z^2} + \ldots, \qquad \delta_1 = \sum b_i, \qquad \delta_2 = -\sum \frac{b_i}{a_i}, \qquad \ldots,$$

la série du deuxième membre convergeant pour z assez grand.

Posant $z = \frac{1}{Z}$, $z_1 = \frac{1}{Z_1}$, il vient

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{Z} - \theta_1 Z + \theta_2 Z^2 + \ldots$$

ou

$$Z_1 = \frac{Z}{1 - \theta_1 Z^2 + \ldots},$$

le dénominateur convergeant pour Z assez petit, ou

$$Z_1 = Z + \theta_1 Z^3 + \ldots$$

On est ici dans le cas $a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$.

On sait que tout point intérieur au cercle fondamental admet $Z = 0$ pour point limite de ses conséquents. E′ est ici le cercle fondamental tout entier (*voir* Fatou, p. 807). Dans cet exemple, les deux directions opposées que j'indiquais précédemment sont portées par la droite joignant le point limite singulier au centre du cercle fondamental [1]. Γ est un cercle quelconque tangent en $Z = 0$, au cercle fondamental, c'est-à-dire à l'axe réel.

109. *Autres exemples* : 1. $z_1 = z - z^2$. L'origine est point limite singulier vers lequel tendent les conséquents du point $z = -\frac{1}{2}$ qui annule $\varphi'(z)$. L'infini est l'autre point limite. Le cercle Γ de diamètre $(0, -1)$ appartient au domaine de O. En effet, on voit que la condition pour que

$$\mathcal{R}\left(\frac{1}{z_1}\right) \geq \mathcal{R}\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{ou} \quad \mathcal{R}\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z}\right) = -\mathcal{R}\frac{1}{1+z} \geq 0$$

est

$$\mathcal{R}(1+z) \leq 0, \quad \text{d'où} \quad \mathcal{R}(z) \leq -1.$$

On en conclut que pour tout point du cercle Γ de diamètre $(0, -1)$ sauf pour -1 qui étant antécédent de O est de E′ [1], on a

$$\mathcal{R}\left(\frac{1}{z_1}\right) < \mathcal{R}\left(\frac{1}{z}\right),$$

[1] Ici, la perpendiculaire en $Z = 0$ à l'axe réel.

et, par suite, le conséquent est *intérieur à* Γ, puisque l'équation de Γ est

$$\varphi\left(\frac{1}{z}\right) = 1.$$

Ici $a_2 = 1$. La direction de la tangente à la *pointe* du domaine de O qui est $(-\arg a_2)$ est bien ici la direction OX puisque $\arg a_2 = 0$.

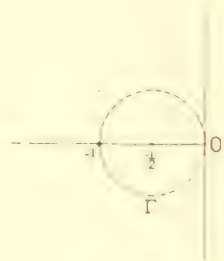


Fig. 90.

Si donc on prend les antécédentes successives de l'aire (Γ), les aires (Γ_{-i}), toutes simplement connexes, tendront vers le domaine R_0 (1) de l'origine. Les courbes Γ_{-i}, frontières de ces aires, tendent vers un continu linéaire qui est E' et qui sépare R_0 de R_∞ domaine du point à l'infini. Hors de Γ, on a

$$|\varphi(z)| > |\varphi(z) - 1| > 1.$$

Donc, des considérations bien simples et que la troisième Partie nous a rendues familières prouvent que les Γ_{-i} tendent *uniformément* vers leur limite E' qui est une *courbe de Jordan simple fermée* passant par O et [illegible] tangente en O à la direction OX.

110. II. Prenons $\tau_1 = z + z^2$. Les zéros de $\varphi'(z)$ sont $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$; on s'assure de suite que leurs conséquents tendent régulièrement vers O en restant sur l'axe imaginaire. En dehors de O, il n'y a donc ni point limite ni groupe circulaire limite. Le domaine immédiat du point O se compose de deux aires simplement connexes symétriques par rapport à O, tangentes en O à OX et qui s'obtiennent respecti-

(1) R_0 comme R_∞, chacun simplement connexe et d'un seul tenant, sont à la fois domaine immédiat et domaine total de convergence vers le point limite qu'ils contiennent.

vement à partir de deux cercles Γ et Γ' symétriques par rapport à O, tangents en O à OX, et de rayon quelconque pourvu qu'il soit $< \frac{1}{2}$. On peut supposer, si l'on veut, que ce rayon est $\frac{1}{2}$. Γ et Γ' passent alors par i et $-i$ antécédents de O.

On vérifie, en effet, que

$$\mathcal{I}\left(\frac{1}{z_1}\right) - \mathcal{I}\left(\frac{1}{z}\right) = \mathcal{I}\left(\frac{1}{1+z^2}\right),$$

dont le signe est celui de $\mathcal{I}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, deux nombres inverses ayant

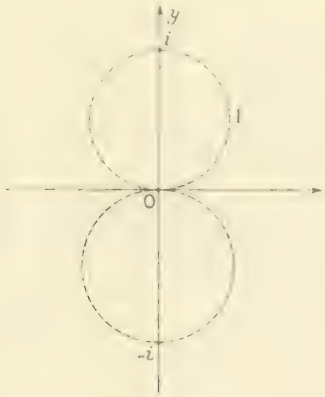


Fig. 3.

des parties imaginaires de signe contraire. Donc, si $|z| < 1$ et si $\mathcal{I}(z) > 0$, on aura

$$\mathcal{I}\left(\frac{1}{z_1}\right) > \mathcal{I}\left(\frac{1}{z}\right).$$

Donc, si z est pris intérieur à Γ ou sur Γ (ailleurs qu'en $z = \alpha$), on aura un point z_1 intérieur à Γ, car l'équation de Γ est $\mathcal{I}\left(\frac{1}{z}\right) = -1$, son intérieur correspondant à $\mathcal{I}\left(\frac{1}{z}\right) < -1$. Γ est bien intérieur à B_1. D'ailleurs on voit que $|\varphi'(z)| = 1$ est une lemniscate de foyers $\pm\frac{i}{\sqrt{3}}$ et $-\frac{i}{\sqrt{3}}$ passant en O, et intérieure à Γ et Γ'. Donc, sur Γ, Γ' et hors

de Γ et Γ', on a $|\varphi'(z)| > 1$. On en conclut que la frontière de R_0, domaine immédiat de O, est formée de deux courbes de Jordan simples fermées tangentes en O à OX et symétriques l'une de l'autre par rapport à OX. R_0 est formé de deux parties symétriques simplement connexes (1); chacune des deux moitiés de R_0 ne contient qu'un point critique de $\psi(z)$. Si l'on forme le domaine total de convergence vers O en prenant les antécédentes successives de chacune des deux aires dont se compose R_0, on aura une infinité d'aires (limitées chacune par une courbe de Jordan simple fermée) dont les dimensions linéaires tendront vers zéro et qui se grouperont absolument comme se groupaient les aires étudiées dans l'exemple

$$z_1 = \frac{z^2 + \delta z}{2};$$

l'ensemble de leurs frontières formera un seul continu linéaire qui sera la frontière du domaine d'un seul tenant simplement connexe R_∞.

R_∞ est domaine immédiat et total de convergence vers l'infini. Le continu linéaire qui le borde est une courbe continue fermée représentable par des équations

$$\begin{aligned} &x = f(t), \quad y = g(t) \quad (f \text{ et } g \text{ étant continues}), \\ &f(a) = f(b), \quad g(a) = g(b) \quad (a \leqq t \leqq b), \end{aligned}$$

mais non de Jordan *simple*. Elle a des points doubles partout denses sur elle-même, ce sont les antécédents de l'origine. Tout ces points sont accessibles par l'intérieur de R_∞ comme l'origine est accessible par les deux côtés (positif et négatif) de l'axe réel (2).

111 *Les points critiques de $\psi(z)$ intérieurs au domaine immédiat*

(1) Chacune de ces deux parties se transforme d'ailleurs en elle-même par $z_1 = z - z^2$ et par les deux branches de la fonction inverse $\psi(z)$ qui se permutent autour du point critique intérieur à la partie considérée.

(2) Si j'avais pris $z_1 = z - z^2$, les points critiques auraient été réels, l'axe OY aurait remplacé l'axe OX, et les deux parties de R_0 se seraient trouvées placées comme, dans l'exemple $z_1 = \frac{z^2 + \delta z}{2}$, les deux domaines R_1 et R'_1.

d'un point $\zeta = \varphi(\zeta)$, $\varphi'(\zeta) = 1$ [1]. — Envoyons d'abord à l'infini un point $z = \varphi(z)$ où $|\varphi'(z)| = 1$, point de E, pour être sûr que le point à l'infini n'admettra pas le point ζ (qu'on peut supposer être l'origine) pour point limite de ses conséquents. Traçons autour de $\zeta = 0$ un petit cercle C limitant une aire (C), dont nous prendrons les antécédentes (C_{-i}) successives par la branche de $\psi(z)$ qui devient nulle à l'origine. Si, quel que soit i, aucune des (C_{-i}) ne contenait de point critique pour la branche de $\psi(z)$ envisagée, cela voudrait dire que les fonctions

$$z = \psi(z) = \varphi(z) = \varphi_1(z) = \ldots$$
$$z_{-i} = \psi_i(z) = z_{-i}$$

obtenues en itérant la branche $\psi(z)$ et qui sont respectivement les branches des inverses de $\varphi(z)$, $\varphi_2(z)$, ... nulles à l'origine, sont toutes holomorphes dans (C) [elles n'y ont ni pôles ni point critiques, car (C) ne contient pas de conséquent de l'infini]. Toutes ces fonctions ont leur dérivée $= 1$ à l'origine, et l'une quelconque d'entre elles ne prend qu'une fois chacune de ses valeurs dans (C), c'est-à-dire que si z_1 et z_2 dans (C) sont distincts, on a $\psi_i(z_1) \neq \psi_i(z_2)$, quel que soit i. On peut alors se servir du théorème dû à M. Koebe et rappelé page 130 du présent Mémoire. $\psi_i(z)$ remplirait toutes les conditions de validité du théorème; z décrivant C, le point z_{-i} décrirait une ligne fermée C_{-i} dont la plus courte distance à l'origine serait $d > \frac{\sqrt{2}-1}{4}\rho$, ρ étant le rayon de C. Toutes les courbes C_{-i} resteraient à une distance finie de O, et ceci est impossible puisqu'on a vu que les parties du cercle C, intérieures au domaine que nous avons appelé Δ' dans ce qui précède, ont des antécédentes qui tendent vers O. On a donc établi, en établissant que la plus courte distance de O à C_{-i} tend vers zéro pour $i = \infty$, que (C_{-i}) finit, i grandissant, par contenir un point critique de la branche $\psi(z)$ nulle en O, et cela quelque petite que soit l'aire (C) initiale. On a vu aussi précédemment que seules ne tendaient pas vers zéro les parties des (C_{-i}) successives qui, n'étant pas intérieures à Δ', étaient intérieures à Δ; on a vu que ces parties, intérieures à Δ, étaient inté-

(1) Tout ce que nous disons s'applique à

$$z = \varphi(\zeta) = \varphi(\zeta) = \ldots \quad (i, j \text{ entiers})$$

rieures au domaine immédiat R_0 de l'origine. On en conclut que le *domaine immédiat de l'origine* contient toujours un point critique pour la branche de $\psi(z)$ nulle à l'origine, ou bien, avec moins de précision, qu'il y a un point critique de $\psi(z)$, conséquent d'un point où $\varphi'(z) = 0$, dont les conséquents admettent O pour seul point limite.

112. Le mode de raisonnement employé prouve aussi que *si aucun point critique de $\psi(z)$ n'admettait l'origine pour point limite de ses conséquents, l'origine ne pourrait être de* E'. En effet, (C) étant avec cette hypothèse choisi assez petit pour ne contenir de conséquent d'aucun point critique de $\psi(z)$, toutes les ψ_i seraient holomorphes dans (C) et l'on aurait des limitations *supérieures* et *inférieures* pour $|\psi_i(z)|$, lorsque z décrirait un cercle déterminé quelconque intérieur à (C); ces limitations seraient *indépendantes de l'indice* i (*voir* KLEIN et FRICKE, 2e volume, p. 360 et 365, pour la limitation supérieure de $|\psi(z)|$). On en conclurait que O serait intérieur à une région $\mathcal{A}$, simplement connexe, d'un seul tenant, intérieure à toutes les (C_i), cette $\mathcal{A}$ se transformant biunivoquement en elle-même par $z_1 = \varphi(z)$ et par la branche de $z_1 = \psi(z)$ nulle à l'origine. Cette $\mathcal{A}$ pourrait être représentée conformément sur l'intérieur d'un cercle de centre O, par $z = f(Z)$. La relation transformée entre Z_1 et Z, $Z_1 = \Phi(Z)$ serait évidemment la rotation $Z_1 = Ze^{i\omega}$ (1) conservant tout cercle de centre O, $z_1 = \varphi(z)$ conserverait alors une infinité de petites courbes analytiques sillonnant $\mathcal{A}$ et entourant O (à la façon des *centres* des équations différentielles du premier ordre). Il est dès lors évident que, dans l'intérieur d'une de ces courbes, toutes les $\varphi_i(z)$ seraient bornées puisque toutes les $z_i = \varphi_i(z)$ transformeraient en elle-même biunivoquement l'aire intérieure à cette courbe. Les $\varphi_i(z)$ formeraient une suite normale dans l'in-

(1) $e^{i\omega}$ est la valeur de $\varphi'(\zeta)$ au point $\zeta = \varphi(\zeta)$, et, dans nos hypothèses, $\omega = 2\pi\frac{p}{q}$ (p, q entiers). Si l'on avait $\varphi'(\zeta) = 1$, on aurait tout simplement $e^{i\omega} = 1$, d'où $Z_1 = Z$, impossible évidemment, car $z_1 = z$ autour de O. Pour $\omega = 2\pi\frac{p}{q}$, l'impossibilité d'une telle représentation conforme avec $\varphi(z)$ rationnelle résulte aussi de ce que $z_q = \varphi_q(z)$ deviendrait, par cette représentation, $Z_1 = Z(e^{i\omega q} = 1)$ et l'on aurait $z_q(z) = z$ autour de O, ce qui est évidemment impossible.

térieur de l'aire $\mathcal{A}$ et O ne serait pas de E'. Ceci contredit le résultat déjà trouvé qu'*aucune suite infinie extraite de la suite des* $\varphi_i(z)$ *n'est normale en* O. Donc le fait que O est de E' entraîne qu'un point critique de $\psi(z)$ doit avoir O pour point limite de ses conséquents.

113. *Quelques réflexions sur les points* [1]

$$\zeta = \varphi(\zeta), \qquad \varphi'(\zeta) = e^{i\theta}$$

θ *incommensurable à* 2π (on suppose toujours $\zeta = 0$). L'emploi simultané des théorèmes sur les suites normales et du théorème de M. Kœbe, indiqué précédemment, va nous conduire à réduire les possibilités à deux seulement.

Entourons, comme précédemment, le point $\zeta = 0$ d'une petite courbe C (cercle) dont nous prendrons les antécédentes successives par la branche de $\psi(z)$ inverse de φ nulle à l'origine :

$$\varphi(z) = z e^{i\theta} + \ldots,$$
$$\psi(z) = z e^{-i\theta} + \ldots$$

On a vu que, si aucune des aires (C_{-i}) antécédentes de (C) ne contient de point critique pour la branche de $\psi(z)$ considérée, O est centre d'une région $\mathcal{A}$ sillonnée de courbes analytiques conservées par $z_1 = \varphi(z)$ comme par $z_{-1} = \psi(z)$. On peut, autour de O, trouver une fonction holomorphe

$$Z = f(z),$$

telle qu'entre Z et Z_1 la relation devienne

$$Z_1 = Z e^{i\theta};$$

$f(z)$ satisfait à l'équation fonctionnelle

$$f[\varphi(z)] = e^{i\theta} f(z),$$

qui est l'équation dite de Schrœder.

Cette équation *a une solution* $f(z)$ *holomorphe en* O, si O n'est pas point limite des conséquents des points critiques de la branche $\psi(z)$ nulle en O. Inversement, si elle a une solution holomorphe

[1] Ce que nous dirons s'appliquera évidemment aux groupes circulaires limites pour lesquels $\zeta = \varphi_p(\zeta)$, $\varphi_p'(\zeta) = e^{i\theta}$, θ incommensurable à 2π.

en O, tout point z voisin de O a tous ses conséquents sur la courbe analytique qui dérive de $|Z| = \text{const.}$ par la représentation conforme $Z = f(z)$, $[f(0) = 0]$, et sur cette courbe ses conséquents sont partout denses, comme sont denses sur $|Z| = \text{const.}$ les conséquents de Z par $Z_1 = Ze^{i\theta}$. Donc $z = 0$ *ne peut être point limite des conséquents d'aucun point du plan.*

114. Il revient donc au même de dire que O est un centre, ou de dire que O n'est point limite des conséquents d'aucun point critique de $\psi(z)$. Qu'il soit possible d'avoir des fonctions $\varphi(z)$, holomorphes en O, telles que pour elles O soit un centre, c'est ce qu'il est facile de voir en partant de

$$Z_1 = Ze^{i\theta}$$

choisissant $f(z)$ holomorphe et nulle en O $[f(0) = 0]$ et tirant z_1 de z par l'équation

$$f(z_1) = f(z)e^{i\theta},$$

qui admet une solution $z_1 = \varphi(z)$ holomorphe et nulle en O développable par

$$z_1 = \varphi(z) = ze^{i\theta} + \ldots.$$

Les courbes conservées seraient ici les courbes $|f(z)| = \text{const.}$ Si l'on prend, par exemple, $Z = 2z - z^2$, on aura

$$z_1 - z = e^{i\theta}(2z - z^2) \quad \text{et} \quad z_1 = 1 - \sqrt{1 - (2z - z^2)e^{i\theta}}$$

$$z_1 = \varphi(z) = ze^{i\theta} - \frac{z^2}{2}(e^{2i\theta} - e^{i\theta}) - \ldots \quad (1)$$

Pour cette transformation, l'origine est centre et les courbes conservées sont les ovales de Cassini de foyers 0 et 2

$$|2z - z^2| = K$$

entourant l'origine $(K < 1)$; toutes ces ovales sont intérieures à la boucle de lemniscate L

$$|2z - z^2| = 1$$

qui entoure l'origine.

115. Le problème revient donc, étant donnée une fraction $\varphi(z)$

(1) Cette série entière en z converge dans le cercle de centre O tangent intérieurement à la boucle de lemniscate L $|2z - z^2| = 1$, qui entoure l'origine.

rationnelle, à discerner si $\zeta = 0$ est un centre, c'est-à-dire : 1° si l'équation

$$f[\varphi(z)] = e^{i\theta} f(z)$$

a une solution $f(z)$ holomorphe (et nulle en O) autour de l'origine, ou bien 2° si elle n'en a pas, auquel cas on est sûr que $\zeta = 0$ sera point limite pour les conséquents d'un point critique de la branche $\psi(z)$ nulle en O. Telles sont les deux hypothèses auxquelles on est réduit. Nous savons que, $\varphi(z)$ étant rationnelle, la deuxième est seule possible si θ est commensurable à 2π, nous l'avons reconnu au paragraphe précédent, et nous avons vu que l'impossibilité de la première hypothèse venait de ce fait que $\zeta = 0$ était, pour θ commensurable à 2π, *un point de* E'. Cela résultait pour nous alors du fait que $\zeta = 0$ était toujours limite des conséquents d'un point critique de la branche $\psi(z)$ nulle en O. On peut dire aussi que, dans tous les cas où la première hypothèse sera vérifiée, l'aire (Γ) intérieure à une courbe $|f(z)| = \text{const.}$ (la constante étant assez petite), se transformant en elle-même biunivoquement par $z_1 = \varphi(z)$ et son inverse $z_{-1} = \psi(z)$, on est sûr que la suite des $\varphi_i(z)$ sera bornée dans (Γ) puisque toutes les $z_i = \varphi_i(z)$ transforment (Γ) en elle-même, donc la suite des φ_i sera normale dans Γ. O ne sera pas point de E'.

Ainsi, la première hypothèse ne peut se trouver vérifiée que si $\zeta = 0$ *n'est pas de* E'. Dans tous les cas où l'on constatera que $\zeta = 0$ est de E', on pourra affirmer que la deuxième hypothèse seule se vérifie, et l'équation de Schrœder n'a pas de solution holomorphe et nulle en O.

116. Montrons qu'effectivement, si $\zeta = 0$ n'est pas de E', c'est-à-dire si les $\varphi_i(z)$ forment une suite normale [1] dans l'aire R (limitée par E') d'un seul tenant qui contient le point $\zeta = 0$ considéré, *la première hypothèse se réalise toujours.*

Entourons en effet $\zeta = 0$ d'une petite aire D, intérieure à R, dans laquelle la suite des $\varphi_i(z)$ est normale. Celle des $\varphi_i(z)$ l'est aussi, ainsi que celle des $\frac{1}{\varphi_i(z)}$. En O on a $|\varphi_i(z)| = 1$, quel que soit i.

[1] On supposera toujours que l'infini est un point de E, en sorte que, dans R, il n'y ait aucun pôle pour les $\varphi_i(z)$ et pour leurs fonctions inverses, ces pôles étant les antécédents et les conséquents de l'infini se trouvent alors tous être dans E', c'est-à-dire non intérieurs à R.

Les $|\varphi_i(z)|$ bornés en O sont bornés dans D, ainsi que les $\left|\frac{1}{\varphi_i(z)}\right|$. Donc, dans D, assez petite, on aura

$$\frac{1}{k} \leqq |\varphi_i(z)| \leqq k \qquad (k > 1)$$

quel que soit i.

On pourra aussi borner supérieurement les $|\varphi_i(z)|$ dans D.

Les $\varphi_i(z)$, nulles en O, ayant leurs dérivées toutes égales à 1 en module en O, une suite extraite des $\varphi_i(z)$ ne peut converger uniformément dans D vers une constante, car il faudrait pour cela que les valeurs en D des dérivées des fonctions de la suite convergeassent vers zéro. On peut donc trouver un nombre N tel que, quel que soit i, et quel que soit le nombre complexe a, aucune des φ_i ne prenne dans D plus de N fois la valeur a.

La suite des $\frac{\varphi_i}{z}$ est, dans D, normale comme celle des φ_i, et bornée. Si

$$z_k = \varphi_k(z) = [illegible]$$

on voit que

$$z_k = \varphi_k(z) = [illegible]$$

donc, pour $z = 0$, toutes les $\frac{\varphi_i}{z}$ sont holomorphes et le point 1 est un point limite pour les valeurs de ces fonctions en O. Choisissons alors une suite d'indices $n_1, n_2, \ldots$ tels que les valeurs $e^{n_1 i}, e^{n_2 i}, \ldots$ tendent vers 1. En O, la suite des $\Phi_k(z) = \frac{\varphi_k}{z}$ tend vers 1.

Donc, on peut extraire de la suite des n_i une suite $N_1, N_2, \ldots$ telle que $\Phi_{N_1}(z), \ldots, \Phi_{N_i}(z), \ldots$ tende dans D uniformément, soit vers la constante 1, soit vers une fonction $\Phi(z)$ holomorphe en O, prenant en O la valeur 1.

Dans la deuxième hypothèse, $\Phi(O)$ étant égal à 1, toutes les fonctions $\Phi_N(z)$ prendraient dans un petit cercle de centre O, à partir d'un certain rang, la valeur 1. Donc, toutes les équations $\Phi_{N_i}(z) = 1$ ou $\varphi_{N_i}(z) = z$ auraient toutes, à partir d'un certain rang, des solutions dans tout cercle de centre O. O serait un point de E′, ce qui est absurde.

Reste donc la seule hypothèse que les $\Phi_{N_i}(z)$ tendent vers la constante 1 dans D, c'est-à-dire, les $\varphi_{N_i}(z)$ tendent *uniformément vers* z dans D. (On voit dès ici apparaître le centre $z = 0$.)

Dans ce cas, on peut tracer autour de O un cercle dans lequel aucune fonction $\varphi_i(z)$ ne prenne la même valeur en deux points

distincts. En effet, admettre le contraire serait admettre l'existence d'une suite infinie de rayons ρ_i tendant vers zéro, de couples de points distincts z_i, z'_i, intérieurs respectivement aux cercles de centre O, de rayon ρ_i, et d'indices n_i grandissant indéfiniment, tels que

$$\varphi_{n_i}(z_i) = \varphi_{n_i}(z'_i).$$

De la suite des φ_{n_i}, on peut extraire une suite φ_{N_i} tendant uniformément dans D vers une fonction $f(z)$ non constante, puisque en O tous les $\varphi_{n_i}(z)$ sont $= 1$: $f(z)$ est nulle en O, et sa dérivée est en module $= 1$ à l'origine. Donc, $f(z)$ représente conformément un cercle assez petit de centre O *sur une aire qui ne se recouvre nulle part*, c'est-à-dire que $f(z)$ prend des valeurs distinctes en deux points distincts quelconques intérieurs à un cercle assez petit de centre O; pour i assez grand, les $\varphi_{N_i}(z)$ diffèrent aussi peu qu'on le veut de $f(z)$; ils ne peuvent donc prendre la même valeur en deux points distincts voisins de O, comme on vient de le supposer dans l'hypothèse. La contradiction qui se rencontre montre donc qu'on peut trouver un petit cercle γ entourant O dans lequel aucune des $\varphi_i(z)$ ne prend la même valeur en deux points distincts.

On peut alors, les $\varphi_i(z)$ étant holomorphes dans γ, ayant en O leurs dérivées $= 1$ en module, et jouissant de la propriété qu'on vient de montrer, leur appliquer le théorème de M. Kœbe déjà mentionné. Les conséquentes de l'aire (γ) sont des aires simples, simplement connexes, ne se recouvrant nulle part et dont les contours restent à distance finie, et supérieure à une limite fixe, de l'origine. On en déduit l'existence d'une aire $\mathcal{A}$ intérieure à toutes les (γ), simplement connexe, entourant O. $\mathcal{A}$ sera transformée biunivoquement en elle-même par $z_1 = \varphi(z)$ et par la branche de $\varphi(z)$ nulle en O. La représentation conforme de $\mathcal{A}$ sur un cercle de centre O, avec conservation de l'origine prouve ici encore que l'origine est un *centre*. On entourera O d'une famille de courbes analytiques qui se conservent biunivoquement par $z_1 = \varphi(z)$. Les conséquents d'un point z assez voisin de O seront partout denses sur la courbe analytique qui passe en ce point [en particulier, il y aura une suite d'indices $n_1, n_2, \ldots$ tels que $\varphi_{n_i}(z)$ tende vers z uniformément dans $\mathcal{A}$].

L'équation de Schrœder

$$F[\varphi(z)] = e^{\lambda} F(z)$$

aura une solution nulle à l'origine, holomorphe en O. Et, d'après

les propriétés des domaines R limités par E' [1], $f(z)$ sera holomorphe dans tout ce domaine R, tout R sera sillonné par des courbes analytiques conservées par $z \to \varphi(z)$. $\zeta = 0$ ne sera limite pour les conséquents d'aucun point du plan.

117. Ainsi, lorsque θ est incommensurable à 2π, nous n'avons le choix qu'entre deux hypothèses :

1° $\zeta = 0$ n'est pas de E'. Alors, c'est un *centre*. Toute l'aire R d'un seul tenant entourant ce centre, limitée par E', est sillonnée de courbes analytiques conservées par $z_1 = \varphi(z)$. Le domaine R ne contient aucun point critique pour la branche $\psi(z)$ inverse de $\varphi(z)$ qui est nulle à l'origine [2]. On voit aussi facilement qu'aucun antécédent du domaine R ne peut contenir de point critique de la fonction algébrique $\psi(z)$, sans que $\zeta = 0$ cesse d'être un centre. L'équation de Schrœder a une solution $F(z)$ holomorphe dans tout R. Pour cette solution, les points frontières de R (points de E') sont des points singuliers essentiels, et le théorème fondamental, démontré dans la première Partie relativement aux points de E' et aux deux seules valeurs exceptionnelles, apparaît ici comme le théorème de M. Picard appliqué à la solution $F(z)$ de l'équation de Schrœder. Tous ces faits se tiennent entre eux et tiennent à ce que les $\varphi_i(z)$ sont supposées normales en $\zeta = 0$.

2° $\zeta = 0$ est de E'. Alors, il est limite pour les conséquents d'un point critique de la branche $\psi(z)$ nulle en $\zeta = 0$. L'équation de Schrœder n'a pas de solution holomorphe à l'origine. $\zeta = 0$ n'est pas un centre.

Je n'ai pas pu, jusqu'ici [3], me prononcer entre ces deux hypothèses qui, pour un cas déterminé, s'excluent mutuellement. Il m'aurait fallu, pour pousser la question plus à fond, plus de temps et de connaissances que je n'en ai. Je me réserve d'y revenir plus tard, s'il y a lieu, car peut-être l'utilisation de l'équation de Schrœder conduira-t-elle à trancher la question.

Si, en effet, on cherche les coefficients de Taylor de $F(z)$ satis-

---

(1) Toute suite extraite des $\varphi_i(z)$, qui converge uniformément dans une partie de R, converge uniformément dans toute aire intérieure à R.

(2) Si, pour les $\psi_i(z)$ itérées de $\psi(z)$, les branches inverses de $\varphi_i(z)$ qui sont nulles en 0.

(3) Voir note [2], page 224.

faisant à

$$F[\varphi(z)] = e^{i\theta} F(z),$$

où

$$\varphi(z) = z e^{i\theta} + \ldots,$$

on peut les déterminer tous de proche en proche lorsque θ est incommensurable à 2π (ce calcul formel est en général impossible si θ est commensurable à 2π). J'ai essayé de montrer la convergence de développement par la méthode des majorantes, mais toutes les majorantes que j'ai obtenues étaient divergentes! J'ai tenu à montrer cependant que, pour $\varphi(z)$ holomorphe autour de l'origine, cette équation pouvait, dans certains cas, avoir une solution holomorphe, en sorte que l'existence des centres est certaine. [Exemple donné où $F(z) = 2z - z^2$, $\varphi(z)$ étant une fonction algébrique de z.] Reste à savoir si, pour $\varphi(z)$ rationnelle, elle peut en avoir; il serait intéressant de décider soit l'affirmative en construisant un exemple, soit la négative.

NOTE ADDITIONNELLE.

118. J'ai reconnu, après le dépôt de ce Mémoire, qu'il n'était pas toujours exact de dire que l'équation $z = \varphi(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ a toujours une solution ζ pour laquelle $|\varphi'(\zeta)| > 1$. Ce serait exact si cette équation *n'avait pas de racine double*, mais la présence possible de ces racines doubles pour lesquelles $\zeta = \varphi(\zeta)$ et $\varphi'(\zeta) = 1$ oblige à conclure que :

1° Ou bien il y a une racine au moins de $\zeta = \varphi(\zeta)$ où $|\varphi'(\zeta)| > 1$;

2° Ou bien il y a au moins une racine $\zeta = \varphi(\zeta)$ où $\varphi'(\zeta) = 1$.

Dans le premier cas, tout ce que nous avons dit dans la première Partie du Mémoire, de l'ensemble E, de E′ et de leurs propriétés, est absolument légitime.

Toutes ces propriétés *restent vraies dans le deuxième cas*, mais elles ont besoin d'être présentées différemment.

On reconnaît, en effet, d'abord, comme à la page [illegible] du Mémoire, que les $\varphi_n(z)$ *ne forment pas une suite normale* au point $\zeta = \varphi(\zeta)$, $\varphi'(\zeta) = 1$.

Donc, dans un cercle arbitrairement petit de centre ζ, toute valeur déterminée, sauf deux au plus, est prise par une certaine fonction $\varphi_n(z)$. Ces valeurs exceptionnelles, on voit aisément, comme

dans la première Partie, qu'elles ne se présentent que si $z_1 = \varphi(z)$ se ramène par transformation homographique à $z_1 = z^{\pm m}$ ou à un polynome. Mais certainement ζ *n'est pas valeur exceptionnelle ni aucun de ses antécédents.* (En aucun de ces antécédents, les φ_n ne sont d'ailleurs normales.) ζ *est donc nécessairement point limite de ses propres antécédents.* Si l'on entoure ζ d'un cercle Γ suffisamment petit, on pourra trouver une suite $\zeta_{-n_1}, \zeta_{-n_2}, \ldots$ d'antécédents de ζ intérieurs à Γ et tendant vers ζ. Il y a plus. L'*étude locale* des environs de ζ, faite aux pages 224 et suivantes du Mémoire précédent, prouve que, si l'on entoure ζ d'un cercle Γ suffisamment petit, on peut trouver deux domaines (1) Δ_1 et Δ'_1 intérieurs à Γ dont ζ soit point frontière, Δ_1 et Δ'_1 ayant une ou plusieurs aires communes, domaines tels que tout point de Δ_1 ait *tous ses conséquents dans* Γ (*et dans* Δ_1), *tendant vers* ζ *et vers* ζ *seul*, et que *tout point de* Δ'_1 *ait tous ses antécédents* [par la branche de la fonction $\psi(z)$, inverse de $\varphi(z)$, égale à ζ en ζ] *successifs intérieurs à* Γ (*et à* Δ'_1) *et tendant vers* ζ *et vers* ζ *seul* (2). Ajoutons que, dans le domaine formé par Δ_1 et Δ'_1, on peut enfermer un cercle assez petit Γ_1 de centre ζ. Tout point de Γ_1 appartient donc à Δ_1 ou à Δ'_1.

Envisageons alors un cercle Γ assez petit pour laisser à son extérieur un certain antécédent ζ_{-n} de ζ et pour que la construction précédente soit possible.

---

(1) Si par exemple $\zeta = 0$ et si $z_1 = \varphi(z) = z + az^2 + \ldots$ $(a \neq 0)$, on pourra, à condition que Γ soit assez petit, prendre pour Δ_1 l'aire intérieure à deux cercles convenables passant par ζ et tangents à Γ, et pour Δ'_1 l'aire symétrique par rap-

port à ζ. Il est alors visible que $\Delta_1 + \Delta'_1$ contient un cercle assez petit Γ_1 de centre ζ.

(2) Dans Δ_1 la branche de $\psi(z)$ égale à ζ en ζ, et toutes les itérées de cette branche sont *holomorphes*.

Dans Γ on peut trouver une suite infinie d'antécédents de ζ :

$$\zeta_{-n_1}, \quad \zeta_{-n_2}, \quad \ldots \quad (p = n_1 + n_2 + \ldots)$$

tendant vers ζ. Si l'on fait la construction précédente, à partir d'un certain indice n_i, les $\zeta_{-n_i}, \zeta_{-n_{i+1}}, \ldots$ sont intérieurs au cercle Γ_1. Mais ζ_{-n_i} ayant un conséquent ζ_{-p} extérieur à Γ n'appartient pas à Δ_1 ; il appartient donc à Δ'_1, c'est-à-dire que *tous ses antécédents* par la branche de $\psi(z)$ qui égale ζ en ζ sont intérieurs à Γ et tendent vers ζ. On peut même entourer ζ_{-n_i} d'un cercle assez petit γ pour que *toutes les aires antécédentes successives de ce cercle par la branche considérée de* $\psi(z)$ soient des aires planes simplement connexes tendant vers ζ. Donc dans tout cercle de centre ζ, si petit soit-il, on peut trouver une aire plane à un seul contour γ_{-N} qui soit antécédente de l'aire du cercle γ précédent.

Cela équivaut à dire que, quelque petite que soit une aire plane $\mathfrak{D}$ entourant ζ, tout le cercle γ sera intérieur à un feuillet d'une certaine itérée $\mathfrak{D}_N$ de l'aire $\mathfrak{D}$, ou bien que *sur un certain feuillet de* $\mathfrak{D}_N$ *tous les points qui se projettent à l'intérieur de* γ *ou sur* γ *sont des points intérieurs à* $\mathfrak{D}_N$. Or on a pu choisir γ assez petit pour que l'itérée γ_{n_i} contenant ζ soit une petite aire simple entourant ζ, qu'on choisira précisément pour l'aire $\mathfrak{D}$. Et l'on a vu dans la première Partie (troisième corollaire du théorème fondamental) qu'il résulte de là, en vertu du paragraphe 5 des Préliminaires, que γ contient toujours une racine au moins de l'équation $z = \varphi_{N+n_i}(z)$ pour laquelle $|\varphi'_{N+n_i}(z)| > 1$, puisque l'itérée d'ordre $N + n_i$ de γ n'est autre que $\mathfrak{D}_N$, $\mathfrak{D}$ étant identique à l'itérée d'ordre n_i de γ.

On vient donc de prouver que *tout point* ζ *vérifiant* $\zeta = \varphi(\zeta)$ avec $\varphi'(\zeta) = 1$ *est limite de points-racines d'équations* $z = \varphi_n(z)$ *où* $|\varphi'_n(z)| > 1$. Ceci prouve bien que E existe, contient une infinité dénombrable de points, et qu'on est en droit de parler de son dérivé E'. L'exposition se poursuit maintenant comme dans le Mémoire.

Sur les surfaces minima ou élassoïdes;

PAR F.-C. CLAPIER,

Professeur de Mathématiques au lycée Gassendi,
ancien boursier d'Agrégation de la Sorbonne.

Objet de cette étude. — Je me suis proposé d'apporter une modeste contribution à l'étude des surfaces minima ou élassoïdes. Ce dernier vocable a été introduit par Ribaucour qui a publié en 1881, étant ingénieur des Ponts et Chaussées à Aix-en-Provence, un Mémoire fort important couronné par l'Académie royale de Belgique. Dans ses « Leçons sur la Théorie générale des surfaces », le très regretté Gaston Darboux consacre le Livre III à l'Historique et à l'exposé des principaux résultats obtenus sur cette question qui a préoccupé l'esprit des plus grands géomètres depuis Lagrange.

Dans le premier Chapitre, je rappelle les propriétés géométriques les plus importantes des surfaces maxima, et montre l'intérêt des formules de Ribaucour qui se prêtent facilement aux applications et mériteraient de devenir classiques au même titre que celles de Weierstrass.

Dans les trois Chapitres suivants, j'étudie les surfaces minima déduites de leur représentation sphérique; en particulier, je détermine la surface minima qui admet comme représentation sphérique de ses lignes de courbure, le système isotherme qui correspond aux lignes de courbure d'une quadrique. Je montre, en outre, comment les diverses méthodes géométriques employées pour la détermination générale des élassoïdes permettent d'obtenir l'intégration de certaines équations aux dérivées partielles.

Dans le cinquième Chapitre, j'envisage les surfaces minima,

groupées en familles, comme trajectoires orthogonales de certaines congruences C_m. L'étude générale de ces congruences présenterait un vif intérêt; je me suis contenté de déduire de cette méthode les surfaces minima les plus simples.

Fidèle à la pensée de mon éminent maître Darboux, qui faisait concourir l'intuition géométrique et le calcul analytique à la solution des Problèmes toujours plus nombreux et plus difficiles qui se posent à l'attention des géomètres, je me suis inspiré de cette pensée de Ch. Dupin :

« Il semble que dans l'état actuel des Sciences mathématiques, le seul moyen d'empêcher que leur domaine ne devienne trop vaste pour notre intelligence est de généraliser de plus en plus les théories que ces Sciences embrassent, afin qu'un petit nombre de vérités générales et fécondes soit, dans la tête des hommes, l'expression abrégée de la plus grande variété des faits particuliers. »

Digne, le 31 octobre 1918.
F. CLAPIER.

CHAPITRE I.

1. Les surfaces minima ou élassoïdes [1] sont celles qui, après la sphère et les surfaces développables, présentent le plus vif intérêt, au point de vue de la courbure :

Leur indicatrice de Dupin est une hyperbole équilatère, et en chacun de leurs points, les deux rayons de courbure sont égaux et dirigés en sens inverse.

Cependant, c'est à propos d'une question de minimum qu'elles se sont présentées, pour la première fois, à l'attention des géomètres. Lagrange s'était proposé de rechercher, parmi toutes les surfaces qui passent par un contour donné, celle dont l'aire est minima. C'est l'analogue du problème des géodésiques qui consiste à trouver sur une surface la ligne la plus courte qui passe par deux points donnés de cette surface : effectivement les surfaces minima jouent dans l'espace euclidien le même rôle que les lignes géodésiques dans un espace à deux dimensions.

---

[1] Le terme surface minima est impropre; l'aire de la surface n'étant pas le plus souvent un minimum absolu (Ribaucour).

Et, de même que le problème de la géodésique qui joint deux points d'une surface n'est pas complètement déterminé, le problème posé par Lagrange ne comporte qu'une question de minimum relatif; et par un contour donné, il peut passer une infinité d'élassoïdes.

Au point de vue analytique, toutes les surfaces qui passent par un contour fixe dépendent de deux fonctions arbitraires; on peut les grouper en familles dépendant chacune d'un paramètre variable. Parmi toutes les surfaces d'une même famille, présentant une aire simplement connexe à l'intérieur du contour, il en existe une, moins étendue que toutes les surfaces voisines.

Les surfaces à étendue minima satisfont à une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre; et Monge a montré que cette équation est la même que celle qui caractérise les surfaces dont les rayons de courbure sont, en chacun de leurs points, égaux entre eux et de signes contraires.

Le Problème général de la détermination des surfaces minima dépend de deux fonctions arbitraires.

Assujettir l'une de ces surfaces à passer par un contour donné, c'est fixer une de ces fonctions arbitraires; la surface minima sera déterminée si on l'assujettit, en outre, soit à passer par un autre contour donné, soit à être inscrite à une développable donnée, le long du premier contour : ces deux problèmes essentiels peuvent se ramener l'un à l'autre.

Ainsi, la recherche de la surface minima passant par deux cercles dont les plans sont parallèles, se ramène à celui de la surface minima inscrite, suivant le premier cercle, dans un cylindre dont les génératrices sont parallèles au plan formé par la ligne des centres et la direction commune des axes des deux cercles.

Le problème de Björling : construire la surface minima circonscrite à une Développable, le long d'un contour donné, est bien déterminé; sa solution géométrique a été donnée par Ribaucour dans un important Mémoire [1] qui nous servira de guide dans cette étude.

2. *Aire d'un élassoïde.* — Considérons une famille de surfaces passant par un contour C; celle dont l'aire est minima par rapport aux

---

[1] Albert Ribaucour, *Étude des élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle*, Mémoire couronné par l'Académie royale de Belgique et publié à Bruxelles (1881).

surfaces voisines jouit de la propriété d'avoir sa courbure moyenne nulle.

Riemann a évalué l'aire d'une portion d'élassoïde, supposée fermée à l'intérieur du contour et ne présentant pas de nappes infinies; il envisage une famille de surfaces homothétiques et il trouve pour l'aire de la surface minima comprise dans cette famille

$$(1) \qquad A = \int_C \frac{dl.ST}{2} \cos\omega,$$

dl étant l'élément du contour en chaque point M, S le pôle d'homothétie et ST la longueur de la perpendiculaire menée sur la tangente MT au contour, ω l'angle du plan tangent à l'élassoïde avec le plan SMT.

Cette formule donne l'aire d'une portion de surface quelconque de la famille, quand on suppose le contour C infiniment petit. Pour un contour fini, l'accroissement d'aire $A' - A$, quand on passe d'une surface S à une surface très voisine S', est un infiniment petit du premier ordre par rapport aux distances *an* des deux surfaces. Ce n'est que dans le cas où les surfaces S et S' sont des élassoïdes que cet accroissement est un infiniment petit du deuxième ordre. D'où la formule de Riemann.

D'après cette formule, l'aire A dépend du contour C et des plans tangents en chacun des points du contour. Si l'on considère le cône de sommet S, s'appuyant sur la courbe C, ω est l'angle du plan tangent au cône avec le plan tangent à l'élassoïde. Celui-ci est bien déterminé par l'inclinaison de ses plans tangents sur les plans tangents du cône; si A_1 est l'aire latérale de celui-ci, on aura

$$\text{pour } \omega \text{ constant}, \qquad A = \cos\omega . A_1.$$

Pour $\omega = 0$, l'aire A est égale à celle du cône circonscrit. Si l'on considère tous les cônes passant par le contour C et ayant même aire latérale A_1, leurs sommets sont situés sur une courbe et dépendent d'un paramètre variable. A chacun de de ces cônes correspondra une surface minima ayant une aire $A = A_1$. Nous déterminons ainsi une famille de surfaces minima passant par une courbe C et ayant toutes même aire A à l'intérieur du contour.

3. *Propriétés géométriques.* — Imaginons une famille de surfaces S, ayant une forme analogue à des surfaces équipotentielles;

leurs trajectoires orthogonales forment une congruence de courbes que l'on peut disposer en petits tubes orthogonaux curvilignes. Un de ces petits tubes, ayant pour base $d\sigma$ sur la surface S et pour hauteur dn, découpe sur la surface S' infiniment voisine une aire $d\sigma'$. Il est facile de montrer que l'accroissement d'aire,

$$\delta\, d\sigma = dn\, d\sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \tag{2}$$

R_1 et R_2 étant les rayons de courbure de la surface S, en un point du petit contour d'aire $d\sigma$.

Il en résulte que si l'on prend une famille de surfaces minima, définie par la congruence de leurs trajectoires orthogonales [1], un petit tube orthogonal découpe sur chaque surface de la famille, des aires égales.

Au point de vue analytique, les surfaces minima qui passent par un contour C dépendent d'une fonction arbitraire qui caractérise la développable circonscrite le long de ce contour. Si l'on prend une famille de développables, on aura une famille correspondante de surfaces minima.

Déterminons la congruence formée par les trajectoires orthogonales aux surfaces de cette famille; on peut former avec ces courbes des tubes orthogonaux d'épaisseur finie qui découperont sur chacune des surfaces de la famille des aires égales. Il en résulte que tous les élassoïdes réels, appartenant à une famille et passant par un contour, ont à l'intérieur de ce contour des aires égales. C'est ce que nous avions montré en prenant comme famille de développables des cônes passant par le contour et ayant des aires latérales égales.

4. Ainsi, il existe un seul élassoïde passant par un contour et circonscrit à une développable le long de ce contour. Mais, si l'on veut considérer le minimum d'aire, il faut envisager une famille de surface S passant par le contour, dépendant d'un paramètre variable; celle de ces surfaces qui aura la moindre étendue, sera un élassoïde (A); il existe une infinité d'élassoïdes passant par le contour et ayant même aire A. — Si l'on envisageait une autre famille de surfaces S_1, on obtiendrait encore une surface d'aire minima (A_1) passant par le contour; cette aire A_1 serait différente de A.

[1] L'étude de ces congruences fera partie de la deuxième partie de ce Mémoire, et sera continuée dans un travail ultérieur.

L'équation (2) montre que les élassoïdes, ou surfaces de courbure moyenne nulle, sont les seules surfaces jouissant de la propriété relative d'aire minima. Cette propriété montre leur analogie avec les géodésiques d'une surface; mais la correspondance est plus étroite :

Si l'on a sur une surface une famille de géodésiques et si l'on en considère leurs trajectoires orthogonales, qui seront par exemple des cercles géodésiques, l'armille formée par deux de ces trajectoires découpe sur chacune des lignes géodésiques des longueurs égales. De même, si l'on a dans l'espace une famille d'élassoïdes, un tube orthogonal découpe sur chaque surface de la famille des aires égales.

On peut délimiter autour du point M d'une surface une région entourant ce point, telle que par un point quelconque de cette région et par le point M, il ne passe qu'une courbe géodésique. De même, on peut, dans l'espace, délimiter une région entourant un contour C, telle que, par un contour quelconque C′ pris dans cette région et par le contour C, il passe un seul élassoïde réel.

Formules de Ribaucour.

5. En tous les points d'une surface minima, l'indicatrice de Dupin étant une hyperbole équilatère, les directions isotropes sont deux directions conjuguées. C'est là une propriété caractéristique des élassoïdes.

Une développable isotrope a comme arête de rebroussement une ligne de longueur nulle; sa génératrice est une droite isotrope, dont la direction coïncide avec sa conjuguée; cette surface peut donc être considérée comme un élassoïde.

Soient A et B deux points quelconques pris sur les arêtes de rebroussement (A) et (B) de deux développables isotropes, le lieu des points M tels que $\frac{MA}{MB} = \text{const.}$, est un élassoïde. On obtient ainsi les surfaces minima les plus générales, car elles dépendent de deux fonctions arbitraires, celles qui définissent les deux développables. Si (A) et (B) sont imaginaires conjuguées, on obtiendra les élassoïdes réels qui dépendent d'une fonction arbitraire (Ribaucour).

Si une surface minima est rapportée à ses lignes de longueur nulle, sa représentation sphérique sera rapportée aux lignes isotropes de la sphère; c'est là une propriété caractéristique (O. Bonnet).

Les lignes de courbure d'une surface minima, qui donnent sur la surface un système isotherme, admettent pour représentation sphérique un système qui est aussi isotherme; mais cette propriété appartient aussi aux surfaces de révolution, aux quadriques, etc. (Darboux).

La recherche des surfaces minima est étroitement liée à celle des systèmes isothermes de la sphère.

A toute représentation géographique de la sphère, on peut faire correspondre un système de formules définissant la surface minima la plus générale. Nous verrons aussi qu'à tout système orthogonal quelconque de la sphère, on peut faire correspondre une surface minima définie en coordonnées tangentielles.

6. Les formules de Weierstrass ont été obtenues en partant de la projection stéréographique de la sphère sur le plan de l'équateur. Si nous prenons comme tracé géographique de la sphère le système de Mercator, nous allons obtenir simplement des formules intéressantes, établies par Ribaucour, en considérant une surface minima comme enveloppée moyenne d'une congruence isotrope.

Nous emploierons les formules de Monge, qui définissent un élassoïde, comme lieu des milieux des cordes AB joignant deux points de deux lignes de longueur nulle (A) et (B). Une de ces lignes satisfait à la condition

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0,$$

que l'on peut écrire

$$(dx + i\,dz)(dx - i\,dz) = -dy^2;$$

Désignons par φ un paramètre variable qui fixe la position du point A, et tel que l'on puisse poser

$$\frac{dx + i\,dz}{-dy} = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} \quad \text{et} \quad \frac{dx - i\,dz}{dy} = \cot\frac{\varphi}{2}.$$

On aura, en introduisant une fonction arbitraire $f(\varphi)$ qui caractérise la développable isotrope (A),

$$\frac{dx}{1 - \operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{dy}{2\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}} = \frac{dz}{i\left(1 + \operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{2}\right)} = f(\varphi)\,d\varphi.$$

L'arête de rebroussement de cette développable sera déterminée par

les égalités

$$(3)\qquad \begin{cases} dx = \cos\varphi . \bar{f}(\varphi) d\varphi, \\ dy = \sin\varphi . \bar{f}(\varphi) d\varphi, \\ dz = i\bar{f}(\varphi) d\varphi \end{cases}$$

avec une fonction arbitraire différente de la première.

Nous pourrons intégrer si nous posons, à l'aide d'une nouvelle fonction arbitraire $F(\varphi)$, ayant pour dérivées F' et F'',

$$\bar{f}(\varphi) = F(\varphi) + F''(\varphi);$$

nous aurons, pour les coordonnées du point A,

$$(A)\qquad \begin{cases} x_a = F \sin\varphi + F' \cos\varphi, \\ y_a = -F \cos\varphi + F' \sin\varphi, \\ z_a = i(F + F''); \end{cases}$$

avec une deuxième fonction arbitraire $F_1(\varphi_1)$ qui caractériserait la développable isotrope (B), nous aurions de même pour les coordonnées du point B,

$$(B)\qquad \begin{cases} x_b = F_1 \sin\varphi_1 + F_1' \cos\varphi_1, \\ y_b = -F_1 \cos\varphi_1 + F_1' \sin\varphi_1, \\ z_b = -i(F_1 + F_1''). \end{cases}$$

Les coordonnées du point M, qui décrit la surface minima (M), seront données par les expressions

$$(4)\qquad x = \frac{x_a + x_b}{2}, \qquad y = \frac{y_a + y_b}{2}, \qquad z = \frac{z_a + z_b}{2}.$$

On peut les écrire sous la forme abrégée

$$(5)\qquad \begin{cases} x - iy = \frac{e^{i\varphi}}{2}(F - iF') - \frac{e^{i\varphi_1}}{2}(F_1 - iF_1'), \\ z = \frac{i}{2}(F + F'') - \frac{i}{2}(F_1 + F_1''). \end{cases}$$

Ce sont les formules données par Ribaucour [1], pour définir l'élassoïde moyen déduit d'une congruence isotrope. Elles contiennent deux fonctions arbitraires; on obtiendra les élassoïdes réels en prenant ces deux fonctions $F(\varphi)$ et $F_1(\varphi_1)$, imaginaires conjuguées, les paramètres φ et φ_1 étant eux-mêmes imaginaires conjugués.

---

[1] *Mémoire sur les élassoïdes*, déjà cité, Chap. XII. p. 131.

L'élassoïde conjugué, introduit par O. Bonnet, s'obtiendra en remplaçant dans les formules (5), F par iF et F_1 par $-iF_1$, c'est-à-dire en multipliant la première fonction arbitraire par i et la deuxième par $-i$.

7. Les formules (4) peuvent se démontrer géométriquement. Nous en déduisons pour le carré de l'élément linéaire

$$\begin{aligned} 4\,ds^2 &= (dx_a + dx_b)^2 + (dy_a - dy_b)^2 + (dz_a - dz_b)^2 \\ &= 2(dx_a\,dx_b + dy_a\,dy_b + dz_a\,dz_b); \end{aligned}$$

et substituant les expressions déduites des formules (3),

$$ds^2 = (F' + F'')(F_1 - F_1')\cos^2\frac{\varphi - \varphi_1}{2}\cdot d\varphi\,d\varphi_1. \tag{6}$$

L'élassoïde est donc rapporté à ses lignes de longueur nulle, comme on pouvait le prévoir : à chaque point A de la première arête de rebroussement correspond sur la surface (M) une ligne parallèle à la deuxième arête de rebroussement (B).

Représentation sphérique. — Les lignes coordonnées qui passent par le point M étant parallèles aux arêtes de base (A) et (B), leurs directions seront données par les formules (3). Désignons par (c, c', c'') les cosinus directeurs de la normale en M, et exprimons que cette normale est perpendiculaire aux directions isotropes des points correspondants A et B; nous avons

$$\left\{\begin{aligned} c\cos\varphi + c'\sin\varphi + ic'' &= 0, \\ c\cos\varphi_1 + c'\sin\varphi_1 - ic'' &= 0, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

d'où l'on déduit

$$\frac{c}{-\sin\frac{\varphi+\varphi_1}{2}} = \frac{c'}{\cos\frac{\varphi+\varphi_1}{2}} = \frac{c''}{i\sin\frac{\varphi-\varphi_1}{2}} = \frac{1}{\cos\frac{\varphi-\varphi_1}{2}}.$$

L'élément linéaire de la représentation sphérique étant $d\sigma$, nous obtenons

$$d\sigma^2 = \frac{1}{\cos^2\frac{\varphi-\varphi_1}{2}}\,d\varphi\,d\varphi_1. \tag{8}$$

Les lignes isotropes ou génératrices rectilignes de la sphère correspondent bien aux lignes isotropes de la surface minima.

Pour obtenir les élassoïdes réels, nous poserons

$$\varphi = \alpha + i\beta, \qquad \varphi_1 = \alpha - i\beta.$$

Si l'on désigne par u et v la colatitude et la longitude du point m, représentation sphérique de M, nous avons, pour les coordonnées du point m,

$$c = \sin u \cos v = \frac{-\sin\alpha}{\cos i\beta},$$

$$c' = \sin u \sin v = \frac{\cos\alpha}{\cos i\beta},$$

$$c'' = \cos u \qquad = i \operatorname{tang} i\beta;$$

et la formule (8) peut s'écrire

$$d\sigma^2 = \sin^2 u \left(dv^2 + \frac{du^2}{\sin^2 u} \right) = \frac{1}{\cos^2 i\beta} \left(d\alpha^2 + d\beta^2 \right).$$

On en déduit pour les expressions de α et β, à l'aide des coordonnées géographiques,

$$\alpha = \frac{-\pi}{2} + v, \qquad -\beta = \log \cot \frac{u}{2}.$$

Ce sont les formules de la représentation géographique de la sphère sur un plan, par le système de Mercator.

Inversement, en partant de cette représentation isotherme de la sphère, on serait conduit aux formules de Ribaucour.

Lignes asymptotiques et lignes de courbure. — Deux directions conjuguées, prises sur l'élassoïde (M), satisfont à la condition

$$dx\,\delta x + dy\,\delta x' + dz\,\delta x'' = 0.$$

Les relations (7) nous donnent

$$\cos\varphi\,\delta x + \sin\varphi\,\delta x' + i\,\delta x'' = (c \sin\varphi + c' \cos\varphi)\,\delta\varphi,$$
$$\cos\varphi_1\,\delta x + \sin\varphi_1\,\delta x' + i\,\delta x'' = (c \sin\varphi_1 + c' \cos\varphi_1)\,\delta\varphi_1.$$

Les parenthèses des seconds membres sont égales; de sorte que, si l'on remplace dx, dy, dz par leurs expressions complètes déduites des formules (3), nous obtenons la condition

$$(F + F')\,d\varphi\,\delta\varphi + (F_1 + F_1')\,d\varphi_1\,\delta\varphi_1 = 0.$$

On en déduit l'équation différentielle des lignes asymptotiques

$$(9)\qquad \sqrt{F' + F''}\, d\varphi \pm i\sqrt{F_1 + F_1'}\, d\varphi_1 = 0,$$

et celle des lignes de courbure

$$(9)\qquad \sqrt{F' + F''}\, d\varphi \pm \sqrt{F_1 + F_1'}\, d\varphi_1 = 0.$$

8. *Élassoïdes conjugués.* — Ce sont deux surfaces minima applicables l'une sur l'autre, et telles, que les lignes asymptotiques de l'une correspondent aux lignes de courbure de l'autre, et inversement.

Substituant iF à F et $-iF_1$ à F_1, dans les formules (5), nous obtenons les équations

$$(10)\qquad \begin{cases} x' + iy' = \dfrac{e^{i\varphi}}{2}(F' + iF'') - \dfrac{e^{i\varphi_1}}{2}(F_1 - iF_1'), \\ z = -\dfrac{1}{2}\left[(F + F'') - (F_1 + F_1')\right] \end{cases}$$

qui déterminent l'élassoïde (M′) conjugué de l'élassoïde (M) : en effet, l'équation différentielle de deux directions conjuguées de ce nouvel élassoïde s'écrit

$$(F' + F'')\, d\varphi\, \delta\varphi - (F_1 + F_1')\, d\varphi_1\, \delta\varphi_1 ;$$

ses lignes asymptotiques sont données par les formules (9) qui donnent les lignes de courbure de l'élassoïde (M). De plus, la forme (6) du carré de l'élément linéaire montre que l'on a $ds^2 = ds'^2$.

Ces deux élassoïdes (M) et (M′) ont même représentation sphérique dont l'élément linéaire est donné par la formule (8) ; aux points correspondants M et M′, les plans tangents sont parallèles. Il y a, de plus, correspondance par orthogonalité des éléments ; nous avons, en effet,

$$\begin{aligned} 2\,dx &= (dx_a + dx_b) = \cos\varphi\,\mathfrak{F}\,d\varphi + \cos\varphi_1\,\mathfrak{F}_1\,d\varphi_1, \\ 2\,dy &= (dy_a + dy_b) = \sin\varphi\,\mathfrak{F}\,d\varphi + \sin\varphi_1\,\mathfrak{F}_1\,d\varphi_1, \\ 2\,dz &= (dz_a + dz_b) = i(\mathfrak{F}\,d\varphi + \mathfrak{F}_1\,d\varphi_1), \end{aligned}$$

changeons $\mathfrak{F}$ en $i\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$ en $-i\mathfrak{F}_1$ et formons le produit

$$dx\,dx' + dy\,dy' + dz\,dz'$$

nous trouvons un résultat identiquement nul.

Inversement, quand deux surfaces se correspondent de manière à satisfaire à deux des conditions suivantes :

1° Parallélisme des plans tangents;
2° Applicables l'une sur l'autre;
4° Orthogonalité des éléments.

Ce sont deux élassoïdes conjugués ([1]).

Supposons, par exemple, que la première et la troisième condition soient réalisées; à tout déplacement Δ sur la première surface correspond un déplacement perpendiculaire Δ' sur la deuxième. Les plans tangents en deux points voisins M et M_1, sur Δ sont parallèles aux plans tangents menés aux points correspondants M' et M'_1 sur Δ'; il en résulte que les directions conjuguées de Δ et Δ', aux points M et M' des deux surfaces, sont parallèles. Si l'on prend pour Δ une direction asymptotique qui a pour conjuguée cette direction elle-même, la direction conjuguée de Δ' sur la deuxième surface, sera parallèle à Δ, c'est-à-dire perpendiculaire à Δ'; cette direction Δ' étant orthogonale avec sa conjuguée est donc celle d'une ligne de courbure de la surface (M').

Les lignes asymptotiques de la première surface (M) correspondent aux lignes de courbure de la deuxième (M').

Remarque. — Cette notion d'élassoïdes conjuguées permet de ramener la recherche des surfaces minima à l'intégration d'une équation différentielle de la forme

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial v} = \xi \tag{11}$$

Désignons par ξ_1, ξ_2, ξ_3 trois solutions particulières de cette équation; par x_1, x_2, x_3 les coordonnées cartésiennes d'un point M d'une surface, que nous définirons à l'aide des paramètres u et v par les formules de Lelieuvre

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = \xi_2 \dfrac{\partial \xi_3}{\partial u} - \xi_3 \dfrac{\partial \xi_2}{\partial u}, & \dfrac{\partial x_1}{\partial v} = -\xi_2 \dfrac{\partial \xi_3}{\partial v} - \xi_3 \dfrac{\partial \xi_2}{\partial v}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Chaque expression

$$\partial x = \frac{\partial x}{\partial u}\, du + \frac{\partial x}{\partial v}\, dv$$

([1]) Ribaucour, *Mémoire sur les Élassoïdes*, p. 106.

est une différentielle exacte; on peut l'intégrer et la surface (M) est rapportée à ses lignes asymptotiques.

Les coefficients directeurs de la normale au point $M(u, v)$ sont ξ_1, ξ_2, ξ_3; et la surface sera un élassoïde, si l'expression

$$\rho_0 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$$

est une quatrième solution particulière de l'équation (11).

Dans ce cas, les lignes asymptotiques, comme les lignes de courbure, forment un système orthogonal sur la surface minima (M). Associons à celle-ci une autre surface (M′), définie par les formules

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial x'_1}{\partial u} = \xi_1 \dfrac{\partial \rho_0}{\partial u} - \rho_0 \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u}, & \dfrac{\partial x'_1}{\partial v} = -\xi_1 \dfrac{\partial \rho_0}{\partial u} + \rho_0 \dfrac{\partial \xi_1}{\partial v}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

L'expression

$$\frac{\partial x'}{\partial u} du + \frac{\partial x'}{\partial v} dv$$

pourra être intégrée, et le point $M'(x'_1, x'_2, x'_3)$ correspondra au point $M(x_1, x_2, x_3)$ à l'aide des mêmes paramètres u et v. On déduit des relations précédentes les conditions

$$\xi_1 dx'_1 + \xi_2 dx'_2 + \xi_3 dx'_3 = 0,$$
$$dx_1 dx'_1 + dx_2 dx'_2 + dx_3 dx'_3 = 0,$$

qui montrent que les deux surfaces (M) et (M′) se correspondent par parallélisme des plans tangents et par orthogonalité des éléments. Ce sont deux élassoïdes conjugués.

Ils ont même élément linéaire. On trouve avec les fonctions $U(u)$ et $V(v)$ la valeur

$$ds^2 = \rho^2 (dU^2 + dV^2)$$

et, pour le carré de la représentation sphérique,

$$d\sigma^2 = \frac{dU^2 + dV^2}{2}.$$

Les lignes asymptotiques d'une surface minima forment un système isotherme; leur représentation sphérique est aussi formée de lignes isothermes.

Démonstrations géométriques.

9. Une développable isotrope a ses génératrices, lignes de longueur nulle, normales à la surface et tangentes à l'arête de rebroussement. Il en résulte que toute ligne tracée sur la surface est ligne de courbure.

Désignons par (A_1) la trace de la développable isotrope sur le plan des xy et par (a) la développée de cette courbe. La génératrice qui passe par un point A_1 de cette courbe (A_1) est normale à cette courbe, et elle a pour enveloppe l'arête de rebroussement (A); le point de contact A est donc situé sur la surface polaire, la droite Aa est perpendiculaire au plan des xy.

Ainsi, la développée (a) est la projection de (A). En prenant une deuxième développable isotrope ayant pour trace (B_1) sur le plan des xy, la développée (b) sera la projection de son arête de rebroussement (B).

Le point M, milieu de AB, décrit une surface minima, dont les coordonnées sont

$$x = \frac{x_1 + x}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Définissons la courbe (A_1) par l'équation de sa tangente

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi + F(\varphi) = 0,$$

φ, angle de la normale Aa avec l'axe des x.

L'équation de cette normale étant

$$x \sin\varphi - y \cos\varphi = F'(\varphi),$$

si l'on détermine le point de contact a, avec son enveloppe, on retrouve précisément les expressions qui correspondent aux deux premières formules de Ribaucour. La droite AA_1 est une génératrice isotrope et nous avons

$$z_1 = \overline{aA} = i.\overline{aA_1}.$$

Pour la deuxième développable, nous aurons, en prenant une génératrice isotrope symétrique de la première,

$$z_1 = \overline{bB} = -i.\overline{bB_1}.$$

En désignant par R_a et R_b les rayons de courbure des courbes (A_1)

et (B_1), nous aurons

$$z = i\frac{R_a - R_b}{2}, \qquad R_a = F' + F'', \qquad R_b = F' - F_1$$

Nous retrouvons ainsi la troisième formule de Ribaucour, en même temps qu'une interprétation géométrique de ces formules.

Pour l'élassoïde conjugué (M'), on aurait les relations

$$z' = -\frac{R_a + R_b}{2}, \qquad \overline{om'} = i.\frac{ab}{2};$$

le segment $\overline{om'}$ joint l'origine des coordonnées à la projection de M', et il est parallèle au segment ab qui joint les centres de courbure des traces (A_1) et (B_1).

La courbe (A_1) est une développante de la courbe (a); si l'on désigne par R_1 le rayon de courbure de celle-ci, nous aurons

$$R_1 = \frac{dR_a}{d\varphi} = F' + F'''.$$

L'équation des lignes de courbure, donnée par la formule (9), peut donc s'écrire,

$$\sqrt{R_1}\, d\varphi_1 \pm \sqrt{R_2}\, d\varphi_2 = 0.$$

Supposons que les développables isotropes (A) et (B) soient confondues; nous aurons une seule courbe (A_1) sur laquelle nous prendrons deux points de paramètres φ et φ_1. Pour $\varphi = \varphi_1$, la corde $\overline{A_1B_1}$ est tangente à la courbe double (A_1), et nous avons

$$R_a = R_b, \qquad z = 0, \qquad c' = 0.$$

La développée (a) est donc une géodésique de la surface; le plan des xy est un plan de symétrie.

Inversement, on peut se proposer de rechercher la surface minima admettant comme géodésique une courbe plane donnée (a). Celle-ci étant définie par l'expression de son rayon de courbure en fonction de l'angle φ que fait la tangente avec l'axe des x, la détermination des lignes de courbure et des lignes asymptotiques sera donnée par

$$\int \sqrt{R}\, d\varphi.$$

Applications.

10. Les formules de Ribaucour se prêtent commodément aux applications, suivant la forme choisie des fonctions arbitraires qui y entrent. Nous poserons,

$$\varphi = \alpha + i\beta, \qquad \varphi_1 = \alpha - i\beta,$$

et nous prendrons $F(\varphi)$ et $F_1(\varphi_1)$ imaginaires conjuguées, pour obtenir des surfaces minima réelles.

1° Supposons

$$F(\varphi) = x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi + a\varphi.$$

Nous avons

$$x_0 = -x_0 + a \sin\varphi, \qquad y_1 = -y_0 - a\cos\varphi$$

et, par suite,

$$x + x_0 = a \sin\frac{\varphi + \varphi_1}{2} \cos\frac{\varphi - \varphi_1}{2},$$

$$y + y_0 = a \cos\frac{\varphi + \varphi_1}{2} \cos\frac{\varphi - \varphi_1}{2};$$

à l'aide des paramètres réels α et β, nous obtenons

$$\left\{\begin{aligned} x + x_0 &= a \sin\alpha \cos i\beta, \\ y + y_0 &= a \cos\alpha \cos i\beta, \\ z &= a\beta. \end{aligned}\right.$$

Ces formules caractérisent la surface minima de révolution dont l'équation peut s'écrire

$$a \cos\frac{iz}{a} = \sqrt{(x + x_0)^2 + (y + y_0)^2} \quad \text{(alysséide)}.$$

2° Supposons

$$F(\varphi) = e^{m\varphi}.$$

Les équations (5) nous donnent, après l'introduction des paramètres α et β,

$$\left\{\begin{aligned} x + iy &= \frac{m(1-m)}{2}\left[\cos(m-1)\alpha - i\sin(m-1)\alpha\right]e^{(m-1)\beta} \\ &\quad \frac{m(1-m)}{2}\left[\cos(m-1)\alpha - i\sin(m-1)\alpha\right]e^{(m-1)\beta}, \\ z &= (1-m^2)\cos m\alpha\, e^{m\beta}. \end{aligned}\right.$$

Nous avons trouvé, à l'aide des coordonnées géographiques u et v de la sphère,

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + v, \qquad e^{-\beta} = \cot\frac{u}{2} = \rho.$$

Après cette substitution, nous trouvons les formules de Bour qui donnent les surfaces minima applicables sur une surface de révolution.

Dans ce cas, la formule (6) nous donne

$$\begin{aligned} ds^2 &= m^2(1-m^2)^2\cos^2 i\beta\,(d\alpha^2 + d\beta^2) \\ &= m^2(1-m^2)^2\sin^{-4} u\,(du^2 + \sin^2 u\,dv^2). \end{aligned}$$

Les géodésiques de ces surfaces minima correspondent aux méridiens de la sphère $v = \text{const.}$

Les élassoïdes de cette famille, pour lesquels m est un nombre commensurable, sont algébriques; pour $m = 2$, on obtient l'élassoïde d'Enneper.

Remarque. — Les lignes de courbure de ce dernier élassoïde sont données, à l'aide de la formule (9), par les relations

$$\begin{aligned} e^{-\beta}\cos\alpha &= \text{const.}, \\ e^{-\beta}\sin\alpha &= \text{const.} \end{aligned}$$

ou, avec les paramètres géographiques u et v,

$$\cot\frac{u}{2}\sin v = -y_0 = \text{const.}$$

$$\cot\frac{u}{2}\cos v = x_0 = \text{const.}$$

Le point de coordonnées (x_0, y_0) est la projection stéréographique du point m de la sphère; c'est l'affixe de cette projection qui représente le paramètre des formules de Weierstrass,

$$\xi = \frac{c + ic'}{1 - c} = ie^{-\beta}.$$

L'élassoïde d'Enneper correspond à la surface minima qui admet pour géodésique la première podaire négative de la parabole :

Soit, en effet, l'équation de la parabole

$$\rho = \frac{a}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}},$$

rapportée à son foyer comme pôle. Le rayon de courbure de la podaire négative sera

$$R = \rho + \frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = \frac{3}{2} \frac{a}{\cos^3 \frac{\varphi}{2}};$$

et les lignes de courbure de la surface minima, qui admet cette courbe comme géodésique, sont données par

$$\int \sqrt{R}\, d\varphi = m \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}.$$

3° Supposons

$$F(\varphi) = ih \cos 2\varphi.$$

L'élassoïde (M) correspondant nous est donné par les parties réelles des expressions

$$\begin{aligned} x &= \mathcal{R}(-\tfrac{1}{4} ih \cos^2 \varphi), \\ y &= \mathcal{R}(\tfrac{1}{4} ih \sin^2 \varphi), \\ z &= \mathcal{R}(\tfrac{3}{2} h \cos 2\varphi). \end{aligned}$$

Substituant $\varphi = \alpha + i\beta$, nous trouvons

$$\left\{ \begin{aligned} z &= \tfrac{3}{2} h \cos 2\alpha \cosh 2\beta, \\ x &= \tfrac{1}{4} ih \sin \alpha \sin i\beta (\sin^2 \alpha \sinh^2 \beta - 3 \cos^2 \alpha \cosh^2 \beta), \\ y &= -\tfrac{1}{4} ih \cos \alpha \sinh \beta (\cos^2 \alpha \sinh^2 \beta + 3 \sin^2 \alpha \cosh^2 \beta); \end{aligned} \right.$$

posons $\lambda = i \sin i\beta$, paramètre réel, nous obtenons

$$\left\{ \begin{aligned} x &= 2h\lambda \sin \alpha [(3 - \tfrac{1}{4}\lambda^2) \cos 2\alpha + (3 + 2\lambda^2)], \\ y &= 2h\lambda \sin \alpha [(3 + \tfrac{1}{4}\lambda^2) \cos 2\alpha - (3 + 2\lambda^2)], \\ z &= 3h(1 + 2\lambda^2) \cos 2\alpha. \end{aligned} \right.$$

Ces expressions montrent que la surface minima obtenue n'est autre que celle qu'on déduit de la congruence isotrope formée par les génératrices rectilignes d'une famille de Paraboloïdes homofocaux.

Ceux-ci étant rapportés au milieu O du segment focal pris comme

axe des y, leur équation générale s'écrit

$$\frac{x^2}{\sin^2\alpha} - \frac{z^2}{\cos^2\alpha} = 8h(y - h\cos 2\alpha),$$

h est la demi-longueur du segment et α un paramètre variable. Ces surfaces étant inscrites dans une même développante isotrope, une génératrice est à l'intersection de deux plans tangents isotropes.

Si l'on détermine l'enveloppe du plan moyen de la congruence isotrope formée par ces génératrices, on trouve précisément les formules précédentes (¹).

En prenant $F(\varphi) = h\cos 2\varphi$, on obtiendrait l'élassoïde conjugué (M′) dérivé des paraboloïdes homofocaux.

CHAPITRE II.

11. Soit l'équation d'une surface en coordonnées tangentielles, à laquelle nous adjoignons l'équation de l'ombilical,

$$\Phi(u, v, w, p) = 0, \qquad u^2 + v^2 + w^2 = 0;$$

nous déterminons ainsi une développable isotrope dépendant d'une fonction Φ. Deux plans tangents quelconques à deux développables isotropes (A) et (B) se coupent suivant une droite D qui dépend de deux paramètres. La congruence isotrope formée par les droites D dépend de deux fonctions arbitraires. La détermination des réseaux isothermes de la sphère dépend, elle aussi, de deux fonctions arbitraires. Nous allons montrer qu'à chaque représentation isothermique de la sphère on peut faire correspondre un couple de congruences isotropes auxquelles correspondent un couple de surfaces minima conjuguées.

Nous aurons à utiliser les formules relatives au trièdre mobile assujetti à la sphère de rayon unité, prise comme surface de référence. Rappelons brièvement l'établissement de ces formules :

— Un point quelconque M de la sphère est déterminé par un système orthogonal de courbes coordonnées (u) et (v) (²). Nous considérons

(¹) Ribaucour, Mémoire cité, p. 206.

(²) La courbe (u) correspond à u variable et v constant.

le trièdre positif formé par la normale extérieure MN $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$, la tangente à la première courbe MT $(\beta_1\beta_2\beta_3)$ et la tangente à la deuxième courbe coordonnée MS $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)$.

Les neuf cosinus directeurs qui déterminent la position de ce trièdre mobile satisfont aux relations

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u} = a\beta, \qquad \frac{\partial\alpha_1}{\partial u} = a\beta_1, \qquad \frac{\partial\alpha_2}{\partial u} = a\beta_2,$$
$$\frac{\partial\alpha}{\partial v} = b\gamma, \qquad \frac{\partial\alpha_1}{\partial v} = b\gamma_1, \qquad \frac{\partial\alpha_2}{\partial v} = b\gamma_2;$$

a et b sont des fonctions (u, v) qui fixent la forme de l'élément linéaire

$$d\sigma^2 = a^2 du^2 + b^2 dv^2.$$

Si l'on exprime que l'accélération sur la courbe (u) est située dans le plan $M\alpha\gamma$ perpendiculaire à MT, on trouve les égalités

$$\frac{\partial\beta}{\partial u} = -a\alpha - m\gamma, \qquad \frac{\partial\beta_1}{\partial u} = -a\alpha_1 - m\gamma_1, \qquad \frac{\partial\beta_2}{\partial u} = -a\alpha_2 - m\gamma_2,$$
$$\frac{\partial\gamma}{\partial u} = m\beta, \qquad \frac{\partial\gamma_1}{\partial u} = m\beta_1, \qquad \frac{\partial\gamma_2}{\partial u} = m\beta_2.$$

Relativement à la courbe (v), on aura six équations analogues. Écrivant que deux expressions, soit de $\frac{\partial^2\alpha}{\partial u\,\partial v}$, soit de $\frac{\partial^2\beta}{\partial u\,\partial v}$, sont identiques, on trouvera les trois équations de Codazzi, où entrent les nouvelles fonctions m et n, correspondant aux rotations instantanées.

A chaque formule contenant α, β ou γ, on peut en ajouter deux autres obtenues par permutation tournante; de sorte que nous pourrons écrire toutes les relations relatives au trièdre mobile de la sphère, dans le Tableau suivant (¹) :

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\alpha}{\partial u} = a\beta, & \dfrac{\partial\beta}{\partial u} = -a\alpha - m\gamma, & \dfrac{\partial\gamma}{\partial u} = m\beta, \\[2ex] \dfrac{\partial\alpha}{\partial v} = b\gamma, & \dfrac{\partial\beta}{\partial v} = n\gamma, & \dfrac{\partial\gamma}{\partial v} = -b\alpha - n\beta; \end{cases}$$

$$(13)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial v} = bm, & \dfrac{\partial b}{\partial u} = an, \\[2ex] \dfrac{\partial n}{\partial u} + \dfrac{\partial m}{\partial v} + ab = 0. \end{cases}$$

(¹) Cl. Guichard, *Cours de la Faculté des Sciences de Paris.*

12. Si nous supposons que le réseau des courbes u et v soit un réseau isotherme, nous aurons au point

$$M(\alpha_1\alpha_2\alpha_3), \qquad \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1,$$
$$d\sigma^2=\lambda^2(du^2+dv^2),$$

λ fonction déterminée de u et v, qui caractérise le système isotherme. Posons $a=b=\lambda=e^\varphi$, les relations (13) s'écrivent :

$$(14)\qquad m=\frac{\partial\varphi}{\partial v}, \qquad n=\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}+e^{2\varphi}=0.$$

En faisant le changement de variables

$$u'=u+iv, \qquad v'=u-iv,$$

l'équation aux dérivées partielles (14) prend la forme

$$(15)\qquad 4\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}+e^{2\varphi}=0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2(\log\lambda^2)}{\partial u\,\partial v}+\frac{\lambda^2}{2}=0.$$

Elle peut s'intégrer avec deux fonctions arbitraires $U(u)$ et $V(v)$, dont on désigne les dérivées par U' et V'; on a

$$\lambda^2=\frac{-4U'V'}{(U+V)^2}.$$

Portons, sur la tangente $M\beta$ à la courbe (u), une longueur $MI=\lambda$, et menons ID parallèle à la normale $M\alpha$; la droite D, ainsi construite, engendre une congruence isotrope :

En effet, les coordonnées du point I sont

$$\alpha_1+e^\varphi\beta_1, \qquad \alpha_2+e^\varphi\beta_2, \qquad \alpha_3+e^\varphi\beta_3,$$

et les coordonnées $(x_1x_2x_3)$ d'un point quelconque de la droite D s'expriment sous forme abrégée par l'égalité

$$(F)\qquad x=\alpha+e^\varphi\beta+\rho\gamma=e^\varphi\beta+\rho\gamma.$$

Nous en déduisons, à l'aide des formules (12)

$$\begin{cases}\dfrac{\partial x}{\partial u}=\alpha\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial u}-e^{2\varphi}\right)+\beta\left(e^\varphi\dfrac{\partial\rho}{\partial u}+\rho e^\varphi\right)+\gamma e^\varphi\dfrac{\partial\rho}{\partial v},\\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v}=\alpha\dfrac{\partial\rho}{\partial v}+\beta e^\varphi\dfrac{\partial\rho}{\partial v}+\gamma\left(e^\varphi\dfrac{\partial\rho}{\partial u}+\rho e^{2\varphi}\right).\end{cases}$$

Ces expressions déterminent deux directions de tangentes au point F pris sur la droite D. Si le point F est un foyer, ces directions devront être situées dans le plan tangent à la focale de la congruence. Ce plan contient la droite D dont la direction est $M\alpha$; il faudra donc que les directions $\left[\frac{\partial x}{\partial u}\right]$, $\left[\frac{\partial x}{\partial v}\right]$ et $[\alpha]$ soient dans un même plan; ce qui exige que les coefficients de β et γ dans les expressions précédentes, soient proportionnels. On devra donc avoir

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} - 1}{\frac{\partial \varphi}{\partial v}} = \frac{-\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u} + 1};$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} + 1 = \pm i \frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

Il en résulte que la droite D engendre une congruence dont les focales sont déterminées par les expressions de la forme

$$\frac{\partial x}{\partial u} = k\alpha + h(\beta \pm i\gamma),$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = k_1\alpha + h_1(\beta \pm i\gamma);$$

c'est une congruence isotrope.

Les coordonnées des foyers F_1 et F_2 de cette congruence sont données par les égalités

$$x = (\alpha + e^{\varphi}\beta) - \rho\alpha \quad \begin{cases} 1 + \rho_1 = -i\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} & (IF_1 = \rho_1), \\ 1 + \rho_2 = -i\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} & (IF_2 = \rho_2). \end{cases}$$

Le point central sur la droite D est à la distance du point I $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$; il a donc pour coordonnées

$$x = \alpha + e^{\varphi}\beta - \left(1 + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\alpha = e^{\varphi}\beta - \alpha\frac{\partial \varphi}{\partial u}.$$

Le plan moyen passe par ce point et est normal à la droite D; il aura donc pour équation

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0. \tag{16}$$

Ce plan enveloppe la surface minima déduite de la congruence; sa distance au centre de la sphère est

$$p = -\frac{\partial \varrho}{\partial u} = -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u}.$$

Si nous considérons la congruence isotrope obtenue, en portant sur la tangente $M\gamma$, à la courbe (v), une longueur $MI = \lambda$ et menant ID parallèle à la normale $M\alpha$, nous obtiendrons une deuxième surface minima, enveloppe du plan qui a pour équation

$$(17) \qquad \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \frac{\partial \varrho}{\partial v} = 0;$$

en faisant tourner de 90° l'angle $M\beta\gamma$ formé par les tangentes aux courbes coordonnées, on ne change pas la forme de l'élément linéaire.

Il en résulte que les deux surfaces minima (16) et (17) définies en coordonnées tangentielles se correspondent par parallélisme des plans tangents et sont applicables l'une sur l'autre. Ce sont deux élassoïdes conjugués.

13. *Détermination des surfaces minima admettant pour représentation sphérique de leurs lignes de courbure un réseau isotherme déterminé.* — Rapportons une surface (M_1) à ses lignes de courbure (u) et (v); les directions $M_1\beta_1$ et $M_1\gamma_1$ de leurs tangentes restent parallèles aux directions $M\beta$ et $M\gamma$ des tangentes aux représentations sphériques des courbes coordonnées; le trièdre mobile $M_1\alpha_1\beta_1\gamma_1$ sur la surface est donc équipollent au trièdre $M\alpha\beta\gamma$ qui lui correspond sur la sphère.

Désignons par (x, x_1, x_2) les coordonnées du point M_1; nous devrons avoir les relations

$$\frac{\partial x}{\partial u} = h\beta, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial u} = h\beta_1, \qquad \frac{\partial x_2}{\partial u} = h\beta_2,$$
$$\frac{\partial x}{\partial v} = l\gamma, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial v} = l\gamma_1, \qquad \frac{\partial x_2}{\partial v} = l\gamma_2,$$

h et l étant deux fonctions de u et v, qui doivent satisfaire à deux conditions, exprimant que les deux expressions de $\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}$ déduites des

formules précédentes, sont les mêmes; en se reportant aux formules (12), on trouve l'égalité

$$hn\gamma + \beta \frac{\partial h}{\partial v} = lm\beta + \gamma \frac{\partial l}{\partial u},$$

qui doit être satisfaite, quelles que soient les valeurs de β et γ; d'où les conditions

$$(18) \qquad \frac{\partial h}{\partial v} = lm, \qquad \frac{\partial l}{\partial u} = hn.$$

Les fonctions h et l étant choisies de manière à vérifier ces relations, nous pourrons exprimer les coordonnées du point M_1 par des quadratures

$$(M_1) \qquad \begin{cases} x = \int h\beta\, du + l\gamma\, dv, \\ x_1 = \int h\beta_1\, du + l\gamma_1\, dv, \\ x_2 = \int h\beta_2\, du + l\gamma_2\, dv. \end{cases}$$

La surface (M_1) est rapportée à ses lignes de courbure; les coordonnées de l'un des centres de courbure sont

$$y = x + R_1 \alpha.$$

et nous avons

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} + R_1 \frac{\partial \alpha}{\partial u} + \alpha \frac{\partial R_1}{\partial u} = h\beta + R_1 \alpha\beta + \alpha \frac{\partial R_1}{\partial u}.$$

Cette direction $\left[\frac{\partial y}{\partial u}\right]$ doit être la même que celle de la normale $M\alpha_1$, ce qui exige que l'on ait

$$aR_1 + h = 0.$$

On a donc les valeurs des deux rayons de courbure

$$R_1 = \frac{-h}{a}, \quad R_2 = \frac{-l}{b}.$$

Donnons-nous comme image sphérique des lignes de courbure un système isotherme,

$$a = b = e^{\varphi}, \quad d\sigma^2 = e^{2\varphi}(du^2 + dv^2),$$

φ satisfaisant aux relations (14).

Si nous posons

$$h = e^{-\varphi}, \quad l = e^{-\varphi},$$

les conditions (18) seront vérifiées; et nous obtiendrons une surface (M_1) ayant pour rayons de courbure

$$R_1 = -e^{-2\varphi}, \qquad R_2 = e^{-2\varphi}.$$

Ce sera une surface minima.

Elle dépendra de deux fonctions arbitraires correspondant à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles (14). La recherche générale des surfaces minima est encore ramenée à celle des systèmes isothermes de la sphère. L'intérêt de cette méthode est que, dans chaque cas particulier, la surface obtenue est rapportée à ses lignes de courbure.

14. En général, la représentation isothermique est donnée sous la forme

$$d\sigma^2 = \lambda^2(U^2 du^2 + V^2 dv^2).$$

U et V étant de simples fonctions de u et v. Posons

$$a = e^{\theta} U, \qquad b = e^{\theta} V, \qquad d\sigma^2 = e^{2\theta}(U^2 du^2 + V^2 dv^2).$$

Si nous nous reportons aux formules (13), nous obtenons

$$m = \frac{U}{V}\frac{\partial\theta}{\partial v}, \qquad n = \frac{V}{U}\frac{\partial\theta}{\partial u}.$$

θ doit satisfaire à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{U'}{U^3}\frac{\partial\theta}{\partial u} + \frac{V'}{V^3}\frac{\partial\theta}{\partial v} = \frac{1}{U^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + e^{2\theta}.$$

Posons, avec deux autres fonctions $U_1(u)$ et $V_1(v)$,

$$h = e^{-\theta} U_1, \qquad l = -e^{-\theta} V_1,$$

les conditions (18) seront satisfaites si l'on a

$$U_1 V = U V_1.$$

En conséquence, nous prendrons les valeurs suivantes :

$$h = e^{-\theta} U, \qquad l = -e^{-\theta} V;$$

nous en déduirons, pour la valeur des rayons de courbure,

$$R_1 = \frac{-h}{a} = [illegible], \qquad R_2 = \frac{-l}{b} = [illegible].$$

La surface correspondante est une surface minima dont les coordonnées seront exprimées par les quadratures

$$(19)\quad \begin{cases} x = \int [illegible] \beta_1 U\,du + \gamma_1 V\,dv, \\ y = \int [illegible] \beta_2 U\,du + \gamma_2 V\,dv, \\ z = \int [illegible] \beta_3 U\,du + \gamma_3 V\,dv. \end{cases}$$

Connaissant le système particulier des courbes (u) et (v) sur la sphère, on connaît les cosinus directeurs des tangentes à ces courbes en fonction des paramètres u et v ; la connaissance du $d\sigma^2$ nous donne les expressions de $e^{-\theta}$, U et V, à l'aide des mêmes paramètres.

En effectuant les quadratures, quand cela est possible, avec des fonctions analytiques, nous aurons une surface minima bien déterminée, qui admet pour représentation sphérique de ses lignes de courbure un réseau isotherme donné.

13. Application. — *Surface minima dont l'image sphérique de ses lignes de courbure est la même que celle des lignes de courbure d'une quadrique.* — Donnons-nous une quadrique à centre, ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1 = 0.$$

Ses lignes de courbure sont déterminées par un double système de quadriques homofocales, qui, avec la quadrique donnée, forment un système triple orthogonal.

Désignons par u et v les paramètres de ces lignes de courbure, λ un paramètre caractéristique de chaque quadrique de la famille homofocale; nous avons l'identité

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} = \frac{-\lambda(\lambda-u)(\lambda-v)}{(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)};$$

d'où l'on déduit

$$(20)\qquad \begin{cases} x^2 = \dfrac{a(a+u)(a+v)}{(a-b)(a-c)}, \\ y^2 = \dfrac{b(b+u)(b+v)}{(b-c)(b-a)}, \\ z^2 = \dfrac{c(c+u)(c+v)}{(c-a)(c-b)}. \end{cases}$$

Formons le carré de l'élément linéaire. Nous avons

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{x}{2(a+u)}, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{y}{2(b+u)}, \qquad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{z}{2(c+u)}.$$

Prenons la dérivée de l'identité en λ, dont nous sommes partis; nous en déduisons

$$\mathrm{S}\,\frac{x^2}{(a+u)^2} = \left[\frac{\lambda(\lambda+v)\dfrac{\partial}{\partial\lambda}(\lambda+u)}{(a+\lambda)(b+\lambda)(c+\lambda)}\right] \quad \text{pour } \lambda = u.$$

On obtient ainsi

$$\mathrm{S}\,\frac{x^2}{(a+u)^2} = \frac{u(u-v)}{(a+u)(b+u)(c+u)},$$

$$\mathrm{S}\,\frac{x^2}{(a+v)^2} = \frac{v(u-v)}{(a+v)(b+v)(c+v)}.$$

D'autre part, les normales aux quadriques $(\lambda = u, \lambda = v)$ étant rectangulaires, l'expression

$$\mathrm{S}\,\frac{x^2}{(a+u)(a+v)} = 0,$$

et l'élément linéaire a la forme isotherme

$$(21)\qquad ds^2 = \frac{(u-v)}{4}\left[\frac{u\,du^2}{(a+u)(b+u)(c+u)} - \frac{v\,dv^2}{(a+v)(b+v)(c+v)}\right].$$

Nous pouvons en déduire le $d\sigma^2$ de la représentation sphérique :

Nous avons pour les cosinus directeurs de la normale

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{x}{a\rho}, \qquad \alpha_1 = \dfrac{y}{b\rho}, \qquad \alpha_2 = \dfrac{z}{c\rho}, \\ \rho^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}. \end{cases}$$

$$\rho^2 = \mathrm{S}\,\frac{(a+u)(a+v)}{a(a-b)(a-c)} = \frac{uv}{abc}.$$

Nous avons ensuite

$$\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} = \frac{\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial \rho}{\partial u}}{\rho^2} = \frac{\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{x}{2u}}{\rho}.$$

Remplaçons $\frac{\partial x}{\partial u}$ par son expression précédemment écrite,

$$(22) \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial u} = \frac{-x}{2\sqrt{Auv}} \cdot \frac{1}{u(a-u)}, \qquad A = \frac{1}{abc}.$$

Le rayon de courbure R_1 vérifie l'équation

$$\frac{\partial x}{\partial u} + R_1 \frac{\partial \alpha}{\partial u} = 0,$$

ou bien

$$\frac{x}{2(a-u)} - \frac{R_1 x}{2u(a-u)\sqrt{Auv}} = 0.$$

On aura donc

$$R_1^2 = Auv \qquad \text{et} \qquad R_2^2 = Av^2 u$$

Le calcul des rayons de courbure nous permet d'obtenir

$$d\sigma^2 = \frac{E}{R_1^2} du^2 + \frac{G}{R_2^2} dv^2,$$

sachant que $ds^2 = E du^2 + G dv^2$.

De la formule (21) nous déduisons, pour le carré de l'élément linéaire de la sphère,

$$(23) \qquad d\sigma^2 = \frac{abc(u-v)}{4uv} \left[\frac{du^2}{u(a-u)(b-u)(c-u)} - \frac{dv^2}{v(a+v)(b+v)(c+v)} \right].$$

Appliquons les formules (19); nous avons, avec une constante d'homogénéité k,

$$e^{2\rho} = \frac{abc}{4k^2} \frac{u-v}{uv},$$

$$U\sqrt{u(a+u)(b-u)(c+u)} = k.$$

Nous avons aussi, en utilisant la première formule (12) et l'expression (21),

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \sqrt{\frac{u-v}{Auv}} \frac{k}{\sqrt{u(a+u)(b+u)(c+u)}};$$

d'après la formule (22), il vient

$$\frac{-x}{\sqrt{u(a+u)}} = \frac{\beta\sqrt{u-v}}{\sqrt{(b-u)(c+u)}}$$

et

$$\beta = \sqrt{\frac{a}{(a-b)(a-c)}}\sqrt{\frac{(b+u)(c+u)(a+v)}{u^2-uv}}.$$

Nous pouvons donc écrire les valeurs de $U\beta$ et les valeurs analogues de $V\gamma$

$$\beta U = \sqrt{\frac{a}{(a-b)(a-c)}}\,\frac{k}{u\sqrt{u-v}}\sqrt{\frac{a-v}{a+u}},$$

$$\gamma V = \sqrt{\frac{a}{(a-b)(a-c)}}\,\frac{k}{v\sqrt{v-u}}\sqrt{\frac{a+u}{a+v}}.$$

De sorte que les coordonnées de la surface minima cherchée seront données par l'expression triple

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= 2\int\frac{A_1\sqrt{uv}}{(u-v)}\left|\sqrt{\frac{a+v}{a+u}}\,\frac{du}{u} - \sqrt{\frac{a+u}{a+v}}\,\frac{dv}{v}\right|,\\ A_1^2 &= \frac{k^2}{bc(a-b)(a-c)}.\end{aligned}\right.$$

Pour effectuer ces quadratures, nous devons faire intervenir les fonctions elliptiques.

Déterminons l'élément linéaire ds^2 ; nous avons

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = \frac{4uv}{u^2(u-v)^2}\,\frac{A_1^2(a+v)}{a+u},$$

$$\sum\frac{A_1^2 a}{a+u} = \sum\frac{A_1^2(a-u-u)}{a+u} = -u\sum\frac{A_1^2}{a+u}, \qquad \sum A_1^2 = 0.$$

Le coefficient de du^2 dans ds^2 est donc

$$\frac{4uv}{u^2(u-v)^2}(v-u)\sum\frac{A_1^2}{a+u}$$

et

$$\sum\frac{A_1^2}{a+u} = \frac{-u\sum a(b^2-c^2)}{abc(b-c)(c-a)(a-b)(a+u)(b+u)(c+u)}.$$

Nous aurons, par analogie, le coefficient de dv^2; et l'élément linéaire

de la surface maxima considérée aura la forme isothermique

$$ds^2 = \frac{4\,\mathrm{H}\,uv}{abc(u-v)}\left[\frac{du^2}{u(a+u)(b+u)(c+u)} - \frac{dv^2}{v(a+v)(b+v)(c+v)}\right],$$

$$\mathrm{H} = \frac{\sum a(b^2-c^2)}{(b-c)(c-a)(a-b)}.$$

Son rayon de courbure s'obtiendra par comparaison avec la forme (23) de la représentation sphérique; on aura

$$\mathrm{R} = \sqrt{\mathrm{H}}\,\frac{4\,uv}{abc(u-v)} = \sqrt{\mathrm{H}}\,e^{-\lambda}.$$

CHAPITRE III.

Correspondance par orthogonalité des éléments.

16. *Théorème de Ribaucour.* — Soient deux surfaces (A) et (B) qui se correspondent par orthogonalité des éléments. Par le point B de la deuxième on mène une droite D parallèle à la normale au point correspondant A de la première surface :

1° La surface (B) est la surface moyenne de la congruence formée par les droites D; 2° les plans focaux sont perpendiculaires aux directions asymptotiques de la surface (A).

Désignons par ξ_1, ξ_2, ξ_3 les cosinus directeurs de la normale $\mathrm{A}n$ au point de coordonnées (x_1, x_2, x_3). Un point quelconque de la droite D, menée par le point $\mathrm{B}(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3)$ parallèlement à $\mathrm{A}n$, aura pour coordonnées

$$(\mathrm{C}) \qquad \mathrm{Y}_1 = \mathrm{X}_1 + \rho\xi_1, \qquad \mathrm{Y}_2 = \mathrm{X}_2 + \rho\xi_2, \qquad \mathrm{Y}_3 = \mathrm{X}_3 + \rho\xi_3.$$

Nous rapportons la surface (A) à ses directions asymptotiques, à l'aide des formules de Lelieuvre

$$(\mathrm{A}) \qquad \frac{\partial x_1}{\partial u} = \xi_3\frac{\partial \xi_1}{\partial u} - \xi_1\frac{\partial \xi_3}{\partial u}, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial v} = -\xi_2\frac{\partial \xi_3}{\partial v} + \xi_3\frac{\partial \xi_2}{\partial v},$$

ξ_1, ξ_2, ξ_3 représentent trois solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial u\,\partial v} = \alpha\eta.$$

Si l'on prend une quatrième solution déterminée λ de la même équation, on peut définir une surface (B) qui correspond à la surface (A) par orthogonalité des éléments, à l'aide des formules

$$(B) \qquad \frac{\partial X_1}{\partial u} = \lambda \frac{\partial \xi_1}{\partial u} + \xi_1 \frac{\partial \lambda}{\partial u}, \qquad \frac{\partial X_1}{\partial v} = -\lambda \frac{\partial \xi_1}{\partial v} + \xi_1 \frac{\partial \lambda}{\partial v}.$$

Lorsque le point A varie sur la courbe (u), le point C décrit une certaine courbe dont la tangente est

$$\frac{\partial Y_1}{\partial u} = \frac{\partial X_1}{\partial u} + \rho \frac{\partial \xi_1}{\partial u} + \xi_1 \frac{\partial \rho}{\partial u},$$

que l'on peut écrire

$$\frac{\partial Y_1}{\partial u} = (\lambda - \rho) \frac{\partial \xi_1}{\partial u} + \xi_1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial u} - \frac{\partial \lambda}{\partial u} \right);$$

si l'on choisit la valeur $\rho = -\lambda$, la direction de cette tangente sera précisément celle de la droite D et le point C sera un foyer de la congruence engendrée par cette droite. Dans ce cas

$$\frac{\partial Y_1}{\partial u} = -2\xi_1 \frac{\partial \lambda}{\partial u};$$

et les coordonnées du foyer F_1 seront

$$(F_1) \qquad Y_1 = X_1 - \lambda \xi_1, \qquad Y_2 = X_2 - \lambda \xi_2, \qquad Y_3 = X_3 - \lambda \xi_3.$$

On voit de plus que les premières développables de la congruence correspondent aux asymptotiques (u) de la surface (A). Prenant la développable correspondant à la deuxième asymptotique (v), on trouve que les coordonnées du deuxième foyer de la congruence sont

$$(F_2) \qquad Z_1 = X_1 + \lambda \xi_1, \qquad Z_2 = X_2 + \lambda \xi_2, \qquad Z_3 = X_3 + \lambda \xi_3.$$

Le point central, milieu de $F_1 F_2$, a pour coordonnées

$$\frac{Y_1 + Z_1}{2} = X_1, \qquad \frac{Y_2 + Z_2}{2} = X_2, \qquad \frac{Y_3 + Z_3}{2} = X_3;$$

c'est précisément le point B.

Ainsi, la surface (B) est la surface moyenne, et les courbes décrites sur les focales de la congruence par les foyers F_1 et F_2 correspondent aux lignes asymptotiques de la surface (A).

Le plan tangent au point F_1 à la première focale est déterminé par

la droite D et la direction

$$\frac{\partial Y_1}{\partial v} = \frac{\partial X_1}{\partial v} - \gamma \frac{\partial \xi_1}{\partial v} - \xi_1 \frac{\partial \gamma}{\partial v} = -2\gamma \frac{\partial \xi_1}{\partial v}.$$

Il en résulte que les paramètres directeurs de la normale au premier plan focal sont donnés par le Tableau

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial v} & \frac{\partial \xi_2}{\partial v} & \frac{\partial \xi_3}{\partial v} \end{vmatrix};$$

ils sont proportionnels à

$$\frac{\partial x_1}{\partial v}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial v}, \quad \frac{\partial x_3}{\partial v},$$

c'est-à-dire aux coefficients directeurs de la deuxième ligne asymptotiques : Les images sphériques des asymptotiques de la surface (A) sont aussi les images sphériques principales de la congruence. Une démonstration géométrique de cette propriété est donnée par Darboux [1].

17. Prenons pour surface (A) une sphère de rayon 1; les lignes asymptotiques sont les génératrices de la sphère. Ce sont des lignes isotropes; le centre O est le pôle du plan de l'infini, et un plan qui passe par la normale OA et une génératrice est un plan isotrope. La droite D, parallèle à la normale, est comme celle-ci l'intersection de deux plans isotropes; elle engendre une congruence isotrope. Inversement, la surface moyenne d'une congruence isotrope correspond, par orthogonalité des éléments, à la sphère qui en est la représentation sphérique.

Dans ce cas particulier, nous avons les formules suivantes :

Les coordonnées du point A(α), peuvent s'écrire

$$\text{A)} \qquad \alpha_1 = \frac{u+v}{1+uv}, \qquad \alpha_2 = \frac{i(u-v)}{1+uv}, \qquad \alpha_3 = \frac{1-uv}{1+uv}$$

et

$$\frac{\xi_1}{\alpha_1} = \frac{\xi_2}{\alpha_2} = \frac{\xi_3}{\alpha_3} = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}.$$

On constate facilement que les coordonnées α_1, α_2, α_3, vérifient

---

[1] *Leçons sur la Théorie des surfaces*, p. 861.

l'équation aux dérivées partielles

$$(\mathrm{M}) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \frac{-2}{(1 - uv)^2}\, \theta;$$

et l'on peut, dans les formules du paragraphe précédent, remplacer les paramètres ξ_1, ξ_2, ξ_3 par les cosinus directeurs α_1, α_2, α_3.

La congruence formée par les droites D est une congruence isotrope qui dépend de l'équation du deuxième ordre (M); sa surface moyenne (B) sera déterminée par les formules

$$(\mathrm{B}) \qquad \frac{\partial X_1}{\partial u} = \theta \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} - \alpha_1 \frac{\partial \theta}{\partial u}, \qquad \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\theta \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} - \alpha_1 \frac{\partial \theta}{\partial v};$$

θ est une solution de l'équation (M) qui caractérise la congruence isotrope. Le plan moyen de celle-ci enveloppe une surface minima; la distance de ce plan au centre de la sphère est précisément égale à la valeur θ choisie.

En effet, les expressions (B) nous donnent

$$S\,\alpha \frac{\partial X}{\partial u} = -\frac{\partial \theta}{\partial u}, \qquad S\,\alpha \frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial v};$$

il en résulte

$$2\,S\,\alpha \frac{\partial^2 X}{\partial u\, \partial v} + S \frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} + S \frac{\partial \alpha}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} = 0.$$

La condition générale d'orthogonalité nous montre que l'on doit avoir

$$S \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial \alpha}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} \right) = 0$$

et, par suite,

$$S\,\alpha \frac{\partial^2 X}{\partial u\, \partial v} = 0.$$

Le plan moyen passant par le point B et perpendiculaire à la normale OA est placé à la distance du point O,

$$p = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u\, \partial v} = S\,X \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u\, \partial v} = \frac{-2}{(1 - uv)^2} (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3);$$

on a

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u\, \partial v} = \frac{-2p}{(1 - uv)^2}, \qquad (p = 0)$$

Ainsi, à chaque solution particulière de l'équation (M) correspond une surface minima définie en coordonnées tangentielles $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, p)$.

18. Nous avions trouvé (**12**) l'équation (16) qui représente en coordonnées tangentielles une surface minima correspondant à la représentation sphérique

$$d\sigma^2 = e^{2\varphi}(du^2 + dv^2).$$

Changeant u en $u + iv$ et v en $u - iv$, cette expression prend la forme

$$d\sigma = e^{2\varphi}(du\,dv),$$

et le plan tangent à la surface minima prend la forme

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial v} = 0,$$

φ étant une solution de l'équation (15).

En posant

$$\varphi = \frac{\varphi}{1 + uv},$$

on choisit comme système isotherme celui qui est formé par les génératrices de la sphère. Et la surface minima correspondante est telle que la distance de l'origine O au plan tangent

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right).$$

On en déduit

$$-\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2\,\partial v} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v^2}.$$

De l'équation (15) on déduit

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2\,\partial v} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right);$$

d'où

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi}{1 + uv}\right).$$

Nous retrouvons ainsi l'équation (M).

A la solution

$$\varphi = \frac{1}{1 + uv}$$

de l'équation (15) correspond la solution

$$\theta = -\left(\frac{d\sigma}{du} - \frac{d\sigma}{dv}\right) = \frac{u+v}{1-uv}$$

de l'équation (M). La connaissance de l'intégrale générale de la première nous permettra d'obtenir celle de la seconde. On a

$$e^{i\gamma} = \frac{-f(u)\,\varphi(v)}{[f(u)-f(v)]^2},$$

avec deux fonctions arbitraires; pour

$$f(u) = \frac{1}{u} \quad \text{et} \quad \varphi(v) = 1$$

on a la solution particulière

$$e^{i\gamma} = \frac{4}{(1+uv)^2}$$

à laquelle correspond

$$\theta = 0.$$

Pour obtenir la solution générale θ de l'équation (M), on peut se servir des formules de Weierstrass :

Le plan de coordonnées tangentielles $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \theta)$ a pour équation

$$(u+v)x + i(u-v)y + (1-uv)z + (1+uv)\theta.$$

Il enveloppe une surface minima qui dépend de l'intégration de l'équation (M), c'est-à-dire de deux fonctions arbitraires. Or, les formules de Weierstrass, qui font intervenir la représentation isotherme de la sphère sous la même forme

$$(d\sigma)^2 = \frac{4\,du\,dv}{(1+uv)^2},$$

nous donnent la valeur de

$$(u+v)x + i(u-v)y + (1-uv)z + (1+uv)\theta \quad (^1)$$
$$\frac{1}{2} = 2vF(u) + 2uF_1(v) + (1+uv)[F(u) + F_1(v)].$$

L'intégrale générale de l'équation (M) est donc, avec les deux

(1) DARBOUX, *Leçons sur la Théorie des surfaces* [illegible]

fonctions arbitraires $F(u)$ et $F_1(v)$,

$$\theta = \frac{2}{1+uv}[vF(u) + uF_1(v)] - [F(u) + F_1(v)].$$

L'intérêt de cette méthode est de nous donner l'intégration de certaines formes d'équations aux dérivées partielles par des méthodes géométriques.

Ainsi, les formules de Ribaucour se rapportent à la représentation sphérique donnée par l'expression (7); et l'on a

$$\alpha_1 = \frac{-\sin\frac{\varphi-\varphi_1}{2}}{\cos\frac{\varphi-\varphi_1}{2}}, \qquad \alpha_2 = \frac{\cos\frac{\varphi-\varphi_1}{2}}{\cos\frac{\varphi-\varphi_1}{2}}, \qquad \alpha_3 = i\,\mathrm{tang}\,\frac{\varphi-\varphi_1}{2};$$

ces trois cosinus directeurs satisfont à l'équation aux dérivées partielles

$$(\mathrm{M}_1) \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi\,\partial\varphi_1} = \frac{-1}{2\cos\frac{\varphi-\varphi_1}{2}}\,\theta.$$

θ étant une solution donnée de cette équation, le plan ayant pour équation

$$-x\sin\frac{\varphi+\varphi_1}{2} + y\cos\frac{\varphi-\varphi_1}{2} + iz\,\mathrm{tang}\,\frac{\varphi-\varphi_1}{2} = \cos\frac{\varphi-\varphi_1}{2}\,\theta,$$

enveloppe une surface minima bien explicitée par les formules de Ribaucour (5).

Il en résulte que l'intégrale générale de l'équation (M_1) peut se mettre sous la forme

$$\theta = \mathrm{tang}\left(i\frac{\varphi-\varphi_1}{2}\right) \times \frac{F(\varphi) - F_1(\varphi_1)}{2} - \frac{F(\varphi) + F_1(\varphi_1)}{2}.$$

19. Nous avons vu qu'à toute représentation isotherme de la sphère on peut faire correspondre une congruence isotrope, et par suite une surface minima. Nous allons montrer que, à tout système orthogonal quelconque de courbes (u) et (v) sur la sphère, on peut faire correspondre une congruence isotrope :

Soit $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ un point de la sphère qui correspond par orthogonalité des éléments à la surface (B).

Nous avons les formules

$$(25)\qquad d\sigma^2 = a^2\,du^2 + b^2\,dv^2;$$

$$(26)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\alpha}{\partial u} = a\beta, & \dfrac{\partial\beta}{\partial u} = -a\alpha - m\gamma, & \dfrac{\partial\gamma}{\partial u} = m\beta, \\ \dfrac{\partial\alpha}{\partial v} = b\gamma, & \dfrac{\partial\beta}{\partial v} = n\gamma, & \dfrac{\partial\gamma}{\partial v} = -b\alpha - n\beta. \end{cases}$$

Aux directions β et γ des courbes coordonnées de la sphère correspondent, sur la surface (B), deux directions perpendiculaires qui seront données par les formules

$$(27)\qquad \frac{\partial x}{\partial u} = h\gamma + e\alpha, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = l\beta + f\alpha.$$

Écrivons que l'on doit avoir

$$S\beta\frac{\partial x}{\partial u} = 0 \qquad \text{et} \qquad S\gamma\frac{\partial x}{\partial v} = 0$$

ou bien

$$S\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} = 0 \qquad \text{et} \qquad S\frac{\partial\alpha}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} = 0;$$

nous déduisons, d'après la condition générale d'orthogonalité entre les éléments des surfaces (A) et (B),

$$S\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial\alpha}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$S[a\beta(l\beta + f\alpha) + b\gamma(h\gamma + e\alpha)] = 0;$$

d'où l'on déduit la condition

$$(28)\qquad al + bh = 0.$$

Écrivons ensuite que les deux expressions de $\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}$, déduites des formules (27), sont les mêmes; il vient, en tenant compte des égalités fondamentales (26),

$$\left(-hb + \frac{\partial e}{\partial v}\right) + \beta(-hn) + \gamma\left(\frac{\partial h}{\partial v} + eb\right)$$
$$= \alpha\left(-la + \frac{\partial f}{\partial u}\right) + \beta\left(\frac{\partial l}{\partial u} + fa\right) + \gamma(-lm),$$

ce qui donne les trois nouvelles conditions

$$(29)\qquad \left\{\begin{aligned} &-bh + \frac{\partial e}{\partial v} = -al + \frac{\partial f}{\partial u},\\ &\frac{\partial l}{\partial u} + af + nh = 0,\\ &\frac{\partial h}{\partial v} + be + ml = 0. \end{aligned}\right.$$

Les coefficients h, l, e et f satisfaisant à ces quatre conditions (28) et (29), les formules (27) nous détermineront la surface moyenne (B) d'une congruence formée par les droites D, menées par chaque point B parallèlement à la normale au point correspondant A de la sphère (théorème de Ribaucour).

Nous allons montrer que, même dans ce cas où les courbes coordonnées ne sont pas des lignes isotropes et forment un réseau orthogonal, la congruence des droites D est une congruence isotrope.

Déterminons en effet les foyers de la congruence (D); les coordonnées de l'un d'eux étant exprimées par

$$y = x + \alpha\rho,$$

nous aurons

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \alpha\left(\varepsilon + \frac{\partial \rho}{\partial u}\right) + \beta\, a\rho + \gamma\, h,$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \alpha\left(f + \frac{\partial \rho}{\partial v}\right) + \beta\, l + \gamma\, b\rho.$$

Ces directions et la direction α de la droite D doivent être dans un même plan focal; il en résulte que les coefficients de β et γ dans les formules précédentes doivent être proportionnels; ce qui donne la condition

$$\frac{a\rho}{l} = \frac{h}{b\rho}, \qquad \text{d'où} \qquad \rho^2 = \frac{hl}{ab};$$

tenant compte de la relation (28), on en déduit

$$\frac{h}{a\rho} = \frac{a\rho}{l} = \pm 1;$$

c'est bien la détermination des foyers d'une congruence isotrope.

CHAPITRE IV.

Intégration de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles.

20. Nous avons vu qu'à chaque système de projection géographique de la sphère correspond un système de formules déterminant les surfaces minima. La connaissance de celles-ci, qui contiennent deux fonctions arbitraires, nous a permis d'intégrer certaines équations aux dérivées partielles de la forme étudiée par Moutard. D'autres méthodes de recherche permettront d'intégrer certains systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, qui déterminent les surfaces minima. Je vais en donner deux exemples correspondant aux formules de Weierstrass et de Ribaucour :

Nous désignerons par (c, c', c'') les cosinus directeurs de la normale en un point $M_1(x, y, z)$ d'une surface minima. Si l'on suppose que x et y soient les variables indépendantes, nous avons la condition de Lagrange

$$\frac{dc}{dx} + \frac{dc'}{dy} = 0. \tag{30}$$

et il faut exprimer que l'expression

$$c\,dx + c'\,dy + c''\,dz \tag{31}$$

est une différence exacte.

I. *Projection stéréographique.* — Les coordonnées du point M, image sphérique du point M_1, sont données par les formules

$$c = \sin u \cos v, \qquad c' = \sin u \sin v, \qquad c'' = \cos u.$$

Désignons par $(\alpha + i\beta)$ l'affixe de la projection stéréographique m de ce point vu d'un pôle P; nous avons

$$\alpha = \rho \cos v, \qquad \beta = \rho \sin v, \qquad \rho = \tan \frac{u}{2}.$$

Le réseau de courbes (α) et (β) est un réseau isotherme formé par les deux familles de cercles orthogonaux passant par les droites $P'x$ et $P'y$

parallèles aux axes de coordonnées. L'élément linéaire de la sphère a la forme

$$dv^2 = du^2 + \sin^2 v\, dv^2 = \frac{4(d\alpha^2 + d\beta^2)}{(1 - \alpha^2 + \beta^2)^2}.$$

Au lieu des variables indépendantes x et y, nous nous proposons de déterminer les coordonnées cartésiennes d'un point de la surface (M_1), en fonction des nouvelles variables α et β.

La condition (30) nous donne l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\beta}{dy} + (\beta^2 - \alpha^2)\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy}\right) + 2\alpha\beta\left(\frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dx}\right) = 0.$$

Et si nous effectuons le changement de variables, à l'aide des formules

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{D}\frac{dy}{d\beta}, \qquad \frac{d\beta}{dx} = -\frac{1}{D}\frac{dy}{d\alpha},$$
$$\frac{d\alpha}{dy} = -\frac{1}{D}\frac{dx}{d\beta}, \qquad \frac{d\beta}{dy} = \frac{1}{D}\frac{dx}{d\alpha},$$

D étant le déterminant fonctionnel, nous avons l'équation caractéristique d'une surface minima :

$$(32) \qquad \frac{dx}{d\alpha} - \frac{dy}{d\beta} + (\alpha^2 - \beta^2)\left(\frac{dx}{d\alpha} + \frac{dy}{d\beta}\right) + 2\alpha\beta\left(\frac{dx}{d\beta} - \frac{dy}{d\alpha}\right) = 0.$$

Mais la condition (31) devant aussi être satisfaite, nous devrons pouvoir intégrer l'équation

$$(33) \qquad 2\alpha\, dx - 2\beta\, dy + (\alpha^2 + \beta^2 - 1)\, dz = 0.$$

La condition d'intégrabilité nous donne une deuxième équation aux dérivées partielles :

$$(34) \qquad \frac{dx}{d\beta} + \frac{dy}{d\alpha} + (\alpha^2 - \beta^2)\left(\frac{dx}{d\beta} - \frac{dy}{d\alpha}\right) - 2\alpha\beta\left(\frac{dx}{d\alpha} + \frac{dy}{d\beta}\right) = 0.$$

Nous obtiendrons les surfaces minima algébriques en recherchant les solutions algébriques communes aux deux équations (32) et (34). La coordonnée z s'en déduira par une quadrature, d'après l'équation (33) qui est intégrable.

21. La surface d'Enneper nous donne une solution de la forme

$$x + iy = \frac{3\alpha + 3\alpha\beta^2 - \alpha^3}{3} + i\,\frac{3\beta + 3\alpha^2\beta - \beta^3}{3};$$

ou bien

$$x + iy = -\frac{(\alpha - i\beta)^3}{3} + \frac{\alpha + i\beta}{3};$$

on déduit, pour la coordonnée z et pour l'élément linéaire,

$$z = \alpha^2 - \beta^2,$$

$$ds^2 = (1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 (d\alpha^2 + d\beta^2).$$

Les courbes (α) et (β) sont les lignes de courbure.

Proposons-nous de rechercher les solutions de la forme plus générale

$$x + iy = \frac{(\alpha - i\beta)^m}{m} - \frac{(\alpha + i\beta)^n}{n}. \tag{35}$$

Pour satisfaire aux équations (32) et (34) nous devons avoir

$$(\alpha - i\beta)^{m-1} + (\alpha + i\beta)^{m-1} = (\alpha - i\beta)^{n-1} + (\alpha + i\beta)^{n-1},$$

d'où

$$m = n + 2.$$

Nous obtenons ainsi, en faisant $n = m - 2$, dans la formule (35), une famille de surfaces comprenant une infinité de surfaces algébriques (m commensurable).

Si l'on substitue aux paramètres α et β les paramètres u et v qui définissent les méridiens et les parallèles de la sphère, on a

$$\alpha - i\beta = \rho(\cos v + i\sin v), \qquad \alpha + i\beta = \rho(\cos v - i\sin v),$$

$$x + iy = \frac{\rho^m}{m}(\cos mv + i\sin mv) - \frac{\rho^{m-2}}{m-2}[\cos(m-2)v - i\sin(m-2)v];$$

on déduit, après l'intégration de

$$dz = -\operatorname{tang} u\,(\cos v\,dx + \sin v\,dy)$$

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{\rho^m}{m}\cos mv - \frac{\rho^{m-2}}{m-2}\cos(m-2)v, \\ y &= \frac{\rho^m}{m}\sin mv + \frac{\rho^{m-2}}{m-2}\sin(m-2)v, \\ z &= \frac{2}{m-1}\rho^{m-1}\cos(m-1)v. \end{aligned}\right.$$

Ce sont les formules de Bour qui définissent les surfaces minima applicables sur une surface de révolution. Elles admettent pour géodésiques les courbes $v = \text{const}$.

Les formules de Weierstrass expriment x, y et z, à l'aide des variables caractéristiques des lignes isotropes

$$\xi = \alpha - i\beta, \qquad \xi_1 = \alpha + i\beta;$$

elles peuvent s'écrire

$$(36) \qquad \begin{cases} x + iy = -\xi^2 f'(\xi) + 2\xi f(\xi) - 2f(\xi) - f_1(\xi), \\ z = \xi f''(\xi) - f'(\xi) + \xi_1 f''(\xi_1) - f'_1(\xi_1), \end{cases}$$

avec les deux fonctions arbitraires imaginaires conjuguées $f(\xi)$ et $f(\xi_1)$. Si l'on prend

$$f(\xi) = \frac{-\xi^m}{m(m-1)(m-2)}, \qquad f''(\xi) = -\xi^{m-3},$$

on obtient l'expression

$$(x + iy) = \frac{(\alpha - i\beta)^m}{m} - \frac{(\alpha + i\beta)^{m-2}}{m-2},$$

qui correspond aux formules de Bour, obtenues par une autre méthode.

L'intérêt de celle-ci est de nous permettre d'obtenir la solution générale avec deux fonctions arbitraires des équations aux dérivées partielles (32) et (34).

Cette solution nous sera donnée par les formules (36); on peut d'ailleurs en donner une vérification.

Remarque. — La solution particulière $f''(\xi) = -1$ nous donne la surface d'Enneper :

$$\begin{cases} x + iy = \dfrac{(\alpha - i\beta)^3}{3} - (\alpha + i\beta), \\ z = \alpha^2 - \beta^2, \end{cases}$$

que l'on peut déduire directement des équations aux dérivées partielles où l'on suppose

$$\frac{dx}{d\beta} - \frac{dy}{d\alpha} = 0.$$

La solution particulière qui correspond à $f'''(\xi) = \frac{1}{\xi^2}$ nous donne

les égalités

$$\begin{cases} x = -\alpha \dfrac{1 - \alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \\ y = \beta \dfrac{1 - \alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \\ z = -2 + \log(\alpha^2 + \beta^2) \end{cases}$$

Cette surface n'est autre que l'alysséïde; on pourrait la déduire des équations aux dérivées partielles où l'on suppose

$$\frac{dx}{d\beta} + \frac{dy}{d\alpha} = 0.$$

Ainsi les solutions particulières du système des équations (32) et (34) qui correspondent aux conditions

$$\frac{dx}{d\beta} \pm \frac{dy}{d\alpha},$$

nous donnent deux surfaces minima : l'une algébrique (Enneper); l'autre transcendante (caténoïde).

22. II. *Projections de Mercator.* — Au point M de la sphère on fait correspondre dans le plan le point de coordonnées

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + v, \qquad \beta = -\log \cot \frac{u}{2}.$$

A l'aide de ces nouvelles variables α et β, nous avons

$$c = \frac{-\sin\alpha}{\cos i\beta}, \qquad c' = \frac{\cos\alpha}{\cos i\beta}, \qquad c'' = i \operatorname{tang} i\beta$$

Les conditions (30) et (31), qui expriment que la surface (M) est une surface minima, nous donnent les deux nouvelles équations aux dérivées partielles :

$$(37) \qquad \begin{cases} \cos\alpha \dfrac{dy}{d\beta} - \sin\alpha \dfrac{dx}{d\beta} = -i \operatorname{tang} i\beta \left(\cos\alpha \dfrac{dx}{d\alpha} + \sin\alpha \dfrac{dy}{d\alpha} \right), \\ \cos\alpha \dfrac{dy}{d\alpha} - \sin\alpha \dfrac{dx}{d\alpha} = -i \operatorname{tang} i\beta \left(\cos\alpha \dfrac{dx}{d\beta} + \sin\alpha \dfrac{dy}{d\beta} \right) \end{cases}$$

Ces équations sont linéaires, et leur intégrale générale, avec deux

fonctions arbitraires, nous sera donnée par la formule de Ribaucour :

$$x + iy = \frac{e^{i\varphi}}{2}(-iF + F'') + \frac{e^{-i\varphi_1}}{2}(-iF_1' + F_1'');$$
$$\varphi = \alpha - i\beta,$$
$$\varphi_1 = \alpha - i\beta.$$

Les solutions réelles correspondent aux fonctions $F(\varphi)$ et $F_1(\varphi_1)$ imaginaires conjuguées.

La coordonnée z est donnée par l'équation intégrable

$$\sin\alpha\, dx - \cos\alpha\, dy + i\sin i\beta\, dz = 0;$$

et l'on doit trouver

$$z = \frac{i}{2}(F - F'') - \frac{i}{2}(F_1 - F_1'').$$

CHAPITRE V.

Les congruences de courbes normales à une famille d'élassoïdes.

23. Soit une congruence de courbes, définie en coordonnées cartésiennes par les équations différentielles

$$(C_m) \qquad \frac{dx}{c} = \frac{dy}{c'} = \frac{dz}{c''}.$$

Nous désignons par (c, c', c'') les cosinus directeurs de la tangente à la courbe de la congruence, qui passe par un point $M(x, y, z)$; ce sont des fonctions données de ce point qui vérifient la relation

$$H = c^2 + c'^2 + c''^2 - 1 = 0.$$

Choisissons ces trois fonctions de manière à vérifier, quels que soient (x, y, z), la condition

$$I = c\left(\frac{\partial c'}{\partial z} - \frac{\partial c''}{\partial y}\right) + c'\left(\frac{\partial c''}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial z}\right) + c''\left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial c'}{\partial x}\right) = 0;$$

l'équation aux différentielles totales

$$E = c\,dx + c'\,dy + c''\,dz = 0$$

sera intégrable avec une constante arbitraire, et représentera une famille de surfaces orthogonales à toutes les courbes de la congruence.

Soit S la surface de la famille qui passe au point M; on peut calculer les rayons de courbure R_1 et R_2 de la surface S en ce point par les formules [1]

$$(38)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} = -\left(\dfrac{\partial c}{\partial x} + \dfrac{\partial c'}{\partial y} + \dfrac{\partial c''}{\partial z}\right), \\ \dfrac{1}{R_1 R_2} = \left(\dfrac{\partial c'}{\partial y}\dfrac{\partial c''}{\partial z} - \dfrac{\partial c''}{\partial y}\dfrac{\partial c'}{\partial z}\right) + \ldots \end{cases}$$

Elles permettent de déterminer soit les surfaces à courbure moyenne nulle, soit les surfaces à courbure totale constante.

Surfaces minima. — Donnons-nous trois fonctions de point c, c', c'', satisfaisant à la relation quadratique H, à la condition d'intégrabilité I, et, en outre, à l'identité

$$(39)\qquad \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c'}{\partial y} + \frac{\partial c''}{\partial z} = 0.$$

L'intégration possible de l'équation E nous donnera une famille de surfaces minima.

Nous nous proposons d'étudier les congruences de courbes trajectoires orthogonales de certaines familles de surfaces minima. La congruence générale est déterminée par les formules C_m où c, c', c'' sont trois fonctions de point satisfaisant aux conditions

$$H = 0, \qquad I = 0 \qquad \text{et à l'identité (39).}$$

1° Un élassoïde S, en tous les points duquel la somme des rayons de courbure est nulle, est une surface d'aire minima : Considérons, en effet, une famille d'élassoïdes et deux surfaces voisines S_1 et S_2 passant par un contour fixe; elles limitent un volume v et, si nous désignons par α, β, γ les cosinus directeurs de la normale extérieure à la surface limite σ, nous pourrons appliquer la formule relative à la divergence d'un flux,

$$\int_v \left(\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c'}{\partial y} + \frac{\partial c''}{\partial z}\right) dv = \int_\sigma (\alpha c + \beta c' + \gamma c'')\, d\sigma.$$

[1] Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques* (août 1911).

La première intégrale est nulle, d'après la relation (39), et la seconde se réduit à $S_1 - S_2$.

Il en résulte que si l'on considère une famille de surfaces quelconques passant par un contour, et si l'on écrit que la variation première de l'aire comprise à l'intérieur du contour est nulle, on trouve la condition (39).

Toutes les portions continues d'élassoïdes qui passent par un contour et font partie d'une même famille à un paramètre ont une aire égale.

Parmi toutes les surfaces d'une même famille passant par un contour et ayant des aires continues et finies à l'intérieur de ce contour, celle dont l'aire est minima est un élassoïde.

2° Découpons une surface S en petits rectangles par le double système de ses lignes de courbure; les normales aux extrémités de chacun de ces petits rectangles découpent sur une surface voisine S′ un nouvel élément dont l'accroissement d'aire, par rapport au précédent, est égal à

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) dn\, d\sigma.$$

Pour une surface d'aire minima, cette expression doit être nulle et l'on retrouve la condition caractéristique des élassoïdes d'avoir une courbure moyenne nulle.

Si l'on prenait une famille de surfaces minima et sur l'une d'elles une décomposition superficielle en petits éléments, chacun de ceux-ci pouvant être circonscrit par un contour rectangulaire formé de lignes de courbure, on pourrait appliquer la formule précédente. Il en résulte qu'un tube orthogonal, formé par les courbes de la congruence orthogonale à une famille de surfaces minima, découpe sur chacune de celles-ci des aires égales.

24. On peut, pour la détermination des surfaces minima, utiliser l'une ou l'autre des propriétés précédentes. Riemann considère la portion de surface qui repose sur un contour fixe et se déforme et se dilate infiniment peu; son aire σ devient $\sigma + \delta\sigma$ et il exprime que la première variation $\delta\sigma = 0$. Il trouve ainsi que la surface S doit satisfaire à la condition

$$\frac{d}{dx}(\sin u \cos v) + \frac{d}{dy}(\sin u \sin v) = 0.$$

u et v étant les paramètres géographiques qui définissent la direction de la normale extérieure au point $M(x, y, z)$.

Le point $m(c, c', c'')$ est l'image sphérique du point M, et l'on a

$$c = \sin u \cos v, \qquad c' = \sin u \sin v, \qquad c'' = \cos u,$$

v azimut et u colatitude.

Si l'on a pris x et y comme variables indépendantes, la condition trouvée par Riemann s'écrit

$$\frac{dc}{dx} + \frac{dc'}{dy} = 0. \tag{40}$$

La surface S étant donnée sous la forme

$$z = \text{fonct.}(x, y), \qquad dz = p\,dx + q\,dy,$$

l'égalité précédente n'est autre que celle de Lagrange :

$$\frac{d}{dx}\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \frac{d}{dy}\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = 0.$$

Supposons que l'équation de la surface minima soit $F(x, y, z) = 0$; nous aurons

$$c = n\frac{\partial F}{\partial x}, \qquad c' = n\frac{\partial F}{\partial y}, \qquad c'' = n\frac{\partial F}{\partial z},$$

$$n\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} = 1.$$

La relation E est identiquement satisfaite, et nous avons

$$\frac{dc}{dx} = \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{c}{c''}\frac{\partial c}{\partial z}; \qquad \frac{dc'}{dy} = \frac{\partial c'}{\partial y} - \frac{c'}{c''}\frac{\partial c'}{\partial z}.$$

Ajoutons ces deux égalités et tenons compte de la relation différentielle

$$c\frac{\partial c}{\partial z} + c'\frac{\partial c'}{\partial z} + c''\frac{\partial c''}{\partial z} = 0,$$

nous retrouvons la condition (39), obtenue en considérant une surface minima comme faisant partie d'une famille de surfaces orthogonales à une congruence de courbes C_m.

On voit que, si une surface de la famille $F(x, y, z) = \text{const.}$ jouit de la propriété d'aire minima, toutes les autres de la même famille sont aussi des surfaces minima.

Si l'on pose

$$X = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial Z}{\partial z},$$

$$X_x = \frac{\partial X}{\partial x}, \qquad \ldots, \qquad Y_x = \frac{\partial Y}{\partial x}, \qquad \ldots, \qquad Z_x = \frac{\partial Z}{\partial x} \qquad \ldots,$$

la condition (39) pourra s'écrire

$$(41) \qquad \Sigma X^2 (Y_y + Z_z) - \Sigma YZ (Y_z + Z_y) = 0.$$

Nous utiliserons dans la recherche des surfaces minima les plus simples l'une des formules (39), (40) ou (41).

23. *Surface de Scherk.* — En prenant x et y comme variables indépendantes, le choix de la congruence C_m, qui se présente naturellement à l'esprit, consiste à poser

$$\frac{c}{f(x)} = \frac{c}{\varphi(y)} = \frac{c''}{1}.$$

L'équation E est tout de suite intégrée et donne

$$z = F(x) + F(y).$$

Formons la condition (40) qui s'applique au cas où l'on envisage z comme fonction explicite de x et y; nous trouvons, en tenant compte de la relation H, et après simplification,

$$(1 + f^2)\frac{d\varphi}{dy} + (1 + \varphi^2)\frac{df}{dx} = 0,$$

qu'on peut écrire

$$\frac{\frac{df}{dx}}{1 + f^2} = \frac{\frac{d\varphi}{dy}}{1 + \varphi^2} = a.$$

Pour satisfaire identiquement à cette égalité, il faudra poser

$$\frac{df}{dx} = a(1 + f^2), \qquad \frac{d\varphi}{dy} = -a(1 + \varphi^2),$$

a étant une constante. Il en résulte les expressions

$$f = -\cot ax, \qquad \varphi = \cot ay$$

et, par suite,

$$dz = (\cot ax)\,dx - (\cot ay)\,dy;$$

d'où, en intégrant

$$e^{az} = \frac{\sin ax}{\sin ay} \quad \text{(Scherk)};$$

on voit que c'est la seule surface minima qui satisfasse à l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 0.$$

a étant un paramètre, nous avons une famille d'élassoïdes semblables. La congruence (C_m) correspondante est déterminée par les équations

$$\frac{dx}{-\cot ax} = \frac{dy}{\cot ay} = \frac{dz}{\sqrt{1 - \cot^2 ax - \cot^2 ay}}.$$

Toutes les courbes de cette congruence sont orthogonales aux élassoïdes de Scherk, déduits de l'un d'eux par une translation parallèle à Oz.

L'étude de cette congruence comme celle des congruences (C_m) qui suivront ne peut être faite dans ce travail d'ensemble; elle fera l'objet de nouvelles recherches. On voit tout de suite une intégrale

$$\frac{\cos ay}{\cos ax} = \text{const.};$$

la deuxième s'en déduirait par quadrature en substituant, dans l'expression du radical, $\cot ay$ par sa valeur en fonction de $\cot ax$, déduite de la relation précédente.

26. *Surface minima réglée.* — Considérons toutes les courbes (C) telles que la tangente en un point M soit dans un plan parallèle à l'axe Oz et que son inclinaison sur cet axe ne dépende que de la distance du point M à l'axe. Les cosinus directeurs de la tangente MT pourront s'écrire

$$c = \frac{ay}{f(\rho)}, \qquad c' = \frac{-ax}{f(\rho)}, \qquad c'' = \frac{\sqrt{f^2 - a^2\rho^2}}{f(\rho)}, \qquad \rho^2 = x^2 + y^2.$$

La relation (39) est toujours satisfaite; de sorte que l'ensemble des courbes (C) pourra, par le choix convenable de la fonction indéterminée $f(\rho)$, former une congruence (C_m). Il suffit d'exprimer que la condition d'intégrabilité $I = 0$ est réalisée; on trouve ainsi l'équation

différentielle linéaire

$$\frac{d.f^2}{d\rho} = \frac{4}{\rho} f^2 - 2a^2\rho;$$

on en déduit

$$f(\rho) = \rho\sqrt{a^2 - m^2\rho^2}.$$

La famille de surface minima correspondante est donnée par l'intégration de l'expression E, qui donne

$$mz = a \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{x} + \text{const.}$$

Elle représente un hélicoïde gauche à plan directeur ayant pour axe Oz.

Une courbe (γ) orthogonale à une courbe (C) vérifie la condition différentielle

$$a\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} - \frac{\sqrt{f^2 - x^2 z^2}}{z^2}\,dz = 0,$$

qui peut toujours s'intégrer à l'aide d'une fonction arbitraire,

$$(\gamma) \qquad \begin{cases} \Phi(z) = a - a \operatorname{arc\,tang} \dfrac{y}{x}, \\ \Phi(z) = \dfrac{\sqrt{f^2 - x^2 z^2}}{z^2}. \end{cases}$$

Si l'on écrit que la condition I est satisfaite, on trouve, d'après ce qui précède, qu'il faut prendre $\Phi'(z) = m$. Ainsi les courbes (γ) forment un ensemble minima dépendant d'une fonction arbitraire; elles ne pourront engendrer une surface minima que si la fonction Φ a la forme linéaire en z. Dans ce cas, nous avons une double infinité de courbes (γ_m) déterminant une famille de surfaces minima réglées et trajectoires orthogonales des courbes d'une congruence (C_m).

Celle-ci sera déterminée par les équations différentielles

$$\frac{dx}{ay} = \frac{dy}{-ax} = \frac{dz}{mz^2},$$

d'où l'on déduit facilement

$$mz + a \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} = \text{const.}, \qquad x^2 + y^2 = \text{const.}$$

Ces équations représentent des hélices de même pas, tracées sur des cylindres de révolution d'axe Oz.

Si l'on enroule sur un cylindre un réseau plan formé de droites rectangulaires, on obtient un système de courbes γ_m et C_m. En prenant les hélices γ_m de même pas, placées sur des cylindres différents, on engendre une surface minima réglée.

La congruence (C_m), formée d'hélices de même pas, ne présente rien de particulier.

Remarquons que, si l'on fait tourner autour de Oz un hélicoïde gauche à plan directeur, ou surface de vis à filet carré, la surface coïncide avec elle-même et la famille de surfaces minima qui résulte de la translation de l'une d'elles, suivant Oz, donne la multiplication des spires.

Rappelons que la surface de vis à filet carré est la seule surface minima réglée (Catalan).

C'est aussi la seule surface minima réelle qui puisse coïncider avec la surface moyenne d'une congruence isotrope (Ribaucour).

27. *Surface minima de révolution.* — Prenons l'axe de révolution pour axe des x; la normale MN au point $M(xyz)$ a ses cosinus directeurs proportionnels à $(x-\xi, y, z)$: la sous-normale $PN = \xi - x$ est une fonction de l'ordonnée $PM = \rho\sqrt{y^2+z^2}$.

Cette fonction dépend de la méridienne que nous nous proposons de déterminer. Nous aurons donc à considérer la congruence de courbes définies par

$$c' = \frac{y}{f(\rho)}, \qquad c'' = \frac{z}{f(\rho)}, \qquad c = \frac{\sqrt{f^2(\rho)-\rho^2}}{f(\rho)}.$$

Ici, l'équation E est toujours intégrable et nous donne

$$x = -\int \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{f^2(\rho)-\rho^2}}.$$

Il nous reste à déterminer la fonction $f(\rho)$, de manière à vérifier la condition (39); nous trouvons

$$f(\rho) = \frac{-\rho^2}{a}.$$

L'équation précédente nous donne, en effectuant la quadrature,

$$\rho = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x-x_0}{a}} + e^{-\frac{x-x_0}{a}}\right) \qquad \text{(chaînette)}.$$

Le caténoïde est donc la seule surface minima de révolution. Nous obtenons ainsi une famille de surfaces minima engendrées par des chaînettes égales et de même axe Ox; leur équation différentielle est

$$dx + \frac{a\,d\rho}{\sqrt{\rho^2 - a^2}} = 0.$$

Les courbes de la congruence (C_n) correspondante sont données par les équations

$$\frac{dx}{\rho\sqrt{\rho^2 - a^2}} = \frac{dy}{ay} = \frac{dz}{az}$$

que l'on peut écrire

$$y\,dz - z\,dy = 0, \qquad dz = \frac{a\,dx}{\sqrt{\rho^2 - a^2}}.$$

Ce sont les trajectoires orthogonales des chaînettes résultant de la translation de l'une d'elles suivant la direction de leur axe Ox.

Le sommet A de la chaînette méridienne située dans le plan des xy est à une distance a de l'axe de révolution. L'équation différentielle trouvée peut s'écrire

$$dx + \frac{a\,dy}{\sqrt{y^2 - a^2}} = 0 \qquad \text{ou} \qquad y'^2 = a^2(1 + y'^2), \qquad y' = \frac{dy}{dx};$$

elle permet de vérifier qu'au point M les rayons de courbure sont égaux et de signes contraires.

L'équation différentielle des trajectoires orthogonales à ces diverses méridiennes s'écrit

$$a\,dx = \sqrt{y^2 - a^2}\,dy;$$

on peut intégrer et l'on trouve

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y}{a}\sqrt{\frac{y^2}{a^2} - 1} - \log\left(\frac{y}{a} + \sqrt{\frac{y^2}{a^2} - 1}\right).$$

La congruence (C_m) est donc formée de ces courbes qui se

déduisent de l'une d'elles par une translation suivant la direction Ox et une rotation autour du même axe Ox.

Remarque. — Si les rayons de courbure, au lieu d'être liés par la relation $R_1 + R_2 = 0$, étaient liés par la suivante $R_1 R_2 = -a^2$, nous aurions à satisfaire à la deuxième expression (38) et la détermination de $f(\rho)$ nous donnerait la méridienne d'une famille de surfaces à courbure constante négative. Nous obtiendrons ainsi l'équation différentielle

$$\frac{a^2\,df}{a^2 f + f^3} = \frac{d\rho}{\rho},$$

d'où l'on déduit, avec la constante d'intégration α,

$$f(\rho) = \frac{\alpha\rho}{\sqrt{\alpha^2 - \rho^2}}.$$

L'équation de la méridienne est

$$dx = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \rho^2}}{\sqrt{(a^2 - \alpha^2) + \rho^2}}\,d\rho.$$

Pour $\alpha = a$, nous obtenons l'équation

$$dx = \frac{-d\rho}{\rho}\sqrt{\alpha^2 - \rho^2}$$

qui caractérise la développante de la chaînette.

Les courbes de la congruence particulière que nous avons utilisée vérifient la relation

$$dx = \frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}$$

qui définit une famille de cercles de même rayon a ayant leurs centres sur l'axe des x.

Il en résulte que la développante précédente est la courbe aux tangentes égales : la tangente étant limitée au point M et à l'axe Ox; $MI = a$, rayon constant des cercles orthogonaux. On peut vérifier géométriquement que pour cette nouvelle méridienne $R_1 R_2 = -a^2$.

Nous avons trouvé pour celle-ci l'équation différentielle

$$dx^2 = d\rho^2\,\frac{a^2 - \rho^2}{(a^2 - \alpha^2) + \rho^2},$$

son élément linéaire est donné par

$$du^2 = dx^2 + dz^2 = \frac{a^2\,dz^2}{a^2 - z^2 + z^2}.$$

On déduit

$$z = \operatorname{Ch} u = \frac{z + a}{2} e^{\frac{u}{a}} + \frac{z - a}{2} e^{-\frac{u}{a}}.$$

L'élément linéaire de la surface de révolution est

$$ds^2 = du^2 + \rho^2\,dv^2.$$

Pour $\alpha = a$, il prend la forme

$$ds^2 = du^2 + a^2 e^{\frac{2u}{a}}\,dv^2,$$

caractéristique de la surface pseudosphérique.

28. *Surface minima passant par deux cercles dont les axes sont parallèles.* — La même méthode nous permettrait d'obtenir les surfaces de révolution à courbure moyenne constante. L'équation de la méridienne, déduite de la congruence des trajectoires orthogonales, montre que cette courbe peut être engendrée, soit par une ellipse constante, soit par une hyperbole de grandeur fixe qui roule sur l'une de ses tangentes Ox.

Prenons deux cercles de centres O et O′, dont les plans sont parallèles. Si la ligne des centres OO′ est perpendiculaire aux plans des deux cercles, il existe une surface à courbure moyenne constante qui passe par les deux circonférences; c'est une surface de révolution ayant pour méridienne une courbe de Delaunay, et qui peut avoir l'une des trois formes (onduloïde, nodoïde, caténoïde). Celle-ci est une surface minima.

Nous nous proposons de déterminer la surface minima plus générale qui passe par les deux cercles dont les plans parallèles sont obliques à leur ligne des centres, et d'en déduire certaines considérations géométriques.

Nous prenons comme axe Ox la direction commune des axes des deux cercles et comme plan des xy celui qui contient la ligne des centres OO′.

Avec deux anneaux en fil de fer, trempés dans le liquide glycérique, on peut réaliser physiquement la surface cherchée; pour des raisons

de continuité géométrique et mécanique, il en résulte que tout plan perpendiculaire à Ox donnera une section circulaire dont le centre sera dans le plan des xy. La surface est donc symétrique par rapport à ce plan et son équation aura la forme

$$F = [y + \alpha(x)]^2 + z^2 + \beta(x) = 0.$$

Nous poserons

$$\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \qquad \beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \qquad \gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

et nous appliquerons, avec les notations indiquées, la forme (41) de la condition d'aire minima. Nous avons

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial F}{\partial x} = X = 2\alpha'(y+\alpha) + \beta', & \dfrac{\partial F}{\partial y} = Y = 2(y+\alpha), & Z = 2z \\ X_x = 2\alpha''(y+\alpha) + 2\alpha'^2 + \beta'', & Y_x = \alpha', & Z_x = 2\gamma, \\ X_y = 2\alpha', \quad X_z = 0; & Y_y = 2\alpha, \quad Y_z = 0; & Z_y = Z_z = 0. \end{array}\right.$$

Les dérivées des fonctions inconnues $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont désignées par des accents ; substituant dans la relations (41), il vient

$$4X^2 + 4[(y + \alpha)^2 + z^2][(X_y + \alpha) - X(\alpha + \alpha)] + \alpha[\beta' - 0] = 0,$$

ou bien

$$X[X - 2\alpha(y + \alpha)] - [(y + \alpha)^2 + z^2][(X_y + \alpha) - 0] = 0$$

et, en tenant compte de l'équation $F = 0$, il vient

$$\beta' X - \beta(X_y + \alpha) = 0.$$

Cette équation a la forme

$$A(x)y + B(x) = 0;$$

elle ne peut être identiquement nulle que si l'on a

$$(42) \qquad \left\{\begin{array}{l} A = \alpha\beta' + 2\alpha'\beta = 0, \\ B = \beta'(2\alpha\alpha' + \beta) - \beta(2\alpha\alpha'' + 2\alpha'^2 + \beta'') = 0 \end{array}\right.$$

Ces équations différentielles permettront de déterminer les fonctions α et β.

Elles sont vérifiées dans le cas particulier où l'on a

$$\alpha = 0, \qquad \beta = \beta_0 \quad (\beta_0 \neq 0).$$

On en déduit, en intégrant,

$$\beta = -a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{x - x_0}{a};$$

nous retrouvons l'équation du caténoïde,

$$F = y^2 + z^2 - a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{x - x_0}{a} = 0.$$

29. Dans le cas général, la première équation (42) nous donne

$$\frac{d\alpha}{dx} = -a\beta,$$

a nouvelle constante d'intégration ; et la deuxième équation nous montre que β doit satisfaire à l'équation différentielle du deuxième ordre

$$\beta \frac{d^2\beta}{dx^2} - \left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2 - 2\beta - 4a^2\beta^2 = 0.$$

Cette dernière équation peut s'écrire

$$\frac{\beta^2 d\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2 - \left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2 d(\beta^2)}{\beta^4} + \left(\frac{1}{\beta^2} + 4a^2\right) d\beta = 0.$$

On peut simplifier et intégrer ; en désignant par c une deuxième constante d'intégration, nous obtenons

$$\frac{\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^2} - 4a^2\beta = 8c;$$

on en déduit

$$dx = \frac{d\beta}{\sqrt{\beta - 2c\beta^2 - a^2\beta^3}}.$$

Le carré du rayon du cercle de section par un plan normal à Ox est

$$-\beta = u = R^2.$$

Posons

$$2c = \frac{1}{k^2},$$

avec ces nouvelles notations, nous avons, pour déterminer u et α, le

équations

$$(43)\qquad \frac{d\alpha}{dx} = au, \qquad dx = \frac{k\,du}{2\sqrt{u^2(a^2k^2u^2 + u + k^2)}}.$$

Remarque. — Dans le cas où $\alpha = 0$, la deuxième équation s'écrit

$$dx = \frac{k\,du}{2\sqrt{u}\sqrt{u + k^2}},$$

elle s'intègre facilement et nous donne

$$x - x_0 = k\log(\sqrt{u} + \sqrt{u + k^2}), \qquad u = R^2,$$

équation qui caractérise la chaînette d'axe Ox.

Dans le plan de symétrie $z = 0$, on a $\sqrt{u} = y$ et

$$dx = \frac{k\,dy}{\sqrt{y^2 + k^2}}.$$

Cette relation différentielle caractérise la courbe décrite par le foyer F d'une parabole qui roule sur l'axe Ox : en effet, si N est le point de contact ou centre instantané, la normale à cette courbe est FN ; φ étant l'angle (FN, Ox) on a

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{tang}\varphi.$$

Soit $FP = y$ l'ordonnée du point décrivant ; Ox étant une tangente à la parabole de foyer F, nous avons la relation intrinsèque

$$FN = \frac{\overline{FP}^2}{k} \qquad (k \text{ demi-paramètre}).$$

Il en résulte

$$\sin\varphi = \frac{FP}{FN} = \frac{k}{FP};$$

donc

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{k}{\sqrt{y^2 + k^2}},$$

équation différentielle de la chaînette.

30. Dans le cas général, le centre D du cercle générateur de rayon R décrit une courbe diamétrale (D) par rapport à la section de

la surface par le plan des xy. L'équation de cette section peut s'écrire

$$y = -\alpha(x) = R(x).$$

Dans le cas du caténoïde, il y a un cercle de gorge pour lequel le plan tangent est, en tous ses points, parallèle à la direction Ox. Sur la surface générale, il y aura aussi un cercle d'étranglement en tous les points duquel le plan tangent sera parallèle à une direction fixe du plan des xy. Cette intuition géométrique sera justifiée par ses conséquences.

Nous supposerons que ce cercle minima soit celui des yz; ce cercle C_0 ayant pour équation

$$y = -z^2 + \beta_1 y + \ldots + \beta_n y^n = R^2,$$

le plan tangent en un point quelconque de ce cercle sera parallèle à la droite $y = mx$, qui est la tangente du point O à la courbe (D).

En chaque point du cercle C_0, $\frac{dR}{dx}$ et $\frac{du}{dx}$ sont nuls, et si l'on se reporte aux équations (43), on voit que l'on devra avoir

$$m = a u_0, \qquad k^2 = \frac{u_0}{1 + a^2 u_0}.$$

Remplaçons, dans ces équations, u par R^2, u_0 par R_0^2, puis les constantes a et k par les valeurs ci-dessus; elles peuvent s'écrire

$$(44) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{dx} = -m\dfrac{R^2}{R_0^2}, & \alpha = 0, \\[2ex] \dfrac{dx}{R} = \dfrac{d\dfrac{R}{R_0}}{\sqrt{\left(1 + \dfrac{R^2}{R_0^2}\right)\left(1 + m^2\dfrac{R^2}{R_0^2}\right)}} \end{cases}$$

La deuxième, intégrée par les fonctions elliptiques, nous donnera le rayon R du cercle générateur et la première l'ordonnée y_1 de son centre, en fonction de la variable x.

Si nous posons, suivant l'usage,

$$k^2 = \frac{m^2}{1 + m^2}, \qquad k^2 = \frac{1}{1 + m^2}, \qquad \frac{k}{k} = -m.$$

nous aurons

$$\frac{i\,dx}{R_0 k} = \frac{d\frac{R}{R_0}}{\sqrt{\left(1 - \frac{R^2}{R_0^2}\right)\left(k^2 - k^2\frac{R^2}{R_0^2}\right)}};$$

c'est-à-dire en prenant la fonction inverse,

$$R = R_0 \operatorname{cn}\frac{ix}{R_0 k}. \tag{45}$$

Nous en déduisons l'équation de la courbe (D) :

$$\frac{dy_1}{dx} = m\frac{R^2}{R_0^2} = m\operatorname{cn}^2\frac{ix}{R_0 k},$$

ou, en intégrant

$$y_1 = mx - m\frac{R_0 k}{i}\int \operatorname{sn}^2\frac{ix}{R_0 k}\,d\left(\frac{ix}{R_0 k}\right);$$

avec la notation

$$Z(u) = k^2\int_{(0)}^{u} \operatorname{sn}^2 u\,du,$$

on obtient finalement

$$y_1 = mx - i\frac{R_0}{k}Z\left(\frac{ix}{R_0 k}\right). \tag{46}$$

Ces formules (45) et (46) résolvent le problème posé pour la première fois par Riemann [1].

Il reste à étudier la congruence (C_m) des trajectoires orthogonales aux surfaces minima $F(x, y, z) = \text{const.}$, et définie par les équations

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z},$$

$$X = -\frac{dy_1}{dx}(y - y_1) - R\frac{dR}{dx}, \qquad \frac{dy_1}{dx} = m\operatorname{cn}^2\frac{ix}{R_0 k},$$

$$Y = (y - y_1),$$

$$Z = z, \qquad F = (y - y_1)^2 + z^2 - R^2.$$

y_1 et R sont des fonctions connues de x données par les expressions (45) et (46). Celle-ci est l'équation de la courbe diamétrale (D) dont la forme caractérise la surface minima étudiée.

---

[1] Niewenglowski, *Thèse*, 1880, p. [illegible].

31. *Surfaces minima hélicoïdes.* — Nous allons, pour terminer, montrer comment la méthode indiquée au paragraphe **23** permet de trouver facilement les hélicoïdes qui sont des surfaces minima [1].

Prenons des coordonnées semi-polaires et considérons z comme fonction des variables indépendantes ρ et θ :

$$x = \rho\cos\theta, \qquad dx = \cos\theta\, d\rho - \rho\sin\theta\, d\theta;$$
$$y = \rho\sin\theta, \qquad dy = \sin\theta\, d\rho + \rho\cos\theta\, d\theta.$$

Proposons-nous de rechercher les surfaces minima telles que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\rho\,\partial\theta} = 0,$$

leur équation aura la forme

$$(47) \qquad Z = a(\rho) + F(\rho) = 0.$$

Exprimons les cosinus directeurs de la normale (c, c', c'') en fonction des nouvelles variables indépendantes ρ et θ; nous avons

$$c\,dx + c'\,dy - c''\,dz = 0$$

c'est-à-dire

$$c\,dz + (c\cos\theta + c'\sin\theta)\,d\rho + (-c\sin\theta + c'\cos\theta)\,\rho\,d\theta = 0,$$

et comme

$$dz = a\,d\rho + f\,d\rho = 0, \qquad f = F'(\rho),$$

nous devrons avoir les égalités

$$(48) \qquad \begin{cases} c\cos\theta + c'\sin\theta = f c'', \\ -c\sin\theta + c'\cos\theta = \dfrac{a}{\rho} c'', \\ c'^2\left(1 + f - \dfrac{a^2}{\rho}\right) = 1. \end{cases}$$

Elles déterminent c, c', c''. La condition d'aire minima (40), qui correspond aux variables indépendantes x et y, deviendra avec les nouvelles variables ρ et θ,

$$(49) \qquad \sin\theta\left(\frac{\partial c}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial c}{\partial\theta}\right) + \cos\theta\left(\frac{\partial c}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial c}{\partial\theta}\right) = 0.$$

---

[1] Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, p. 180.

Déduisons c et c' des relations (48), nous pourrons calculer

$$\frac{\partial c'}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial c}{\partial \theta} = c' \sin\theta \left(\frac{f}{\rho} + \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{c}{c'}\frac{\partial c'}{\partial \rho} + \frac{c' \sin\theta}{\rho^2}\frac{\partial a}{\partial \theta}$$

et aussi l'expression

$$\frac{\partial c}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial c'}{\partial \theta} = c' \cos\theta \left(\frac{f}{\rho} + \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{c}{c'}\frac{\partial c'}{\partial \rho} + \frac{c' \cos\theta}{\rho^2}\frac{\partial a}{\partial \theta}.$$

Il en résulte que la condition (49) devient, dans le cas étudié,

$$c'\left(\frac{f}{\rho} + \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + f\frac{\partial c'}{\partial \rho} + \frac{c'}{\rho^2}\cdot\frac{\partial a}{\partial \theta} = 0.$$

Cette identité devant être vérifiée, quels que soient ρ et θ, doit se décomposer en deux autres

$$(50) \qquad \frac{\partial a}{\partial \theta} = 0, \qquad \frac{f}{\rho} + \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{f}{c'}\frac{\partial c'}{\partial \rho} = 0.$$

La première nous montre que l'équation (47) peut s'écrire

$$Z = a + c + F(\rho),$$

a et c étant des constantes.

Il reste à calculer

$$F(\rho) = \int f(\rho)\,d\rho,$$

la deuxième équation (50) peut s'écrire

$$\frac{1}{\rho} + \frac{\frac{\partial f}{\partial \rho}}{f} + \frac{\frac{\partial c'}{\partial \rho}}{c'} = 0.$$

On peut l'intégrer, en introduisant une autre constante b,

$$\rho^2 f^2 = \frac{b^2}{c'^2} = b^2\left(1 + f^2 + \frac{a^2}{\rho^2}\right),$$

et, par suite,

$$f(\rho) = \frac{b\sqrt{a^2 - a^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + a^2}}\frac{a^2 + b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

nous avons

$$\int a^2 b \frac{d\rho}{\rho} \frac{1}{\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)}} = - a \operatorname{arc\,tang} \frac{b}{a} \frac{\sqrt{\rho^2 + a^2}}{\sqrt{\rho^2 - b^2}},$$

$$\int b \rho \, d\rho \frac{1}{\sqrt{(\rho^2 + a^2)(\rho^2 - b^2)}} = b \log(\sqrt{\rho^2 + a^2} + \sqrt{\rho^2 - b^2}).$$

En ajoutant, nous avons l'expression de $F(\rho)$, et les surfaces hélicoïdes minima ont la forme

$$(51) \quad Z = a\theta + c + a \operatorname{arc\,tang} \frac{b}{a} \frac{\sqrt{\rho^2 + a^2}}{\sqrt{\rho^2 - b^2}} - b \log(\sqrt{\rho^2 + a^2} + \sqrt{\rho^2 - b^2}).$$

Elles comprennent, comme cas particulier, la surface minima de révolution ($a = 0$), et la surface minima réglée ($b = 0$).

La section de la surface par un plan perpendiculaire à Oz est une courbe déterminée par la relation

$$\rho \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{b}{a} \frac{\sqrt{\rho^2 + a^2}}{\sqrt{\rho^2 - b^2}} = \operatorname{tang} V.$$

Désignons par φ l'angle de sa tangente avec l'axe des x, nous avons $\varphi = \theta + V$, et l'équation (51) s'écrit :

$$Z = a\varphi - b \log(\sqrt{\rho^2 + a^2} + \sqrt{\rho^2 - b^2}).$$

Sur les transformations des équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque à deux variables indépendantes;

PAR G. CERF,

Ancien Élève de l'École Normale.

INTRODUCTION.

1. Étant donnée une équation quelconque aux dérivées partielles du premier ordre, par une transformation de contact convenablement choisie, il est possible de ramener son intégration à celle d'une équation de même ordre immédiatement intégrable (¹). On ne possède aucune théorie permettant de procéder d'une façon analogue pour une équation d'ordre supérieur à l'unité : les transformations de contact prolongées $m-1$ fois sont les seules transformations réversibles portant sur les coordonnées d'élément d'ordre m, telles que toute multiplicité se change en une autre multiplicité (²); elles permettent parfois de ramener une équation à une forme plus simple (³), mais ces applications sont limitées en raison de ce que les propriétés d'où proviennent les principales difficultés du problème d'intégration des équations d'ordre supérieur à l'unité sont invariantes par rapport aux transformations de contact. Les divers modes de transformations de

(¹) GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, p. 289. Cet Ouvrage sera désigné par la notation I, les deux volumes de celui sur les équations du second ordre par II_1 et II_2.

(²) BACKLUND, *Math. Ann.*, t. IX, p. 297.

(³) GOURSAT, II_1, Chap. II.

ces équations que l'on connaît ([1]) ne réussissent que grâce à la forme particulière des équations auxquelles elles s'appliquent.

2. La recherche des transformations des équations aux dérivées partielles peut se rattacher à l'intégration des systèmes différentiels les plus généraux ([2]) : dans le travail qui va être présenté, il sera traité de transformations des équations à deux variables indépendantes que l'on déduit de l'étude des systèmes de quatre équations à deux inconnues z et z', fonctions de deux variables indépendantes, respectivement x, y et x', y' :

$$(1)\qquad \begin{cases} F_i(x', y', z', p_{10}, p_{11}, \ldots, p_{[illegible]}, [illegible], z, p_{[illegible]}, \ldots, p_{[illegible]}) = 0 \\ \qquad (m_i, m'; m, m; i = 1, 2, 3, 4); \end{cases}$$

il suffit, du reste, de légères modifications pour que les méthodes employées permettent d'étudier des systèmes plus généraux ([3]).

Le problème de l'intégration du système (1) peut s'énoncer de manière à généraliser le problème de Bäcklund ([4]) : déterminer un couple de surfaces (s) et (s'), l'une d'un espace (e), l'autre d'un espace (e'), entre lesquelles il soit possible de déterminer une correspondance ponctuelle telle que les coordonnées d'éléments d'ordre m de (s), d'ordre m' de (s'), en deux points correspondants satisfassent aux relations (1).

Aucune des surfaces (s) et (s') ne peut être prise arbitrairement; chacune d'elles doit être choisie parmi les intégrales d'un ou plusieurs systèmes en involution; il arrive que certains de ces systèmes se réduisant à une seule équation, les relations (1) permettent de définir une ou plusieurs transformations entre deux équations, l'une à l'inconnue z, l'autre à l'inconnue z'.

3. La méthode que nous emploierons, dans cette recherche, s'appuie

---

([1]) Pour le second ordre, voir Goursat, II, Chap. IX.

([2]) Goursat, II, p. 293. — Delassus, *Ann. Ec. Norm.*, 3e série, t. XIV, p. 538. — Gau, *C. R. Acad. Sc.*, t. 156, p. 110.

([3]) Même de systèmes où les fonctions dépendent de plus de deux variables indépendantes.

([4]) Goursat, *C. R. Acad. Sc.*, t. 167, p. 547.

sur les résultats suivants, qui sont nouveaux, sauf le premier, relatifs à l'intégration d'un système de deux équations aux dérivées partielles à une inconnue [1].

Soient deux équations d'ordres m et M, $m \leq$ M :

$$(2) \qquad \begin{cases} f(x, y, z, p_{10}, \ldots, p_{m0}) = 0, \\ F(x, y, z, p_{00}, \ldots, p_{M0}) = 0. \end{cases}$$

Posons

$$[f, F]^{(2)} = \sum_{i=0}^{m} \frac{\partial f}{\partial p_{m-i,i}} \left(\frac{d^{m} F}{dx^{m-i} dy^{i}} \right) - \sum_{i=0}^{i=M} \frac{\partial F}{\partial p_{M-i,i}} \left(\frac{d^{M} f}{dx^{M-i} dy^{i}} \right).$$

Formons le système (A) comprenant les équations (2) et celles qu'on en déduit par différentiations, jusque et y compris celles d'ordre $m + M - 1$ en z : si les équations (2) n'ont pas de direction commune de caractéristiques, c'est-à-dire si le résultant D des équations algébriques qui déterminent leurs directions de caractéristiques n'est pas nul, soit identiquement, soit comme conséquence algébrique de (A), ce système admet comme condition de complète intégrabilité la relation (3) :

$$(3) \qquad [f, F] = 0.$$

Supposons que les équations (2) admettent r directions communes de caractéristiques; et représentons par D^r les conditions qui l'expriment : elles sont satisfaites soit identiquement, soit comme conséquence algébrique de (A). Au moyen de différentiations et d'éliminations, il est possible de former un système B^r qui admette (3) comme condition de complète intégrabilité; la forme de ce système ne dépend pas uniquement de m, M et r. Comme circonstance exceptionnelle, il arrive que les calculs fassent apparaître une relation non identique entre x et y.

Dans bien des cas, les premiers membres des équations (2)

---

[1] Une partie de ces résultats se trouve exposée dans une Note parue aux *C. R. Acad. Sc.*, t. 162, p. 55[illegible].

[2] Cette expression avait été considérée précédemment par Cauchy, *Proc. of the London Math. Soc.*, t. XXI, p. 18[illegible], pour des équations à un nombre quelconque de variables indépendantes.

contenant des fonctions indéterminées par exemple, on ne peut effectuer jusqu'au bout les éliminations nécessaires pour la formation du système B^r ($r = 0, 1, \ldots, m$, le cas où $r = 0$ correspond à A); on peut cependant former un système C^r dont les relations, convenablement résolues, donneraient le système B^r : la condition d'intégrabilité de B^r est satisfaite si (3) est conséquence algébrique de C^r.

Il n'est pas nécessaire que les équations (2) possèdent r directions communes de caractéristiques pour qu'on puisse former le système C^r, puis le résoudre suivant le schéma fourni par B^r; admettons qu'elles en possèdent moins de r qui leur soient communes et que les relations D^r et (3) soient conséquences algébriques de C^r : le système B^r correspondant est alors complètement intégrable; il fournit des solutions singulières du système (2) engendrées par des caractéristiques communes à ses deux équations appartenant à r familles différentes. On est assuré qu'il en est ainsi, si l'on sait, *a priori*, que ce système B^r est possible et admet un groupe de transformations de contact dont l'ordre est un nombre égal à celui de ses dérivées paramétriques; cela suppose, bien entendu, que la solution générale de ce système dépend de constantes en nombre fini.

Nous avons mis ainsi en évidence certains cas d'intégrabilité des équations (2), ce ne sont évidemment pas les seuls qui peuvent se présenter.

Nous supposons toujours, comme on est obligé de le faire dans ce genre de questions, que les calculs qui sont effectués à un moment quelconque ne sont pas en contradiction avec ceux qui précèdent.

4. Soit (s) une surface de (σ) d'équation $z = g(x, y)$; surlignons d'un trait le symbole d'une expression pour indiquer que nous y remplaçons $z, p_{10}, p_{01}, \ldots$ par $g, g_x, g_y, \ldots$. A (s) correspondent des surfaces $(\bar{s})$ si les deux équations (4)

$$(4) \qquad \Psi = 0, \qquad \Phi = 0,$$

obtenues par l'élimination de x et y entre les quatre relations ($\bar{1}$), admettent des solutions communes. Par différentiations et éliminations, on peut déduire des relations (1) un système Γ^r ($r = 0, 1, \ldots, m$) tel que $\overline{\Gamma^r}$ soit équivalent au système C^r construit en partant des relations (4), puis des relations H^r et $K = 0$, telles que H^r et $K = 0$ soient équivalentes aux conditions D^r et $|\Psi, \Phi| = 0$ relatives à (4), en tenant compte

algébriquement de $\overline{\Gamma^r}$. Supposons que celles des relations H^r qui ne sont pas identiquement satisfaites soient conséquences algébriques de Γ^r : si $K = 0$ est équivalente, en tenant compte algébriquement de Γ^r, à une relation

$$U = 0 \tag{5}$$

ne contenant que x, y, z et ses dérivées jusqu'à un certain ordre, on obtient une équation aux dérivées partielles en z dont les intégrales permettent de déterminer par l'intégration du système B^r qui correspond à chacune d'elles des solutions du problème de Bäcklund relatif au système (1). Il est possible de former cette équation (5), si ce dernier système est invariant par rapport à un groupe de transformations de contact de l'espace (e^r) dont l'ordre est un nombre égal à celui des dérivées paramétriques de B^r, y compris le cas où ce nombre est nul, les conditions relatives aux H^r étant supposées satisfaites.

3. Il ne paraît pas possible d'indiquer un procédé régulier pour former toutes les transformations qu'on peut déduire des systèmes (1) : on verra, par la suite, qu'on peut en trouver un grand nombre. En s'appuyant sur les résultats généraux que nous venons d'esquisser, on trouve des transformations intéressant, en particulier, des équations admettant un groupe continu de transformations de contact (équations linéaires comprises); au fur et à mesure que l'ordre des équations s'élève, l'ampleur de ces applications diminue par rapport à la généralité des équations de l'ordre considéré : des équations d'ordre p admettant une famille de caractéristiques $(p-1)^{\text{ième}}$ se comportent toutefois à peu près comme celles du second ordre à caractéristiques quelconques.

Supposons que deux des équations (1), au moins, soient d'ordre m en z' ; les équations (4) sont alors d'ordre m : on obtient de nouveaux résultats en recherchant s'il est possible que le système (4) admette des solutions singulières engendrées de m' façons par des caractéristiques appartenant aux m' familles des deux équations. Il faut pour cela que les déterminants déduits de la matrice

$$\left\| \left(\frac{dF_i}{dx^j}\right) \quad \left(\frac{dF}{dy}\right) \quad \frac{dF}{dp_{m-1}} \quad \cdots \quad \frac{dF}{dp} \right\|_{(i=1,\ldots,n)}$$

soient nuls comme conséquences algébriques de (11). Ces conditions

étant satisfaites, le système (1) est équivalent à un système (I) où une des relations peut être prise arbitrairement, les trois autres étant assujetties à certaines conditions. Si $m' = 1$, on retrouve des transformations de surfaces indiquées par Bäcklund; on peut certainement former l'équation (5); si $m' > 1$, pour que cette équation existe, il faut que des conditions supplémentaires soient remplies, mais qui sont plus simples que pour un système quelconque d'ordre m' en z'.

Lorsque trois des conditions (1) satisfont aux conditions dont nous venons de parler, on est conduit à rechercher ce qui se passe lorsque l'on complète le système par une certaine relation d'ordre $m' + 1$ en z', déduite des trois premières :

$m' = m = 1$, on trouve des transformations qui changent des équations du deuxième ordre appartenant à une classe très générale en équations du deuxième ordre admettant une famille au moins de caractéristiques du premier ordre; les équations qui possèdent une seule transformation infinitésimale de contact appartiennent à cette classe ;

$m' = 1$, $m = 2$: on est conduit à des transformations d'équations du troisième ordre admettant des caractéristiques d'ordre 1, 2 ou 3;

$m' = 2$, $m = 1$: les transformations obtenues intéressent des équations du troisième ordre qui possèdent des caractéristiques du premier ou du deuxième ordre, etc.

Le travail dont l'exposé va suivre est divisé en trois Chapitres.

La théorie générale relative au système (2) est exposée dans le premier, après quelques remarques sur le système de deux équations du premier ordre à une inconnue.

Dans le Chapitre II, les résultats du précédent sont appliqués au système (1), en commençant par le cas où deux de ses relations sont $r = s$, $t = s$.

Enfin le dernier Chapitre est consacré spécialement aux transformations de surfaces de Bäcklund et, en particulier, à l'étude des cas singuliers de ces transformations.

Il me reste à exprimer à M. Goursat mes sentiments de profonde reconnaissance pour la bienveillance qu'il m'a constamment témoignée et pour les conseils et les encouragements qu'il m'a adressés au cours de ces recherches.

CHAPITRE I.

SUR QUELQUES PROPOSITIONS RELATIVES A LA RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

Étant données deux équations du premier ordre à une fonction inconnue z de deux variables indépendantes x et y :

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} F(x, y, z, p, q) = 0, \\ G(x, y, z, p, q) = 0, \end{cases}$$

elles peuvent admettre une intégrale commune qui constitue une solution singulière de leur système et qu'il peut être avantageux, pour des raisons que nous ferons apparaître, de mettre en évidence.

Posons

$$\Delta = F_p G_q - F_q G_p.$$

Supposons que

$$(\mathrm{II})\qquad \Delta = 0$$

ne soit pas conséquence algébrique de (I); les trois relations (I) et (II) déterminent ∞^2 éléments du premier ordre; si ces éléments sont ceux d'une surface, celle-ci représente l'intégrale que nous avons en vue. En général, il n'en est pas ainsi; on trouve aisément des conditions nécessaires pour que cette circonstance se présente.

Toute solution de (I) satisfait aux équations obtenues en différentiant les équations de ce système

$$(\mathrm{III})\qquad \begin{cases} \dfrac{dF}{dx} = F_p t + F_q s + \left(\dfrac{dF}{dz}\right) = 0, & \dfrac{dG}{dx} = G_p t + G_q s + \left(\dfrac{dG}{dz}\right) = 0, \\ \dfrac{dF}{dy} = F_p s + F_q t + \left(\dfrac{dF}{dz}\right) = 0, & \dfrac{dG}{dy} = G_p s + G_q t + \left(\dfrac{dG}{dz}\right) = 0. \end{cases}$$

Si la solution considérée satisfait aussi à (II), on déduit des relations (III), en supposant $F_p . G_p \neq 0$,

$$(\mathrm{IV})\qquad \begin{cases} F_p\left(\dfrac{dG}{dx}\right) - G_p\left(\dfrac{dF}{dx}\right) = 0, \\ F_p\left(\dfrac{dG}{dy}\right) - G_p\left(\dfrac{dF}{dy}\right) = 0. \end{cases}$$

Toute solution commune aux équations (I) et (II) est solution des équations (IV), c'est-à-dire que les relations (I), (II) et (IV) doivent être algébriquement compatibles en z, p, q pour qu'une telle solution existe.

Ceci n'est valable que si $F_p.G_p \neq 0$. Si $F_p.G_p = 0$ est compatible avec les relations (I) et (II), différents cas peuvent se présenter. Supposons d'abord $F_p = 0$; d'après (II)

$$F_q G_p = 0;$$

si $F_q = 0$, nous sommes amenés à considérer le cas où l'équation $F = 0$ admet une solution singulière, qui est intégrale de $G = 0$; si $F_q \neq 0$, on a $G_p = 0$: ou $G_q = 0$, et alors c'est $G = 0$ qui admet une solution singulière, solution de $F = 0$; ou $G_q \neq 0$, et des relations (III) on déduit

$$(\mathrm{IV}) \quad \begin{cases} F_q\left(\dfrac{dG}{dx}\right) - G_q\left(\dfrac{dF}{dx}\right) = 0, \\ F_q\left(\dfrac{dG}{dy}\right) - G_q\left(\dfrac{dF}{dy}\right) = 0, \end{cases}$$

analogues aux relations (IV); nous supposerons dans la suite, sauf indications contraires, sans nuire à la généralité, que

$$F_p G_q \neq 0.$$

Nous allons montrer que la condition nécessaire que nous venons d'établir est en général suffisante :

Soient $Z(x, y)$, $P(x, y)$, $Q(x, y)$, trois expressions qui, substituées à z, p, q satisfont identiquement aux relations (I), (II) et (IV); de plus elles vérifient l'inéquation $\delta = F_p G_q - F_q G_p \neq 0$; il en résulte que

$$P = \frac{\partial Z}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial Z}{\partial y},$$

et par suite que $z = Z(x, y)$ représente une solution du système (I).

En effet, par hypothèse, on a

$$F(x, y, Z, P, Q) = 0,$$
$$G(x, y, Z, P, Q) = 0;$$

par suite

$$F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dZ + F_p\,dP + F_q\,dQ = 0,$$
$$G_x\,dx + G_y\,dy + G_z\,dZ + G_p\,dP + G_q\,dQ = 0,$$

où, par exemple,

$$F_z = \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, Z, P, Q).$$

Comme on a également

$$F_p(x, y, Z, P, Q)\,G_q - F_q G_p = 0 \quad \text{et} \quad F_z G_p = 0,$$

il vient

$$(F_p G_x - F_x G_p)\,dx + (F_p G_y - F_y G_p)\,dy + (F_p G_z - F_z G_p)\,dZ = 0$$

et, en tenant compte des relations (IV), qui donnent

$$F_p(G_y + PG_z) - G_p(F_x + PF_z) = 0, \qquad F_p(G_y + QG_z) - G_p(F_y + QF_z) = 0,$$

on obtient

$$(F_p G_z - F_z G_p)(dZ + P\,dx - Q\,dy) = 0.$$

Comme

$$F_p G_z - F_z G_p \neq 0,$$

on a

$$dZ + P\,dX + Q\,dY = 0.$$

La solution qui peut être ainsi déterminée est une solution singulière; elle jouit de la propriété d'être engendrée par des caractéristiques communes aux deux équations (I) puisque, sur cette intégrale, $\delta = 0$.

Elle peut être l'unique solution du système, mais elle peut aussi coexister avec d'autres. Si les deux équations (I) sont en involution, elles admettent des solutions communes dépendant d'une constante arbitraire; lorsque ces surfaces intégrales admettent une enveloppe, elle constitue la solution singulière : les caractéristiques (au sens de la théorie des enveloppes) sont des caractéristiques pour chacune des équations aux dérivées partielles.

Il est très facile de donner des exemples : soit $f(x, y, z, a) = 0$ l'équation d'une famille de surfaces dépendant d'un paramètre arbitraire a, la fonction f étant telle que ces surfaces admettent une enveloppe.

L'élimination de a entre

$$f = 0, \qquad f_x + p f_z = 0, \qquad f_y + q f_z = 0$$

conduit en général à un système de deux équations du premier ordre; ces deux équations sont en involution et admettent une solution singulière déterminée par l'élimination de a entre $f = 0$ et $f_a = 0$.

Soit

$$z = ax + a^2 y; \quad p = a, \quad q = a^2.$$

La famille de plans est intégrale du système

$$\begin{gathered} p^2 y + p x + z = 0, \\ q = p^2 \end{gathered}$$

qui admet une solution singulière

$$x^2 + 4yz = 0;$$

cette solution est singulière aussi pour la première équation du système.

Les plans sont aussi intégrales du système

$$\begin{gathered} p x + q y + z = 0, \\ q = p^2 \end{gathered}$$

mais la solution singulière du système ne l'est plus pour aucune des équations.

On trouvera des systèmes non en involution possédant une intégrale singulière en considérant, par exemple, une famille de sphères dont les équations dépendent d'un paramètre arbitraire

$$S = x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + 2d = 0,$$

a, b, c, d étant fonction d'un paramètre t; l'enveloppe s'obtient en adjoignant l'équation

$$P = a'x + b'y + c'z + d' = 0,$$

a', b', c', d' représentant les dérivées par rapport à t de a, b, c, d. λ étant quelque fonction de t, soit la famille de quadriques $S + \lambda P^2 = 0$, elle admet comme enveloppe celle de la famille de sphères; ces deux familles de surfaces peuvent être considérées chacune comme appartenant à une certaine famille à deux paramètres : $S + \mu\Sigma = 0$, $S + \lambda P^2 + \nu\Sigma = 0$, Σ dépendant des paramètres μ et t, Σ' des paramètres ν et t, ces deux expressions étant définies pour μ et ν nuls.

Chacune de ces deux familles à deux paramètres est l'intégrale complète d'une équation du premier ordre, et les deux équations obtenues n'admettent en général aucune intégrale commune autre que l'enveloppe commune des sphères et des quadriques, qui est une intégrale singulière pour leur système. Si l'on s'arrange pour que λ, a', b', c', d' s'annulent pour une même valeur de t, la sphère et la quadrique correspondant à cette valeur, coïncident et constituent une intégrale du système autre que l'intégrale singulière.

La solution singulière, quand elle existe, provient d'une décomposition du problème constitué par l'intégration du système (I). Des équations (III), on déduit

$$\delta s + F_p\left(\frac{dG}{dx}\right) - G_p\left(\frac{dF}{dx}\right) = 0,$$

$$\delta t + F_q\left(\frac{dG}{dy}\right) - G_q\left(\frac{dF}{dy}\right) = 0,$$

s'il existe une solution singulière, on peut écrire

$$F = l_1[z - Z(x, y)] + l_2(p - P) + l_3(q - Q) = 0$$

l_1, l_2, l_3 étant certaines fonctions de x, y, z, p, q, et des expressions analogues pour

$$G = 0, \quad F_p\left(\frac{dG}{dx}\right) - G_p\left(\frac{dF}{dx}\right), \quad F_q\left(\frac{dG}{dy}\right) - G_q\left(\frac{dF}{dy}\right)$$

avec pour l', l'', l''' les indices 2, 3, 4, 5.

On a d'abord la solution $z = Z$, $p = Q$, $q = Q$, puis on devra satisfaire aux équations

$$\begin{vmatrix} l_1 & l'_1 & l''_1 \\ l_2 & l'_2 & l''_2 \\ l_3 s + l_4 & l'_3 s + l'_4 & l''_3 s + l''_4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} l_1 & l'_1 & l''_1 \\ l_2 & l'_2 & l''_2 \\ l_3 t + l_5 & l'_3 t + l'_5 & l''_3 t + l''_5 \end{vmatrix} = 0,$$

par quoi on remplacera dans (III) les deux équations $\frac{dG}{dx} = 0$, $\frac{dG}{dy} = 0$; et en y adjoignant les deux équations (I), on obtient un système dont on poursuivra l'intégration.

Rappelons maintenant que l'on pose

$$[F, G] = F_p(G_x - pG_z) - G_p(F_x - pF_z) + F_q(G_y - qG_z) - G_q(F_y - qF_z)$$

et observons que si $\delta = 0$ et $F_p \neq 0$, on a

$$[F, G] = F_p\left(\frac{dG}{dx}\right) - G_p\left(\frac{dF}{dx}\right) - \frac{F_z}{F_z}\left[F_z\left(\frac{dG}{dy}\right) - G_z\left(\frac{dF}{dy}\right)\right].$$

En nous appuyant sur des résultats bien connus et sur ceux que nous venons d'établir, pour discuter un système de deux équations du premier ordre nous procéderons de la manière suivante :

Nous formons les relations (II), (IV) et (V)

$$(V) \qquad [F, G] = 0,$$

nous désignons par (VI) le système formé de (I) et l'une des équations (IV).

1° $\delta \neq 0$ [même en tenant compte de (I)] : si (V) est conséquence algébrique de (I), ce système est en involution; il peut admettre en outre une solution singulière si ses surfaces intégrales ont une enveloppe.

2° (II) et (V) sont conséquences algébriques de (VI) [on peut aussi remplacer (V) par la relation (IV) qui ne figure pas dans (VI)] : une solution, en général singulière, non nécessairement unique (*voir* 1° et 3°).

Cas particuliers. — a_1. (V) est conséquence de (I) sans que (II) le soit : le système (I) est en involution.

a_2. (II) est conséquence de (I) : une solution, et pas d'autre.

3° (V) n'est pas conséquence de (I) [non plus que (II)] : on l'adjoint au système (I), etc.

Remarque. — Lorsque (II) est conséquence algébrique de (I), il peut être avantageux dans une discussion de grouper 1° et 2°, a_2.

Nous donnerons plus loin de nombreuses applications de ce mode de discussion : signalons qu'il permet de déterminer le cas des transformations de Bäcklund signalé par Clairin et qui correspond à la deuxième partie du Tableau. On en déduit également une interprétation du rôle de la relation $[F, G]$ quand $\delta = 0$.

Remarquons, enfin, que les conditions d'existence de la solution singulière ne font intervenir que les dérivées du premier ordre des fonctions F et G, tandis que celles de la solution qui peut résulter de la troisième partie du Tableau contiennent les dérivées secondes de F et G; de là provient l'intérêt que l'on trouve à mettre en évidence la

solution singulière dans des discussions analogues à celles où conduit l'étude du problème de Bäcklund.

Nous allons étendre au système formé par deux équations aux dérivées partielles d'ordres quelconques, et par la même occasion à des systèmes plus généraux, les résultats que nous venons de démontrer relativement au système de deux équations du premier ordre. Nous serons conduits à des propositions que nous emploierons avantageusement dans la résolution de ces systèmes, et leur discussion, lorsqu'il y figure des paramètres.

1. Soient les deux équations aux dérivées partielles d'ordre m et M, $m \leq \mathrm{M}$, (e_m) et (E_M) :

$$(1)\qquad \begin{cases} f(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \ldots, p_{0m}) = 0, & (e_m), \\ \mathrm{F}(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \ldots, p_{0\mathrm{M}}) = 0, & (\mathrm{E}_\mathrm{M}). \end{cases}$$

Nous supposons que les premiers membres sont des fonctions analytiques, définies dans certains domaines, des arguments qui y figurent.

Désignons par $(e_m)_h$ le système des $h+1$ équations d'ordre $m+h$ obtenues par différentiation à partir de l'équation (e_m); $(e_m)_h^k$ représente l'équation de ce système dont le premier membre se déduit de celui de (e_m) en en prenant k fois la dérivée par rapport à y, $k \leq h$, et $h-k$ fois par rapport à x,

$$(e_m)_h^k \quad \frac{d^h f}{dx^{h-k}\,dy^k} = \frac{\partial f}{\partial p_{m-k,\,k}} p_{m-k,\,k+1} + \frac{\partial f}{\partial p_{m-k-1,\,k+1}} p_{m-k-1,\,k+2} + \cdots$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial p_{0,\,k+m}} p_{0,\,k+m} + \left(\frac{d^h f}{dx^{h-k}\,dy^k}\right) = 0,$$

la forme linéaire par rapport aux dérivées d'ordre $m+h$ qui constitue la première partie de cette somme, nous la représentons par $[(e_m)_h^k]$. Les notations analogues seront appliquées aux équations dérivées de (E_M).

Par des différentiations successives, nous obtenons les systèmes

$$(e_m)_1, \quad (e_m)_2, \quad \ldots, \quad (e_m)_h,$$
$$(\mathrm{E}_\mathrm{M})_1, \quad (\mathrm{E}_\mathrm{M})_2, \quad \ldots, \quad (\mathrm{E}_\mathrm{M})_h.$$

Le nombre des équations qui figurent dans chacun de ces systèmes s'obtient en ajoutant 1 à l'indice extérieur de la parenthèse, l'ordre, en ajoutant les deux indices. Les équations des systèmes $[(e_m)_h]$ et

$(E_M)_H$ sont du même ordre si $m + h = M + H$: leur nombre est alors au total de $h + H + 2 = 2h + m + M + 2$: il croît de deux unités lorsque l'ordre des équations croît d'une unité; la différence entre le nombre des équations et celui des dérivées de z de l'ordre de ces équations croît donc d'une unité, dans les mêmes conditions. Les équations des systèmes $(e_m)_{M-1}$, $(E_M)_{m-1}$ sont d'ordre $m + M - 1$, et dans leur ensemble au nombre de $m + M$, c'est-à-dire précisément celui des dérivées de z d'ordre $m + M - 1$, le nombre des équations des systèmes $(e_m)_M$, $(E_M)_m$ d'ordre $m + M$ est $m + M + 2$ dépassant d'une unité celui des dérivées de z de cet ordre; les équations d'ordre μ $(M \leqq \mu \leqq M + m - 1)$ obtenues en différentiant les équations (1) sont au contraire en nombre inférieur à celui des dérivées de z d'ordre μ.

Appelons (A) le système obtenu en adjoignant aux équations (1) celles qu'on en déduit par différentiations jusque et y compris celles d'ordre $m + M - 1$:

$$(A) \qquad \begin{cases} (e_m)_M, & (e_m)_{M-1}, & \ldots & (e_m)_{M-1}, \\ (E_M)_m, & (E_M)_{m-1}, & \ldots & (E_M)_{m-1}; \end{cases}$$

lorsque nous considérons les équations de (A) d'ordre au plus égal à K, nous représentons leur ensemble par (A_K).

Désignons par D le déterminant des coefficients des dérivées d'ordre $m + M - 1$ dans les équations $(e_m)_{M-1}$, $(E_M)_{m-1}$:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial p_{m,0}} & \frac{\partial f}{\partial p_{m-1,1}} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial p_{0,m}} & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{\partial f}{\partial p_{m-1,1}} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial p_{0,m-1}} & \frac{\partial f}{\partial p_{0,m}} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \frac{\partial f}{\partial p_{m,0}} & \ldots & \ldots & \frac{\partial f}{\partial p_{0,m}} & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & \frac{\partial f}{\partial p_{m,0}} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial p_{1,m-1}} & \frac{\partial f}{\partial p_{0,m}} \\ \frac{\partial F}{\partial p_{M,0}} & \frac{\partial F}{\partial p_{M-1,1}} & \ldots & \frac{\partial F}{\partial p_{0,M}} & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{\partial F}{\partial p_{M,0}} & \ldots & \frac{\partial F}{\partial p_{1,M-1}} & \frac{\partial F}{\partial p_{0,M}} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \frac{\partial F}{\partial p_{M,0}} & \ldots & \ldots & \frac{\partial F}{\partial p_{0,M}} & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & \frac{\partial F}{\partial p_{M,0}} & \ldots & \ldots & \frac{\partial F}{\partial p_{0,M}} \end{vmatrix}$$

Ce déterminant est égal au résultant des deux équations de degrés m et M qui donnent les directions des caractéristiques des équations (1) :

$$\frac{\partial f}{\partial p_{m,0}} dy^m - \frac{\partial f}{\partial p_{m-1,1}} dy^{m-1} dx + \ldots + (-1)^m \frac{\partial f}{\partial p_{0,m}} dx^m = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_{M,0}} dy^M - \frac{\partial F}{\partial p_{M-1,1}} dy^{M-1} dx + \ldots + (-1)^M \frac{\partial F}{\partial p_{0,M}} dx^M = 0.$$

2. *Quelques propriétés algébriques du système* (A). — Considérons les divers arguments qui figurent dans les équations de (A) comme autant de variables indépendantes. Si, dans ces conditions, D n'est nul ni identiquement, ni comme conséquence de certaines équations de (A), les équations d'ordre $m + M - 1$ de (A) permettent de calculer les dérivées de z d'ordre $m + M - 1$ au moyen de x, y, z et de ses dérivées d'ordres inférieurs à $m + M - 1$, et cela même en tenant compte des autres équations de (A). Nous allons montrer, de plus, que les équations d'un ordre quelconque i de (A) permettent d'exprimer un nombre de dérivées de cet ordre égal au nombre des équations de (A) d'ordre i, au moyen des autres dérivées d'ordre i, de x, y, z et des dérivées d'ordres moindres, même moyennant les équations (A_{i-1}); pour cela, il suffit de montrer que les équations $(e_m)_{i-m}$, $(E_M)_{i-M}$, considérées comme équations linéaires en $p_{i,0}, \ldots, p_{0,i}$, ou encore que les formes linéaires $(\varepsilon_m)_{i-m}$, $(\varepsilon_M)_{i-M}$ sont linéairement indépendantes. Or, si ces formes ne sont pas linéairement indépendantes, il y a entre elles ρ relations linéaires identiques; en y remplaçant les dérivées d'ordre i par les dérivées d'ordre $m + M - 1$ obtenues en augmentant l'ordre de dérivation par rapport à x de $m + M - 1 - i$ unités, nous obtenons ρ relations linéaires identiques entre les formes $(\varepsilon_m)_{M-1}$, $(\varepsilon_M)_{m-1}$, ce qui est contraire à l'hypothèse $D \neq 0$.

Si $\rho = 1$, une des formes d'ordre i s'exprime linéairement au moyen des autres; il en résulte que deux des formes $i + 1$ s'expriment au moyen des autres, etc., que $m + M - i$ des formes d'ordre $m + M - 1$ s'expriment au moyen des autres formes de cet ordre. Si $\rho > 1$, il y a plus de $m + M - i$ des formes d'ordre $m + M - 1$ qui sont dans ce cas.

La propriété essentielle que nous voulons établir est la suivante :

Si, parmi les formes $(\varepsilon_m)_{M-1}$, $(\varepsilon_M)_{m-1}$, *il y a au moins* $m + M - i$ *qui sont indépendantes, les formes* $(\varepsilon_m)_{M-i}$, $(\varepsilon_M)_{m-i}$

d'ordre $m + M - r$, *au nombre de* $m + M + 2 - r$, *sont dépendantes et, parmi elles, il s'en trouve exactement* $m - M + 1 - r$ *qui sont indépendantes.*

Il est d'abord évident que r est au plus égal à m. En raison de l'hypothèse, entre $m + M + 1 - r$ des formes $(\varepsilon_m)_{M-1}, \ldots (\varepsilon_M)_{m+1}$ il existe une relation linéaire identique; on peut donc trouver, en particulier, des coefficients λ, μ, λ', μ' fonctions de $x, y, z, \ldots p_{0,M}$ tels que l'on ait identiquement :

$$\lambda_0 (\varepsilon_m)^0_{M-1} + \lambda_1 (\varepsilon_m)^1_{M-1} + \ldots + \lambda_{M-1} (\varepsilon_m)^{M-1}_{M-1} + \lambda_{M+1} (\varepsilon_m)^{M+1}_{M-1} + \ldots$$
$$+ \lambda_{M-1} (\varepsilon_m)^{M-1}_{M-1} + \mu_0 (\varepsilon_M)^0_{m+1} + \ldots + \mu_{m+1} (\varepsilon_M)^{m+1}_{m+1} = 0,$$

$$\lambda_0 (\varepsilon_m)^0_{M+1} + \lambda_1 (\varepsilon_m)^1_{M+1} + \ldots + \lambda_{M-1} (\varepsilon_m)^{M-1}_{M+1} + \mu_0 (\varepsilon_M)^0_{m+1} + \ldots$$
$$+ \mu_{m+1} (\varepsilon_M)^{m+1}_{m+1} + \ldots + \mu_{m-1} (\varepsilon_M)^{m-1}_{m+1} = 0.$$

La proposition est établie si les coefficients $\lambda_{M-r+1}, \lambda_{M-r+2}, \ldots \lambda_{M-1}$, ou bien les coefficients $\mu'_{m-r+1}, \mu'_{m-r+2}, \ldots, \mu'_{m-1}$ sont nuls; car, par exemple, dans le premier cas, on en déduit la relation

$$\lambda_0 (\varepsilon_m)^0_{M-r} + \lambda_1 (\varepsilon_m)^1_{M-r} + \ldots + \lambda_{M-1} (\varepsilon_m)^{M-1}_{M-r} + \mu_0 (\varepsilon_M)^0_{m-r} + \ldots + \mu_{m-1} (\varepsilon_M)^{m-1}_{m-r} = 0.$$

Soient λ_i, μ_j, $\lambda'_{i'}$, $\mu'_{j'}$ les coefficients de plus haut indice qui ne soient pas nuls; nous allons voir que si j' est supérieur à $m - r$, i est inférieur à $M - r$, de sorte que l'un des deux cas que nous venons de signaler se présente nécessairement.

En effet, désignons par h et H le plus haut ordre de dérivation par rapport à y des dérivées d'ordres m et M dans (ε_m) et (ε_M). En raison des identités (2)

$$h + i = H + j,$$
$$h + i' = H + j',$$

d'où

$$i - i' = j - j',$$
$$i - i' = j - j';$$

or

$$j > m - r;$$

par hypothèse, de plus,

$$j' \leq m - r, \quad i' \leq M - r;$$

donc

$$i < M + r - m - r = m - r - m + r,$$
$$i < M - r.$$

Nous pouvons ajouter que les formes d'ordre $m + M - r - 1$ sont indépendantes et aussi que les r relations identiques qui existent entre les formes d'ordre $m + M - 1$ peuvent être résolues par rapport à r des formes $(\mathcal{E}_M)_{m-1}$ dont les indices supérieurs sont r nombres consécutifs.

Remarque. — La propriété que nous venons d'établir donne un procédé pour exprimer que deux équations algébriques de degrés m et M ont r solutions communes; on le déduit aisément de la condition classique.

3. *L'expression* $[f, F]$; *première propriété.* — Le système (A) est complètement intégrable, suivant la définition connue, lorsque toutes les solutions non singulières de ce système ne vérifient aucune équation d'ordre au plus égal à $m + M - 1$ qui ne soit conséquence algébrique de (A). Cela entraîne que D soit différent de zéro, même moyennant (A) [ou, ce qui suffit, (A_M), puisque D est d'ordre M au plus], et que les $m + M + 2$ équations $(e_m)_M$, $(E_M)_m$ soient compatibles par rapport aux $m + M + 1$ dérivées d'ordre $m + M$, ce qui procure une seule condition. On l'obtient de la façon suivante : multiplions le premier membre de chaque équation $(E_M)^i_m$ par $\frac{\partial f}{\partial p_{m-1}}$, celui de chaque équation $(e_m)^i_M$ par $-\frac{\partial V}{\partial p_{M-1}}$ et ajoutons; les dérivées d'ordre $m + M$ disparaissent; posons

$$[f, V] = \frac{\partial f}{\partial p_{m-1}}\left(\frac{d^m V}{dx^m}\right) + \frac{\partial f}{\partial p_{m-1+1}}\left(\frac{d^m V}{dx^{m-1}\,dy}\right) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial p_{m-m}}\left(\frac{d^m V}{dy^m}\right)$$
$$- \frac{\partial V}{\partial p_{M-1}}\left(\frac{d^M f}{dx^M}\right) - \frac{\partial V}{\partial p_{M-1+1}}\left(\frac{d^M f}{dx^{M-1}\,dy}\right) - \ldots - \frac{\partial V}{\partial p_{M-M}}\left(\frac{d^M f}{dy^M}\right).$$

Cette expression est d'ordre $m + M - 1$ au plus et représente le résultat de la combinaison que nous venons d'effectuer ; cela subsiste même si quelques-unes des expressions $\frac{\partial f}{\partial p_{i-1}}$, $\frac{\partial V}{\partial p_{i-1}}$ sont nulles. La condition de compatibilité cherchée est donc

$$(3) \qquad [f, V] = 0.$$

Nous allons préciser ce qu'il faut entendre par là. $D = 0$ n'étant pas conséquence algébrique de (A), par la résolution algébrique de ce

système, on en déduit d'autres : $(A)^1$, $(A)^2$, ..., $(A)^n$, qui ne sont pas analytiquement distincts, où les dérivées principales de chaque ordre sont en nombre égal à celui des équations de (A) qui sont de cet ordre. Soient P_r les dérivées principales, P_a les dérivées paramétriques [1], P_r^μ, P_a^μ désigneront ces dérivées jusqu'à l'ordre μ. Voici comment se fait cette résolution : on détermine d'abord un élément d'ordre $m + M - 1$ dont les coordonnées vérifient le système (A); pour cela on donne aux dérivées P_a^M un système de valeurs numériques $P_{a,0}^M$ n'annulant pas D; nous en déduisons, par les équations (A_M), un certain nombre de systèmes de valeurs numériques pour les dérivées P_r^M, soit $P_{r,0}^M$ l'un d'eux; nous supposons que les nombres $P_{a,0}^M$, $P_{r,0}^M$ n'annulent pas non plus D. Prenons arbitrairement les valeurs numériques des dérivées P_a de chaque ordre supérieur à M jusqu'à $m + M - 1$ compris; on en déduit pour les dérivées de chacun de ces ordres un système de valeurs numériques. Le nombre des coordonnées de l'élément d'ordre $m + M - 1$ que l'on obtient ainsi, qui sont arbitraires, est égal à

$$\frac{m + M - 1)(m + M)}{\text{[illegible]}} - \frac{m + 1)m}{\text{[illegible]}} - \frac{M + 1)M}{\text{[illegible]}} = mM.$$

Nous supposons que l'élément considéré appartient au domaine d'analycité. Alors le théorème d'existence des fonctions implicites nous apprend qu'il existe, correspondant à chacune des P_r, une fonction des P_a et de x, y, dont la valeur numérique pour $P_{a,0}$, x_0, y_0 concorde avec celle de la coordonnée correspondante de l'élément.

Si le système (A) est complètement intégrable, la substitution de ces fonctions aux P_r dans $[f, F]$ donne un résultat identiquement nul. Au lieu de l'élément d'ordre $m + M - 1$ considéré, nous aurions pu en obtenir un autre en partant d'un système de valeurs numériques différent de $P_{r,0}^M$, le nombre des coordonnées arbitraires y serait également mM, et l'on en déduirait un système de fonctions pour les P_r jouissant de propriétés analogues à celles des fonctions précédentes.

Cela suppose que l'on a pu effectuer la résolution numérique des équations (A), comme il a été indiqué, c'est-à-dire que la relation

$$(4) \qquad D = \text{[illegible]}$$

---

(1) Riquier, *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, p. 169.

ne soit satisfaite ni identiquement, ni comme conséquence algébrique de (A). On est conduit à rechercher quel est le rôle de la relation $[f, F] = 0$, lorsque les deux équations (1) ont une ou plusieurs directions communes de caractéristiques, et à étudier certaines solutions singulières des systèmes tels que (1). Mais, par suite de la multiplicité des cas possibles, croissante avec l'ordre des deux équations, la démonstration générale des résultats que nous avons en vue ne peut se faire de la même manière que pour deux équations du premier ordre. Nous ne la ferons pas directement sur le système (A), mais sur un système plus général auquel nous attribuerons uniquement les propriétés de (A) qui sont nécessaires à la démonstration.

4. *Les systèmes* $\mathbf{S}$. — Considérons un système S_k d'équations aux dérivées partielles à une inconnue z, fonction des deux variables indépendantes x et y; k est l'ordre le plus élevé des équations qui le composent; les équations d'ordres inférieurs à k y sont au nombre de N, soit S_{k-1} leur ensemble; S_ρ désigne l'ensemble des équations d'ordre au plus égal à ρ; s_k désigne l'ensemble des équations d'ordre k au nombre de p :

$$(s_k) \qquad a_1 = 0, \qquad a_2 = 0, \qquad \ldots \qquad a_p = 0.$$

Lorsque nous voudrons mettre les nombres N et p en évidence, nous emploierons la notation $S^N_{k,p}$.

Nous disons que nous avons mis le système S_k sous une *forme régulière* si les équations de tout ordre ρ de ce système sont indépendantes par rapport aux dérivées d'ordre ρ, même moyennant les équations de S_k d'ordres inférieurs à ρ; c'est-à-dire s'il n'existe aucune équation d'ordre ρ' inférieur à ρ qui soit conséquence algébrique des équations S_ρ sans l'être des équations $S_{\rho'}$ (¹).

Dans ces conditions, si nous résolvons les équations de chaque ordre par rapport à certaines dérivées de cet ordre, qui deviennent les dérivées principales, en nombre égal à celui de ces équations, nous avons effectué une résolution régulière (²) du système donné; il se présente, en général, différentes façons d'effectuer la résolution régu-

(¹) Cf. Maurice Janet, *C. R. Acad. Sc.*, t. 156, p. [illegible].
(²) Delassus, *Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. XIII, p. [illegible].

lière du système correspondant aux divers groupes de solutions provenant de la résolution algébrique des équations; c'est ce que nous avons constaté sur le système (A).

Pour intégrer un des systèmes provenant de la résolution régulière de S_k, nous nous assurons d'abord s'il est complètement intégrable. S'il ne l'est pas, nous lui adjoignons les nouvelles équations obtenues en écrivant les conditions d'intégrabilité; nous formons ainsi un nouveau système sur lequel nous opérons comme sur S_k, en complétant la résolution régulière, et ainsi de suite. Le nombre des opérations est limité, soit que l'on arrive à une relation non identique entre les variables indépendantes, soit que l'on arrive à un système complètement intégrable. Nous pourrons obtenir ainsi les solutions de S_k, sauf, peut-être, certaines solutions singulières.

Les systèmes que nous étudierons seront, analytiquement, indécomposables; lorsqu'il s'en présentera qui ne le soient pas, nous nous occuperons séparément de chacun des systèmes provenant de la décomposition. Nous mènerons alors de front les opérations de réduction effectuées sur les divers modes de résolution régulière. Pour cela, nous mettrons le système donné sous forme régulière; nous écrirons les conditions immédiates d'intégrabilité : on peut les trouver sans avoir à résoudre les équations, comme on l'a fait dans le cas de deux équations; celles qui ne sont pas conséquences algébriques du système donné, nous les lui adjoignons de manière à former un nouveau système sur lequel nous opérons comme sur le précédent et ainsi de suite. Ainsi, lorsque la relation (3) n'est pas conséquence algébrique de (A), elle constitue une nouvelle équation que nous lui adjoignons. Pour l'intégration effective, on sera bien obligé de résoudre complètement les équations, mais pour la simplicité des calculs et de la discussion il vaut mieux le faire le plus tard possible.

On n'obtient ainsi que les solutions non singulières du système donné; les calculs par lesquels on effectue les éliminations et résolutions algébriques successives ne sont valables qu'à la condition que la fonction inconnue n'annule pas certaines expressions; par exemple, D pour le système (A); il peut se faire que le système donné admette des solutions singulières; on les obtiendra en intégrant les systèmes obtenus en adjoignant au système donné les équations provenant de l'annulation de ces expressions.

On est conduit ainsi à des calculs compliqués, surtout lorsque le système donné contient des paramètres arbitraires et que l'on doit,

non seulement résoudre, mais discuter. Notre but est de fournir, au moins pour une classe importante de systèmes, un moyen d'ordonner les calculs qui est souvent avantageux.

Nous supposons que le système S_k jouisse des propriétés suivantes :

Aucune équation de s_k n'est conséquence algébrique d'autres équations de S_k, ce que nous exprimons aussi en disant que les équations s_k sont indépendantes par rapport à l'ensemble des arguments qui y figurent, même moyennant S_{k-1};

Toutes les équations obtenues en dérivant une fois les équations de S_{k-1} par rapport à x et à y sont conséquences algébriques de certaines équations de S_k;

Des $2p$ équations d'ordre $k+1$ dérivées des équations de s_k, $p-1$ sont conséquences algébriques des $p+1$ autres, que nous désignons par s_{k+1}, moyennant S_k; l'ensemble des équations S_k et s_{k+1} est représenté par S_{k+1}.

Ces propriétés subsistent, évidemment, après un changement linéaire quelconque de variables effectué sur x et y. Nous supposons, de plus, qu'au besoin, par un tel changement de variables, on peut s'arranger pour que le système s_{k+1} comprenne les équations

$$(7) \qquad \frac{da_1}{dx} = 0, \quad \frac{da_2}{dx} = 0, \quad \ldots \quad \frac{da_i}{dx} = 0.$$

Admettons que a_p contienne la dérivée d'ordre k dont l'ordre de dérivation par rapport à y est au moins égal à celui de toute dérivée d'ordre k figurant dans s_k; $\frac{da_p}{dy}$ contient une dérivée d'ordre $k+1$, p_{k+1}, dont l'ordre de dérivation, par rapport à y, est supérieur à celui de toute dérivée d'ordre $k+1$ figurant dans (7), de sorte que nous pourrons prendre pour système s_{k+1} celui qui comprend les équations (7) et $\frac{da_p}{dx} = 0$.

Les équations $\frac{da_i}{dy} = 0$ $(i < p)$ sont donc conséquences algébriques de S_{k+1}.

Il résulte de là que les équations d'ordre $k+2$ dérivées de s_{k+1} sont conséquences algébriques, moyennant S_{k+1}, des $p+2$ équations s_{k+2},

$$(s_{k+2}) \qquad \frac{d^2a_1}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2a_2}{dx^2} = 0, \quad \ldots \quad \frac{d^2a_i}{dx^2} = 0, \quad \frac{da_p}{dx\,dy} = 0, \quad \frac{d^2a_p}{dy^2} = 0$$

car les équations $\frac{d^2 a_i}{dx\,dy} = 0$ $(i < p)$ sont conséquences algébriques de S_{k+1} et des équations dérivées une fois par rapport à x des équations de s_{k+1}, c'est-à-dire d'équations figurant dans s_{k+2}.

Nous représentons par S_{k+2} l'ensemble des équations S_{k+1} et s_{k+2}.

D'une façon générale, nous représentons par s_{k+h} le système des $p + h$ équations :

$$(s_{k+h}) \quad \left\{ \begin{array}{lll} & \frac{d^h a_1}{dx^h} = 0, & \frac{d^h a_2}{dx^h} = 0, \\ \frac{d^h a_1}{dx^h} = 0, & \frac{d^h a_2}{dx^{h-1}\,dy} = 0, & \frac{d^h a_3}{dx^{h-1}\,dy} = 0, \\ & \frac{d^h a_2}{dx\,dy^{h-1}} = 0, & \frac{d^h a_3}{dy^h} = 0 \end{array} \right.$$

et par S_{k+h} l'ensemble des équations S_k, s_{k+1}, s_{k+2}, ..., s_{k+h}; les équations $\frac{d^h a_i}{dx^{h-1}\,dy} = 0$ $(i < p)$ sont conséquences algébriques de S_{k+h}.

Nous dirons d'un système qui possède les propriétés que nous venons d'énoncer, qu'il jouit des propriétés d'un système $\mathfrak{S}$. Si cela se produit pour S_k, il en est de même quel que soit h pour S_{k+h}. Si le système se trouve, de plus, sous forme régulière, il est complètement intégrable, car nous démontrerons plus loin (¹) que si les équations s_k sont indépendantes par rapport aux dérivées d'ordre k, les équations s_{k+1} le sont par rapport aux dérivées d'ordre $k+1$; ainsi en est-il de (A) lorsque la relation $[f, F] = 0$ en est conséquence algébrique, sans que $D = 0$ le soit; par contre, lorsque $D = 0$ est conséquence algébrique de (A), ce système n'est plus sous forme régulière; toutefois, si les équations d'ordre $m + M - 1$ de ce système sont indépendantes par rapport à l'ensemble de leurs arguments, même moyennant (A_{m+M-1}), (A) jouit encore des propriétés d'un système $\mathfrak{S}$. Voici pourquoi : les équations obtenues en dérivant une fois les équations (A_{m+M-2}) sont conséquences algébriques d'équations de (A); celles que l'on obtient en dérivant une fois les $m + M$ équations d'ordre $m + M - 1$, s'expriment au moyen des $m + M + 2$ équations $(e_m)_M$, $(E_M)_m$; d'autre part, par suite de la propriété du crochet, il existe une relation linéaire entre les premiers membres de

(¹) *Voir* à la fin du n° 6.

ces équations. Supposons que l'une des expressions $\frac{\partial f}{\partial p_{m,0}}$, $\frac{\partial f}{\partial p_{m,M}}$ soit différente de o, par exemple la première; toutes les équations d'ordre $m+M$ dérivées de (A) sont conséquences algébriques des équations $(e_m)_M$, $(E_M)_m^0$, $(E_M)_m^1$, ..., $(E_M)_m^{m-1}$, et c'est ici l'équation $(e_m)_{M-1}^{M-1}$ qui joue le rôle de $a_p = 0$. Lorsque $\frac{\partial f}{\partial p_{m,0}} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial p_{0,M}} \neq 0$, il suffit de permuter le rôle de f et F; si l'on a à la fois $\frac{\partial f}{\partial p_{m,0}} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial p_{0,M}} = 0$, il suffit de faire un changement linéaire de variables quelconque pour que cette circonstance ne se présente plus pour les nouvelles équations. Reste à examiner le cas où les équations $(e_m)_M$ et $(E_M)_{m-1}$ ne sont pas indépendantes par rapport à l'ensemble de leurs arguments : certaines équations de $(E_M)_{m-1}$, dont je désigne le nombre par r, sont conséquences algébriques des autres équations de (A); d'après une remarque faite plus haut, ces équations se suivent dans la suite :

$$(E_M)_{m-1}^n, \quad (E_M)_{m-1}^{n+1}, \quad \ldots, \quad (E_M)_{m-1}^{m-1};$$

ce sont, par exemple,

$$(E_M)_{m-1}^{n-1}, (E_M)_{m-1}^{n+2}, \ldots, (E_M)_{m-1}^{n+r} \qquad (n+r \leqq m-1).$$

Les $2r$ équations obtenues en les dérivant une fois par rapport à x et y s'expriment au moyen de $r+1$ seulement figurant dans $(E_M)_{m-1}$, savoir :

$$(E_M)_{m-1}^{n-1}, (E_M)_{m-1}^{n+2}, \ldots, (E_M)_{m-1}^{n+r+1};$$

ces dernières sont donc conséquences algébriques de (A) et des $m+M-2-r-1$ autres équations d'ordre $m+M$ qui figurent dans $(e_m)_M$ et $(E_M)_m$, la condition $[f, F] = 0$ se trouve nécessairement réalisée; si $n+r \leqq m-1$, ce qui est la même chose que de supposer $\frac{\partial f}{\partial p_{0,0}} \neq 0$, le système formé avec A_{m+M-2} et les $m+M-p$ équations

$$(e_m)_{M-1}, (E_M)_{m-1}^0, (E_M)_{m-1}^1, \ldots, (E_M)_{m-1}^{n-1}, (E_M)_{m-1}^{n+2}, \ldots, (E_M)_{m-1}^{m-1}$$

jouit des propriétés d'un système $\mathfrak{S}$ où $h = m+M-1$, $p = m+M-r$: les $m+M-r+1$ équations d'ordre $m+M$ que l'on a à considérer sont

$$(e_m)_M, \quad (E_M)_m^0, \quad (E_M)_m^1, \quad \ldots, \quad (E_M)_m^{n-1}, \quad (E_M)_m^{n+r+1}, \quad \ldots, \quad (E_M)_m^{m-1}.$$

et c'est encore l'équation $(e_m)_{M-1}^{M}$ qui joue le rôle de $a_p = 0$; lorsque $\frac{\partial f}{\partial p} = 0$, mêmes observations que précédemment.

Lorsque $D = 0$, et que moins de $m + M - 1$ équations d'ordre $m + M - 1$ seulement sont indépendantes par rapport aux dérivées de cet ordre, (A_{m+M-1}) ne se trouve pas sous forme régulière.

3. Avant d'aller plus loin, nous allons présenter une observation: elle concerne le cas où S_ρ $(\rho < k)$ ne se trouve pas sous forme régulière, autrement dit, où entre certaines équations d'ordre ρ et d'autres équations de S_k d'ordre inférieur à ρ, on peut éliminer les dérivées d'ordre ρ de telle façon que le résultat de l'élimination soit une équation $(e)'$ d'ordre ρ' inférieur à ρ, qui n'est pas conséquence algébrique de $S_{\rho'}$; le système obtenu en remplaçant une des équations d'ordre (ρ) : (e), par $(e)'$ est équivalent à S_k, sauf peut-être pour certaines solutions singulières, et jouit aussi des propriétés d'un système $\mathfrak{S}$. L'équation obtenue en dérivant (e') par rapport à x est conséquence algébrique des équations de S_ρ et de leurs dérivées par rapport à x, et l'on obtient un système équivalent au système considéré, en y remplaçant une équation d'ordre $\rho + 1$ par une équation d'ordre $\rho' + 1$; il n'est, du reste, pas exclu que cette nouvelle équation soit conséquence algébrique des équations du nouveau système, sans que (e) le soit. Si $\rho + 1 < k$, le nouveau système jouit encore des propriétés d'un système $\mathfrak{S}$.

L'opération que nous venons d'indiquer sur (e), il est possible qu'elle se présente pour d'autres équations de S_{k-1}; lorsqu'il n'en est plus ainsi, le système S_{k-1} se trouve sous forme régulière.

Comme nous l'avons dit précédemment, un système se trouvant sous forme régulière, qui jouit des propriétés d'un système $\mathfrak{S}$, est complètement intégrable. Si $p < k + 1$, il est en involution d'ordre $k + 1 - p$, et sa solution la plus générale dépend de $k + 1 - p$ fonctions arbitraires d'une variable, et, éventuellement, de constantes arbitraires. Si $p = k + 1$, sa solution la plus générale dépend de $\frac{k(k+1)}{2} - N$ constantes arbitraires; elle ne dépend pas, alors, de fonctions arbitraires, nous dirons que son ordre d'involution est zéro. Lorsque le système S_k ne se trouve pas sous forme régulière, nous

allons montrer que ses solutions non singulières sont solutions d'un système en involution d'ordre au moins égal à $k+1-p$, et nous indiquerons comment on peut profiter des hypothèses pour simplifier les calculs; il faut signaler le cas où l'on rencontrerait une relation ne contenant que x et y, où ce que nous venons de dire se trouve en défaut; mais, si cette relation ne se déduit pas immédiatement des équations du système donné, ce cas est exceptionnel.

6. Plaçons-nous donc dans le cas où S_k n'est pas sous forme régulière. En premier lieu, si les équations s_k sont indépendantes par rapport aux dérivées d'ordre k même moyennant S_{k-1}, il suffit d'opérer sur S_{k-1} et de mettre ce système sous forme régulière. Supposons maintenant que les équations s_k ne soient pas indépendantes par rapport aux dérivées d'ordre k, au besoin moyennant S_{k-1}; nous pouvons remplacer dans S_k, r des équations de s_k par les r équations, provenant de l'élimination des dérivées d'ordre k :

$$(8) \qquad b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad \ldots, \quad b_r = 0$$

et qui sont de l'ordre $k-1$ au plus; soit s'_k les $p-r$ autres. Nous savons que *les équations s_{k+1} ne sont pas indépendantes par rapport aux dérivées d'ordre $k+1$*; la proposition fondamentale qui nous servira par la suite, c'est qu'*il y en a parmi elles exactement $p+1-r$ qui le sont*, soit s^1_{k+1}. Pour le prouver, il suffit de montrer qu'il y a exactement r combinaisons linéaires, indépendantes, de ces équations, telles que le premier membre se réduise à une expression d'ordre inférieur à $k+1$, moyennant S_k. Tout d'abord, il existe r de ces combinaisons provenant des équations

$$(7) \qquad \frac{db_1}{dx} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{db_r}{dx} = 0;$$

$b_r = 0$ étant conséquence algébrique de S_k, $\frac{db_r}{dx} = 0$ l'est de S_k et de (7). Il n'en existe pas d'autres : à cause de la façon dont a été choisie a_p, l'équation $\frac{da}{dx} = 0$ ne peut entrer dans une telle combinaison, et, s'il en existait plus de r entre les équations (7), c'est que

la matrice

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial p_{r+1}} & \frac{\partial a_1}{\partial p_{r+2}} & \cdots & \frac{\partial a_1}{\partial p_p} \\ \frac{\partial a_2}{\partial p_{r+1}} & \frac{\partial a_2}{\partial p_{r+2}} & \cdots & \frac{\partial a_2}{\partial p_p} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdot & \cdots \\ \frac{\partial a_r}{\partial p_{r+1}} & \frac{\partial a_r}{\partial p_{r+2}} & \cdot & \frac{\partial a_r}{\partial p_p} \end{vmatrix}$$

serait d'ordre inférieur à $p - r$; à moins que le système donné se décompose, ce qui est contraire aux hypothèses, il existerait moins de $p - r$ des équations s_k qui seraient indépendantes, moyennant S_{k-1}, par rapport aux dérivées d'ordre k, ce qui est également contraire aux hypothèses.

On déduit de là la conséquence suivante, relative aux équations $\frac{db_i}{dy} = 0$: elles sont naturellement d'ordre au plus égal à k; $b_i = 0$ étant conséquence algébrique de S_k, $\frac{db_i}{dy} = 0$ l'est de S_{k+1}; chacune de ces équations doit l'être simplement de S_k et de l'ensemble des

$$(8') \qquad \frac{db_1}{dx} = 0, \qquad \frac{db_r}{dx} = 0$$

sinon il existerait une combinaison des équations s_{k+1} procurant une équation d'ordre inférieur à $k + 1$ et distincte des r combinaisons dont nous venons d'établir l'existence.

Dans ce qui précède, nous avons supposé que le changement de variables, dont nous avons parlé dans l'énoncé des propriétés d'un système $\mathfrak{S}$, était effectué, s'il était nécessaire; s'il en était ainsi, en revenant au système donné, on en conclut que des $2r$ équations $\frac{db_i}{dx} = 0$, $\frac{db_i}{dy} = 0$, il en existe r qui sont conséquences algébriques des r autres et de S_k; ce ne seront plus les r équations $\frac{db_i}{dy} = 0$ qui seront dans ce cas, mais r équations prises parmi les $\frac{db_i}{dx} = 0$ et les $\frac{db_i}{dy} = 0$ que l'on choisira dans chaque cas particulier. Sauf avis contraire, nous supposerons dorénavant que le changement de variables a été effectué.

Observons encore que si les équations s_i sont indépendantes, même moyennant S_k, par rapport aux dérivées d'ordre k, les équations s_{i+1} le sont, même moyennant S_k par rapport aux dérivées d'ordre $k+1$.

7. Nous allons nous servir des résultats que nous venons d'établir pour décomposer l'opération de réduction du système S_i en un système complètement intégrable, en opérations partielles que nous définissons ainsi qu'il suit. Les r équations $b_i = 0$ ne sont pas nécessairement, moyennant S_{k-1}, d'ordre $k-1$; autrement dit, si l'on met S_i sous forme régulière, les équations par quoi l'on remplace celles de s_i que l'on supprime, peuvent ne pas être d'ordre $k-1$; nous savons seulement, par hypothèse, qu'aucune n'est conséquence algébrique de s_k et des autres équations de S_k; mais si le système S_k contient effectivement des équations d'ordre inférieur à k, nous pouvons admettre que les équations $b_i = 0$ sont d'ordre $k-1$, quittes plus tard à nous occuper de la forme régulière des systèmes. Les r équations $\frac{db_i}{dx} = 0$ sont alors d'ordre k, mais elles ne seront pas nécessairement indépendantes par rapport aux dérivées d'ordre k; elles pourront même ne pas l'être par rapport à l'ensemble de leurs arguments, moyennant S_k; nous écartons pour l'instant cette dernière possibilité, que nous envisagerons plus loin.

Considérons le système S'_k composé de la manière suivante : les équations d'ordre inférieur à k, S'_{k-1}, comprennent les équations S_{k-1} et (8), et les équations d'ordre k, s'_k, comprennent s_k et (8'). S'_k admet toutes les solutions de S_k, sauf peut-être celles pour lesquelles les calculs d'élimination que l'on a dû effectuer seraient rendus illusoires. Si les équations s'_k sont indépendantes par rapport à l'*ensemble* de leurs arguments, même moyennant S'_{k-1}, S'_k jouit, comme nous l'allons montrer, des propriétés d'un système $\mathfrak{S}$; en employant une notation dont nous avons expliqué le sens, nous pourrons le représenter aussi par $S^{N}_{k,p}$ ($N > N$), les nombres k et p gardant la même valeur que pour le système donné :

Les équations s_i sont bien au nombre de p, indépendantes; les équations obtenues en dérivant une fois les équations de S_{k-1} sont conséquences algébriques de S'_k : cela est vrai par hypothèse pour les équations provenant de S_{k-1}, puisque toutes les équations de S_k sont conséquences algébriques d'équations figurant dans S_k; quant

aux équations (8), leurs dérivées par rapport à x (8′), figurent dans S_k; leurs dérivées par rapport à y, d'après une remarque faite, sont conséquences algébriques de S_k et de (8), donc aussi de S'_k.

Les équations obtenues en dérivant une fois les équations s'_k par rapport à x et à y sont conséquences algébriques des dérivées par rapport à x de ces équations et de $\frac{d^2 a_p}{dx^2} = 0$ moyennant S_k; désignons par s^1_{k+1} l'ensemble des équations dérivées par rapport à x des équations s^1_k et de $\frac{d^2 a_p}{dy^2} = 0$. Posons

$$(8'') \qquad \frac{d^2 b_1}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d^2 b_2}{dx^2} = 0, \qquad \ldots \qquad \frac{d^2 b_p}{dx^2} = 0$$

désignons par s_{k+1} l'ensemble des équations s^1_{k+1} et (8″) au nombre de $p+1$, dont sont conséquences toutes les équations dérivées de s'_k, moyennant S_k; par S_{k+1}, le système formé de S_k et s_{k+1}; il faut montrer que les équations dérivées de s'_k sont conséquences algébriques de S_{k+1}; or, les équations dérivées de s^1 sont conséquences de S_{k+1} par hypothèse, donc de S'_{k+1}; les équations dérivées par rapport à x de (8″) figurent dans s'_{k+1}, il reste par conséquent à le montrer pour les équations $\frac{d^2 b_1}{dx\,dy} = 0$: or, les équations $\frac{db_1}{dy} = 0$ étant conséquences algébriques des S'_k, les équations $\frac{d^2 b_1}{dx\,dy} = 0$ le sont des équations S''_k et de celles obtenues en les dérivant par rapport à x, c'est-à-dire toutes équations figurant dans S_{k+1}.

On définirait de la même manière le système S'_{k+h} au moyen des équations de S_k, $s^1_{k+1}, s^1_{k+2}, \ldots, s^1_{k+h}$, (8″), (8‴), ..., $8^{(h+1)}$.

$$(8^{(h)}) \qquad \frac{d^h b_1}{dx^h} = 0, \qquad \frac{d^h b_2}{dx^h} = 0, \qquad \ldots \qquad \frac{d^h b_p}{dx^h} = 0$$

Si maintenant les équations s'_k ne sont pas indépendantes par rapport à l'ensemble de leurs arguments, au besoin moyennant S'_{k-1}, c'est que les équations (8′) ne le sont pas, au besoin moyennant les autres équations de S'_k; nous considérons alors le système $\overline{S}'_k$ comprenant toutes les équations de S'_k, sauf celles parmi les (8′) qui sont conséquences algébriques des autres; c'est un système $\overline{S}'_{k,p'}$, où $p' < p$, et il jouit des propriétés d'un système $\mathfrak{S}$; il suffit pour cela, après ce que nous venons de dire pour S'_k, de remarquer que si $p - p'$ des équa-

tions (8′) sont conséquences algébriques des autres équations de S_k, les $p - p'$ dérivées par rapport à x de ces $p - p'$ équations, qui sont $p - p'$ équations de (8″), sont conséquences algébriques des autres équations de S'_{k+1}, que nous désignons par $\overline{S'_{k+1}}$. On définirait d'une façon évidente le système $\overline{S'_{k+h}}$.

En définitive, nous avons remplacé le système donné $S^{N}_{k,p}$ par un système $S^{N'}_{k,p'}$ ($N' > N$, $p' \leqq p$); nous remplacerons de même ce dernier par $S^{N''}_{k,p''}$ ($N'' > N'$, $p'' \leqq p'$), après avoir mis, si on le désire, les équations S_{k-1} sous forme régulière et ainsi de suite, les différents systèmes que l'on obtient jouissant tous des propriétés d'un système $\mathfrak{S}$. Supposons que chaque fois on mette les équations d'ordre au plus égal à $k - 1$ sous forme régulière, si les équations d'ordre k d'un système auquel on est arrivé sont indépendantes par rapport aux dérivées de cet ordre, le système total est mis sous forme régulière, donc complètement intégrable.

8. *Remarques diverses.* — Ce que nous venons de dire ne s'applique plus lorsqu'il apparaît une relation non identique entre x et y, alors qu'on tente de mettre un des systèmes qui se présentent sous forme régulière. Dans ce cas, le système donné est impossible. Nous remarquons toutefois un résultat dont nous aurons à nous servir. Le raisonnement étant le même, quel que soit le rang, dans la série des systèmes successifs, du système duquel on déduit cette relation, nous supposons que c'est le système donné qui se trouve dans le cas signalé. Soit $b_i = 0$ la relation dont le premier membre ne contient que x et y; il résulte de ce qui précède que les deux relations en x et y $\frac{db_i}{dx} = 0$, $\frac{db_i}{dy} = 0$ ne sont pas indépendantes, moyennant S_k; si $b_i = 0$ est la seule relation qui présente cette particularité, elles se réduisent donc à une seule. Si le fait se produit pour plusieurs relations $b_i = 0$, $b_j = 0$, ..., $b_l = 0$, les relations $\frac{db_i}{dy} = 0$, $\frac{db_i}{dx} = 0$, ..., $\frac{db_l}{dy} = 0$ sont chacune conséquence algébrique de $\frac{db_i}{dy} = 0$, $\frac{db_i}{dx} = 0$, ..., $\frac{db_l}{dx} = 0$ moyennant S_k.

Observons aussi que la marche que nous venons d'indiquer pour réduire le système donné à une forme complètement intégrable, peut être simplifiée en condensant plusieurs opérations successives, lorsque

les relations (8) ne sont pas d'ordre $k-1$ moyennant S_{k-1}; supposons que les équations (8) se répartissent moyennant S_{k-1} en différents groupes d'équations

$$(8)^1 \quad \begin{cases} b_1^1 = 0, \quad b_2^1 = 0, \quad \ldots \quad b_r^1 = 0, \quad b_{r+1}^1 = 0, \quad \ldots \\ \quad b_{r+1} = 0, \quad \ldots \quad b_{r+1}^{i+1} = 0, \quad \ldots \quad b_{r+1}^{i+1} = 0 \end{cases}$$

respectivement d'ordres $k_1 > k_2 > \ldots > k_{i+1}$.

Si $k_1 < k-1$, on adjoint au système S'_{k-1} les équations obtenues en dérivant les équations $(8)^1$, jusque $k-k_1-1$ fois par rapport à x, on met le système obtenu sous forme régulière, s'il ne l'est déjà; on est ainsi amené à remplacer certaines des équations $\frac{d^{k-k_1-1}b}{dx^{k-k_1-1}} = 0$ par d'autres d'ordres moindres que l'on répartit en groupes comme on l'a fait pour les équations (8); on dérive les équations de chacun de ces groupes par rapport à x un nombre de fois tel que les équations d'ordre le plus élevé que l'on obtient soient d'ordre $k-1$ et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à un système d'ordre $k-1$ mis sous forme régulière; on considère alors les dérivées d'ordre k provenant d'une dérivation par rapport à x des équations d'ordre $k-1$ que l'on a obtenues en partant des $b_i = 0$, on les adjoint à s'_k, et sur le système obtenu on raisonne comme sur S_k. Il peut arriver que les équations que l'on adjoint ainsi à s'_k soient en nombre inférieur à r, ou que l'on soit arrêté en route par l'apparition d'une relation non identique entre x et y (¹).

Si $r = 1$, et qu'il se présente une relation entre z, x et y seules, la fonction z de x et y définie par cette relation est solution de S_k : une réduction ultérieure n'est plus possible puisque les équations d'un ordre quelconque du nouveau système sont nécessairement indépendantes par rapport aux dérivées de cet ordre; ce cas ne peut se produire que si $p = k+1$.

Lorsqu'on aboutit à un système complètement intégrable S_k^k, il arrive que l'on n'ait pas besoin de s'occuper des équations de ce système jusqu'à l'ordre k et que le système $S_{k'}^{k}$, $k' < k$ soit lui-même complètement intégrable; du reste, en cours de route, il peut se présenter des systèmes d'ordres inférieurs à k qui jouissent des propriétés

(¹) Certaines des équations nouvelles que l'on introduit peuvent se décomposer; il faut alors considérer séparément tous les systèmes que l'on obtient en ne considérant qu'un facteur de la décomposition : chacun de ces systèmes jouit des mêmes propriétés que s'il ne provenait pas d'une décomposition.

d'un système S et qui sont formés des équations jusqu'à un ordre inférieur à k du système auquel on est arrivé : cela permet, naturellement, de simplifier les calculs en s'occupant seulement du système de l'ordre le moins élevé.

9. *Application.* — Revenons au système A ; nous supposons que $[f, F] = 0$ en soit conséquence algébrique et qu'il en soit de même de $D = 0$. D'après ce qui précède, il existe en général un système, que nous désignons par la notation B, complètement intégrable et qui admet toutes les solutions non singulières de A.

Pour former le système B, nous distinguons les cas suivant le nombre de directions de caractéristiques communes aux équations (1); s'il y a r directions communes, nous obtiendrons un système B^r : comme différentes circonstances peuvent se présenter encore, nous emploierons la notation B^r_ρ pour désigner les différents systèmes auxquels on peut être conduit; plus ρ sera grand, plus la réduction sera compliquée.

Considérons d'abord le cas où l'équation (e) est du premier ordre : $m = 1$; le système donné est équivalent à celui qui est formé par l'équation (e) et une équation d'ordre $M' < M$, et ce nouveau système est complètement intégrable; il peut se faire que le système donné soit impossible parce que l'on déduit de (A) une relation ne contenant que x et y, comme aussi que l'équation du premier ordre soit intégrale intermédiaire de celle d'ordre M.

Pour donner une idée de la façon dont les choses se passent dans les cas les plus généraux, considérons une équation du troisième ordre et une du quatrième :

$$(A_3)\quad \left\{\begin{array}{l} f = 0; \\ \dfrac{df}{dx} = 0, \quad \dfrac{df}{dy} = 0; \qquad\qquad F = 0, \\ \dfrac{d^2 f}{dx^2} = 0, \quad \dfrac{d^2 f}{dx\,dy} = 0, \quad \dfrac{d^2 f}{dy^2} = 0 \qquad\qquad \dfrac{dF}{dx} = 0, \quad \dfrac{dF}{dy} = 0, \\ \dfrac{d^3 f}{dx^3} = 0, \quad \dfrac{d^3 f}{dx^2\,dy} = 0, \quad \dfrac{d^3 f}{dx\,dy^2} = 0, \quad \dfrac{d^3 f}{dy^3} = 0; \quad \dfrac{d^2 F}{dx^2} = 0, \quad \dfrac{d^2 F}{dx\,dy} = 0, \quad \dfrac{d^2 F}{dy^2} = 0 \end{array}\right.$$

Supposons d'abord que les deux équations admettent une direction commune de caractéristiques; le système (A_3) se trouve sous forme

régulière et des équations d'ordre 6 de (A_6), on déduit une équation (ε) d'ordre inférieur à 6. Si (ε) est du cinquième ordre, il suffit de l'adjoindre à (A_5) et l'on obtient un système complètement intégrable (B_1^1). Supposons que (ε) soit du quatrième ordre, $\varphi_4 = 0$, nous formons le système (B_2^1) :

$$(B_2^1)\quad \left\{\begin{array}{lllllll} f = 0; & & & & & & \\ \dfrac{df}{dx} = 0, & \dfrac{df}{dy} = 0; & & F = 0; & & \varphi_4 = 0; & \\ \dfrac{d^2 f}{dx^2} = 0, & \dfrac{d^2 f}{dx\,dy} = 0, & \dfrac{d^2 f}{dy^2} = 0, & \dfrac{dF}{dx} = 0, & \dfrac{dF}{dy} = 0; & \dfrac{d\varphi_4}{dx} = 0; & \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \end{array}\right.$$

la ligne pointillée pour les équations du sixième ordre.

Si ce système se trouve sous forme régulière, il est complètement intégrable ; sinon $\dfrac{d\varphi_4}{dx} = 0$ est conséquence algébrique des autres équations de (B_2^1) et d'une autre d'ordre inférieur à 5 ; supposons, pour préciser, cette dernière du deuxième ordre $\psi_2 = 0$; nous formons le système

$$(B_3^1)\quad \left\{\begin{array}{lllllll} f = 0, & & & & & & \varphi_4 = 0, \\ & & & & & & \dfrac{d\varphi_4}{dx} = 0; \\ \dfrac{df}{dx} = 0, & \dfrac{df}{dy} = 0 & & F = 0 & & \varphi_4 = 0; & \dfrac{d^2\varphi_4}{dx^2} = 0 \\ \dfrac{d^2 f}{dx^2} = 0 & \dfrac{d^2 f}{dx\,dy} = 0 & \dfrac{d^2 f}{dy^2} = 0; & \dfrac{dF}{dx} = 0, & \dfrac{dF}{dy} = 0 & & \dfrac{d^3\varphi_4}{dx^3} = 0, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \end{array}\right.$$

Si ce système se trouve sous forme régulière, il est complètement intégrable; sinon, on continue la réduction suivant le même procédé.

Occupons-nous maintenant du cas où les deux équations admettent, par exemple, deux directions communes de caractéristiques : des équations d'ordre 6 de (A_6), on déduit deux équations d'ordre inférieur à 6; d'ailleurs, le système (A_5) ne se trouve pas sous forme régulière, ses équations d'ordre 5 ne sont plus indépendantes et l'on en déduit une équation, que nous supposons du troisième ordre, $\chi_3 = 0$. Le système (A_4) se trouve, par contre, sous forme régulière. Nous formons

alors le système (B_2^2) :

$$(B_2^2)\quad \begin{cases} f = 0; & \chi_3 = 0; \\ \dfrac{df}{dx} = 0, \quad \dfrac{df}{dy} = 0; & F = 0; \quad \dfrac{d\chi_3}{dx} = 0, \quad \dfrac{d\chi_3}{dy} = 0; \\ \dfrac{d^2 f}{dx^2} = 0, \quad \dfrac{d^2 f}{dx\,dy} = 0, \quad \dfrac{d^2 f}{dy^2} = 0; & \dfrac{dF}{dx} = 0; \quad \dfrac{d^2\chi_3}{dx^2} = 0, \quad \dfrac{d^2\chi_3}{dx\,dy} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; & \ldots\ldots; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Si ce système se trouve sous forme régulière, il est complètement intégrable et il suffit d'y considérer les équations jusqu'à l'ordre 4. Sinon, deux sortes de circonstances peuvent se produire, suivant que de ses équations d'ordre 4 on en peut déduire une ou deux d'ordre inférieur à 4 et, suivant le cas, on considérera des systèmes tels que les suivants :

$$\begin{cases} f = 0; & \chi_3 = 0; \quad G_1 = 0; \\ \dfrac{df}{dx} = 0, \quad \dfrac{df}{dy} = 0; & F = 0; \quad \dfrac{d\chi_3}{dy} = 0, \quad \dfrac{dG_1}{dx} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; & \ldots\ldots\ldots; \quad \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} f = 0; & \chi_3 = 0; \quad H_2 = 0; \quad \dfrac{dH_2}{dx} = 0, \\ \dfrac{df}{dx} = 0, \quad \dfrac{df}{dy} = 0; & F = 0; \quad \dfrac{dH_2}{dx} = 0, \quad \dfrac{d^2 H_2}{dx^2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; & \ldots\ldots; \quad \ldots\ldots; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

dans ce dernier système, il suffit de considérer les équations jusqu'au troisième ordre; et ainsi de suite.

Il pourra se faire que l'on arrive à un système en involution d'ordre 1 ou 2, ou que l'on constate l'impossibilité du système donné par l'apparition d'une relation ne contenant que x et y.

Lorsque les deux équations (1) sont du même ordre et admettent les mêmes directions de caractéristiques, leur système est équivalent à celui qui est formé par l'une d'elles et une autre d'ordre moindre, sur lequel on poursuit la discussion comme on l'a indiqué précédemment. Un tel cas n'est jamais à envisager, si l'on opère sur des équations à coefficients numériques, parce que l'on peut former immédiatement la nouvelle équation dont il vient d'être question; mais il se présentera dans certaines discussions où la résolution algébrique des équations est impossible.

10. *Les systèmes* $\mathbf{T}$. — Nous avons montré jusqu'ici que la relation

$$[f, F] = 0 \tag{3}$$

est la condition de complète intégrabilité du système (A) lorsque les deux équations n'admettent pas de direction commune de caractéristique, puis que, si cette relation est conséquence algébrique de (A), on déduit de (A) un système B_ρ^r complètement intégrable. La formation de B_ρ^r comporte une suite d'opérations qui n'exigent nullement que la condition relative au crochet soit satisfaite. Il est clair qu'en général, le système que l'on peut construire à partir de deux équations admettant des directions communes de caractéristiques n'est pas complètement intégrable; nous allons montrer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il le soit est que la relation (3) en soit conséquence algébrique. En vue d'une application ultérieure, nous nous proposons un problème un peu plus général, dont la solution d'ailleurs n'est pas plus compliquée.

Nous considérerons un système T_k constitué de la même façon que S_k; nous disons qu'il jouit des propriétés d'un système $\mathbf{T}$ lorsqu'il jouit de propriétés analogues à celles d'un système $\mathbf{S}$, mais en tenant compte au besoin de relations qui n'y figurent pas :

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 0, \quad \ldots \quad U_r = 0$$

nous en désignons l'ensemble par U; et par $U^{(K)}$ l'ensemble des U et de leurs dérivées prises *par rapport à* x jusqu'à l'ordre K.

Comme notations, le seul changement consiste à remplacer partout les lettres S, s par T, t, les indices gardant la même signification. Il importe toutefois de préciser que les relations $\frac{du_i}{dx} = 0$ $(i < p)$ sont conséquences algébriques de T_{k+1} et de U, les relations $\frac{d^2 u_i}{dx\,dy} = 0$ $(i < p)$ le sont de T_{k+2} et U, etc.

Lorsque le système T_k se trouve, même moyennant U, sous forme régulière, ces dernières relations en constituent les conditions de complète intégrabilité. Nous supposons que si les équations de quelque ordre ρ de T_k ne sont pas indépendantes par rapport aux dérivées d'ordre ρ, c'est peut-être grâce à des équations figurant dans T_k, mais non à des équations figurant dans U; ce point est essentiel : on omettra peut-être ainsi certaines solutions singulières, que, dans certains cas simples, nous chercherons directement.

Le système (A) jouit évidemment des propriétés d'un système T moyennant (3).

Supposons que T_k ne se trouve pas sous forme régulière et effectuons la réduction comme nous l'avons faite pour S_k : les relations $\frac{db_i}{dy} = 0$ sont conséquences algébriques de T_{k+1} et de U, les $\frac{d^2 b_i}{dx\,dy}$ le sont de T_{k+2} et U', etc.

Soit $T_k^{(K)}$ le système auquel on aboutit et qui se trouve sous forme régulière. Nous allons montrer que, *pour que* $T_k^{(K)}$ *soit complètement intégrable, il suffit* (¹) *que les* U, *supposées d'ordre au plus égal à* k, *en soient conséquences algébriques.*

En effet, les équations dérivées une fois par rapport à x et à y des équations $T_k^{(K)}$ qui sont d'ordre au plus égal à $k+1$, sont conséquences algébriques d'équations figurant dans $U^{(k)}$ et $T_{k-K}^{(k)}$, ou encore d'équations figurant toutes dans $T_{k+K}^{(k)}$, car les U étant conséquence de $T_k^{(k)}$, les $U^{(K)}$ le sont de $T_{k+K}^{(K)}$, système qui contient certainement $T_k^{(K)}$ et les dérivées de ses équations, jusqu'à l'ordre K, par rapport à x.

D'autre part, d'équations d'ordre quelconque ρ de $T_{k-K}^{(k)}$, on ne peut déduire d'équations d'ordre inférieur à ρ, même en tenant compte de $T_{\rho-1}^{(K)}$. Les équations déduites de $T_k^{(K)}$ par une dérivation et qui sont d'ordre $k+1$ au plus, ne peuvent être conséquences d'équations d'ordre supérieur à $k+1$ figurant dans $T_{k-K}^{(k)}$; elles ne le sont donc que d'équations figurant dans $T_{k+1}^{(K)}$, ce qui démontre la proposition énoncée.

Si, parmi les relations U, il en est qui s'obtiennent au moyen d'autres prises parmi elles, soit $\overline{U}$ et de leurs dérivées par rapport à x seul, moyennant au besoin $T_k^{(K)}$, il suffit que les $\overline{U}$ soient conséquences algébriques de $T_k^{(K)}$ pour que ce système soit complètement intégrable ; on le voit en considérant un $T_{k+K'}^{(k)}$ où $K' > k$.

De même si, parmi les U, il s'en trouve jusqu'à l'ordre $k' > k$, on constate qu'il suffit qu'elles soient conséquence de $T_k^{(k)}$ pour que le système $T_k^{(K)}$ soit complètement intégrable.

11. *Applications : Une équation du premier ordre et une du deuxième ordre.* — Soient

$$(A) \qquad \begin{cases} f(x, y, z, p, q) = 0, \\ \dfrac{df}{dx} = 0, \qquad \dfrac{df}{dy} = 0, \qquad U(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0. \end{cases}$$

(¹) Ces conditions sont, d'ailleurs, évidemment nécessaires.

Ici

$$D = F_t f_q^2 - F_q f_p f_q - F_p f_q^2.$$

Lorsque $D \neq 0$, le système (A) se trouve sous forme régulière; il est complètement intégrable si

$$[f, F] = f_t\left(\frac{dF}{dt}\right) + f_q\left(\frac{dF}{dq}\right) - F_t\left(\frac{d^2 f}{dt^2}\right) - F_q\left(\frac{d^2 f}{dt\,dq}\right) - F_p\left(\frac{d^2 f}{dq^2}\right) = 0$$

en est conséquence algébrique.

Si la relation $D = 0$ est vérifiée, soit identiquement, soit comme conséquence de (A), ce système est équivalent à celui que l'on obtient en y substituant, à $F = 0$, une équation d'ordre moindre $\varphi = 0$, et l'on est ramené à la résolution de deux équations du premier ordre. Formons le système (B') :

$$(B') \quad \begin{cases} f = 0; & \varphi = 0; \\ \dfrac{df}{dt} = 0, & \dfrac{df}{dq} = 0; \quad \dfrac{d\varphi}{dt} = 0. \end{cases}$$

La relation $[f, F] = 0$ est équivalente à $[f, \varphi] = 0$, ou encore à $\frac{d\varphi}{dq} = 0$, en tenant compte naturellement des équations écrites, et constitue la condition de complète intégrabilité si $f = 0$ et $\varphi = 0$ permettent de calculer p et q; sinon l'on raisonne comme plus haut. Les dérivées de l'équation $\varphi = 0$ peuvent se calculer au moyen des relations

$$f_q\left(\frac{dF}{dt}\right) + F\left(\frac{d^2 f}{dt^2}\right) + F_q\frac{f_q}{f_q}\left(\frac{d^2 f}{dt\,dq}\right) = 0,$$

$$f_q\left(\frac{dF}{dq}\right) + F\left(\frac{d^2 f}{dt\,dq}\right) + F_q\frac{f_q}{f_q}\left(\frac{d^2 f}{dq^2}\right) = 0$$

en supposant comme toujours $f_q \neq 0$.

Deux équations du second ordre. — Soient

$$(A) \quad \begin{cases} f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, & F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0; \\ \dfrac{df}{dx} = 0, \quad \dfrac{df}{dy} = 0; & \dfrac{dF}{dx} = 0, \quad \dfrac{dF}{dy} = 0 \end{cases}$$

et

$$D = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & 0 \\ 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 & 0 \\ 0 & F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$[f, F] = f_1\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right) + f_2\left(\frac{d^2F}{dx\,dy}\right) + f_3\left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)$$
$$- F_1\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right) - F_2\left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right) - F_3\left(\frac{d^2f}{dy^2}\right).$$

Si $D \neq 0$, (A) est complètement intégrable si $[f, F] = 0$ en est conséquence algébrique.

Si $D = 0$, deux cas sont à distinguer, suivant qu'il y a une ou deux directions communes de caractéristiques.

1° Une direction commune : des équations du troisième ordre de (A) on déduit une équation d'ordre inférieur à 3 : $\varphi_i = 0$, $i = 2, 1$ ou 0.

Formons, suivant les cas, les systèmes (B_1^1), (B_2^1) ou (B_3^1) :

$$(B_1^1)\quad \left\{\begin{array}{lllll} & & & & \varphi_2 = 0 \\ & & & \varphi_1 = 0 & \dfrac{d\varphi_2}{dx} = 0 \\ f = 0; & F = 0 & \varphi_2 = 0 & \dfrac{d\varphi_1}{dx} = 0 & \dfrac{d^2\varphi_2}{dx^2} = 0 \\ \dfrac{df}{dx} = 0,\ \dfrac{df}{dy} = 0; & \dfrac{dF}{dx} = 0 \text{ avec } & \dfrac{d\varphi_2}{dx} = 0 \text{ ou } & \dfrac{d^2\varphi_1}{dx^2} = 0 \text{ ou } & \dfrac{d^3\varphi_2}{dx^3} = 0 \end{array}\right.$$

Si $f = 0$, $F = 0$, $\varphi_2 = 0$ permettent de calculer r, s, t : le système (B_1^1) admet comme condition de complète intégrabilité $[f, F] = 0$, qui est équivalente à $\frac{d\varphi_2}{dx} = 0$; il suffit, pour l'intégrer, de s'occuper de ses équations du second ordre. Si le calcul de r, s, t est impossible, on doit considérer le système (B_2^1) avec $\varphi_1 = 0$; la condition $[f, F] = 0$ est équivalente à $\frac{d\varphi_1}{dx} = 0$, et, si $f = 0$, $F = 0$, $\frac{d\varphi_1}{dx} = 0$ permettent de calculer r, s, t, elle constitue la condition d'intégrabilité de (B_2^1), et il suffit de s'occuper de l'équation de premier ordre et de celles du second : soit (B_3^1) leur ensemble. Lorsque les trois équations du second ordre ne sont pas indépendantes, le système (B_3^1) jouit cependant des propriétés d'un système $\mathbf{T}$, moyennant une relation du second ordre.

et sa dérivée par rapport à x : on remplace $\frac{d\varphi_1}{dx} = 0$ par une équation du premier ordre $\psi_1 = 0$,

$$(B_3^1) \quad \begin{cases} \varphi_1 = 0, & \psi_1 = 0, \\ f = 0, \quad F = 0, & \frac{d\varphi_1}{dx} = 0; \end{cases}$$

si les deux équations du premier ordre permettent de calculer p et q, la condition d'intégrabilité est fournie par la relation $\frac{d\varphi_1}{dy} = 0$; si le calcul de p et q est impossible, la fonction z, que l'on est conduit à calculer, est solution des équations données, sous la seule condition que $\frac{d\varphi_1}{dy} = 0$ soit conséquence de (B_3^1).

Plaçons-nous, maintenant, dans le cas où $\varphi_1 = 0$ ne contient ni p, ni q, c'est-à-dire où l'on doit considérer le système (B_3^1), φ_0 contenant x, y et z seulement. La fonction z, ainsi définie, serait solution du système donné si les deux relations $\frac{d\varphi_0}{dx} = 0$, $\frac{d\varphi_0}{dy} = 0$ se réduisaient à une seule, ce qui est, évidemment, impossible; elle ne pourra l'être que si $\frac{d^2\varphi_0}{dx\,dy} = 0$ et $\frac{d^2\varphi_0}{dy^2} = 0$ sont vérifiées : ce que l'on pouvait écrire *a priori*.

Enfin, il peut arriver aussi que le système donné soit impossible, ou encore, en involution d'ordre 1.

2° Deux directions communes de caractéristiques : alors, les relations

$$\frac{f_x}{F_x} = \frac{f_y}{F_y} = \frac{f_z}{F_z} \quad (1)$$

sont conséquences des équations données, qui forment un système équivalent à celui que l'on obtient en y remplaçant l'une d'entre elles : $F = 0$ par exemple, par une équation d'ordre moindre, et l'on est ramené à discuter un système formé d'une équation du premier et d'une du second :

$$(B_3^2) \quad \begin{cases} \varphi = 0; \\ f = 0, \quad \frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dy} = 0; \\ \frac{df}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} = 0; \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2\varphi}{dx\,dy} = 0; \end{cases}$$

la relation $|f, F| = 0$ est équivalente à $|f, \varphi| = 0$, c'est-à-dire à une

relation du second ordre en z; les deux équations $\frac{d\varphi}{dx} = 0$, $\frac{d\varphi}{dy} = 0$ le sont respectivement à

$$F_t\left(\frac{df}{dx}\right) - f_t\left(\frac{dF}{dx}\right) = 0 \qquad \text{et} \qquad F_t\left(\frac{df}{dy}\right) - f_t\left(\frac{dF}{dy}\right) = 0;$$

nous supposons, ainsi, que l'une des quantités f_t, F_t n'est pas nulle.

Deux équations d'ordre m. — Nous signalons uniquement le cas où les deux équations ont m directions communes de caractéristiques, c'est-à-dire où elles entraînent les relations

$$(D^m) \qquad \frac{\dfrac{\partial f}{\partial p_{m,0}}}{\dfrac{\partial F}{\partial p_{m,0}}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial p_{m-1,0}}}{\dfrac{\partial F}{\partial p_{m-1,0}}} = \ldots = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial p_{0,m}}}{\dfrac{\partial F}{\partial p_{0,m}}};$$

leur système est équivalent à celui que l'on obtient en y remplaçant une des équations par une autre d'ordre inférieur à m : $\varphi = 0$.

$$(B_1^m) \quad \left\{ \begin{array}{llll} & & \varphi = 0; & \\ f = 0; & & \dfrac{d\varphi}{dx} = 0, \ \dfrac{d\varphi}{dy} = 0; & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots; & & \ldots\ldots\ldots\ldots; & \\ \dfrac{d^{m-2}f}{dx^{m-2}} = 0, \ \ldots, \ \dfrac{d^{m-2}f}{dy^{m-2}} = 0; & \dfrac{d^{m-1}\varphi}{dx^{m-1}} = 0, & \dfrac{d^{m-1}\varphi}{dx^{m-2}\,dy} = 0, & \dfrac{d^{m-1}\varphi}{dy^{m-1}} = 0; \\ \dfrac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}} = 0, \ \ldots, \ \dfrac{d^{m-1}f}{dy^{m-1}} = 0; & \dfrac{d^{m}\varphi}{dx^{m}} = 0, & \dfrac{d^{m}\varphi}{dx^{m-1}\,dy} = 0, & \dfrac{d^{m}\varphi}{dx\,dy^{m-1}} = 0. \end{array} \right.$$

La relation $[f, F] = 0$ est équivalente à $[f, \varphi] = 0$ et les deux équations $\frac{d\varphi}{dx} = 0$, $\frac{d\varphi}{dy} = 0$, respectivement à

$$\frac{\partial F}{\partial p_{0,m}}\left(\frac{df}{dx}\right) - \frac{\partial f}{\partial p_{0,m}}\left(\frac{dF}{dx}\right) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial p_{0,m}}\left(\frac{df}{dy}\right) - \frac{\partial f}{\partial p_{0,m}}\left(\frac{dF}{dy}\right) = 0.$$

Remarque. — Pour former les différents systèmes (B) que nous avons considérés, nous avons supposé que nous pouvions effectuer les éliminations nécessaires; cela est indispensable pour l'intégration effective du système donné. Mais, dans les questions dont nous aurons à nous occuper, et qui se présentent comme des discussions de

systèmes tels que (1), il sera impossible d'effectuer ces éliminations, et cela nous sera d'ailleurs inutile. Le cas s'est présenté déjà pour deux équations du premier ordre admettant même direction de caractéristique. En voici un autre :

Considérons deux équations du deuxième ordre admettant deux directions communes de caractéristique. Nous avons indiqué comment est formé le système (B_1^2); on peut aussi énoncer le résultat de la façon suivante : si les équations (C_1^2) :

$$(C_1^2)\quad f = 0,\quad F = 0,\quad F_1\left(\frac{df}{dx}\right) + f_1\left(\frac{dF}{dx}\right) = 0,\quad F_1\left(\frac{df}{dy}\right) + f_1\left(\frac{dF}{dy}\right) = 0$$

permettent d'exprimer r, s, t, et p ou q au moyen de x, y, z, et q ou p, et si les fonctions ainsi obtenues R, S, T, et P ou Q satisfont identiquement à la relation $[f, F] = 0$ (qui, moyennant les équations considérées, se réduit au deuxième ordre), ces fonctions permettent de former un système complètement intégrable que l'on peut disposer suivant le schéma fourni par (B_1^2) : une équation du premier ordre, trois équations du second; par exemple :

$$p = P(x, y, z, q)$$
$$r = R,\quad s = S,\quad t = T.$$

Dans la suite, nous désignerons par C_k^l le système d'équations qui permet de former celles qui figurent dans B_k^l; ce sont les systèmes C qui interviendront, la plupart du temps, directement dans nos calculs; les systèmes B indiquant quel doit être le schéma de la résolution, quant aux nombres des équations de chaque ordre.

Nous avons pris un exemple simple; il suffira, sans doute, à donner une idée de la façon dont on opérera dans un cas plus compliqué.

Dans le cas où $r < m$, le premier système C_1^r, que l'on considère, se confond avec le premier système B_1^r; des équations $(e_m)_M$, $(E_M)_{m-r}$, on déduit une relation d'ordre $m + M - r$ exactement, des équations d'ordre $m + M - r + 1$, deux d'ordre $m + M - r$, même moyennant $(e_m)_{M-r}$, $(E_M)_{m-r}$, ...

12. *Sur certaines solutions singulières des systèmes considérés.* — Les résultats que nous venons d'établir peuvent être appliqués avantageusement aux systèmes qui définissent les solutions

singulières quand elles existent. Nous ne nous occuperons que des cas les plus simples.

Considérons d'abord deux équations, l'une du premier, l'autre du deuxième ordre, n'admettant pas de direction commune de caractéristiques :

$$(\mathrm{A})\qquad \begin{cases} f(x, y, z, p, q) = 0, \\ \dfrac{df}{dx} = 0, \qquad \dfrac{df}{dy} = 0, \qquad \mathrm{F}(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0. \end{cases}$$

Les solutions que nous avons déterminées dans ce cas n'annulent pas D : $\mathrm{D} = \mathrm{F}_r f_q^2 - \mathrm{F}_s f_p f_q + \mathrm{F}_t f_p^2$; celles qui annulent D sont des solutions singulières; supposons qu'il en existe telles que $f_q \neq 0$, et désignons-les par σ.

Rappelons que, si $\mathrm{D} = 0$ était conséquence de (A), nous aurions à former le système (B_1^1) :

$$(\mathrm{B}_1^1)\qquad \begin{cases} f = 0; \qquad \varphi = 0; \\ \dfrac{df}{dx} = 0, \qquad \dfrac{df}{dy} = 0; \qquad \dfrac{d\varphi}{dx} = 0, \end{cases}$$

équivalent à celui que l'on déduit de (C_1^1) :

$$(\mathrm{C}_1^1)\qquad \begin{cases} f = 0, \\ \dfrac{df}{dx} = 0, \qquad \dfrac{df}{dy} = 0, \qquad \mathrm{F} = 0, \\ \mathrm{H} - f_p\left(\dfrac{df}{dx}\right) - \mathrm{F}_t\left(\dfrac{d^2 f}{dx^2}\right) - \mathrm{F}_t \dfrac{f_p}{f_q}\left(\dfrac{d^2 f}{dx\,dy}\right) = 0. \end{cases}$$

Les solutions σ satisfont à $\mathrm{D} = 0$, $[f, \mathrm{F}] = 0$ et aux équations figurant dans (C_1^1). Elles satisfont, par conséquent, à une équation du premier ordre $\psi = 0$ déduite des équations du deuxième ordre de (C_1^1) : si $\mathrm{F} = 0$ est linéaire par rapport à r, s, t, $\psi = 0$ se déduit de $\dfrac{df}{dx} = 0$, $\dfrac{df}{dy} = 0$, $\mathrm{F} = 0$, comme $\psi = 0$; si F n'est pas linéaire en r, s, t, pour former cette équation $\psi = 0$, on peut, par exemple, tirer r, s, t de $\dfrac{df}{dy} = 0$, $\mathrm{F} = 0$, $\mathrm{H} = 0$, et porter dans $\dfrac{df}{dx} = 0$.

Dans tous les cas, les équations dérivées de $\psi = 0$ par rapport à x et à y sont équivalentes, moyennant $\mathrm{D} = 0$, et les relations

figurant dans (C_1^1) à

$$H = 0, \qquad K = f_x\left(\frac{df}{dy}\right) - F_x\left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right) - F_y\frac{f_x}{f_y}\left(\frac{d^2f}{dy^2}\right) = 0.$$

Formons, par exemple, le système

$$(9) \qquad \begin{cases} f = 0, & \psi = 0, \\ \dfrac{df}{dy} = 0, & F = 0, \quad H = 0. \end{cases}$$

Nous allons voir qu'il jouit des propriétés d'un système **T** moyennant $D = 0$, $[f, F] = 0$, et leurs dérivées par rapport à x. Nous n'insistons que sur les points suivants : la relation $\frac{d\psi}{dx} = 0$ est, moyennant $D = 0$, conséquence des équations (9); la relation $\frac{d\psi}{dy} = 0$ est, dans les mêmes conditions, conséquence des équations (9) et de $K = 0$; or, cette dernière relation, à cause de la façon même dont on calcule l'expression $[f, F]$ et des hypothèses faites, est conséquence des relations (9); donc $\frac{d\psi}{dy} = 0$ est, moyennant $D = 0$ et $[f, F] = 0$, conséquence de (9). Les équations du troisième ordre, déduites de (9), sont, moyennant $D = 0$, $[f, F] = 0$ et leurs dérivées par rapport à x, conséquences de

$$\frac{d^2f}{dx\,dy} = 0, \qquad \frac{d^2f}{dy^2} = 0, \qquad \frac{dF}{dx} = 0, \qquad \frac{dH}{dx} = 0,$$

puisque $\frac{d^2\psi}{dx\,dy} = 0$ peut être obtenue par dérivation de $\frac{d\psi}{dx} = 0$ par rapport à x.

Si $f = 0$ et $\psi = 0$ permettent de calculer p et q, si, de plus, $D = 0$ et $[f, F] = 0$ sont conséquences de (9) ou de C^1, on obtient des intégrales dépendant d'une constante arbitraire, qui sont solutions singulières des équations données. Si $f = 0$ et $\psi = 0$ ne permettent pas de calculer p et q, on poursuit la réduction comme il a été indiqué.

Considérons maintenant deux équations d'ordre m et M n'admettant pas de direction commune de caractéristique : on opérerait comme nous venons de le faire pour déterminer les solutions singulières annulant D, sans annuler tous ses mineurs du premier ordre.

Les solutions que l'on obtient ainsi sont engendrées par une famille de caractéristiques communes aux deux équations; il peut exister aussi des solutions singulières engendrées de plusieurs façons par des caractéristiques communes.

Soient, par exemple, deux équations du deuxième ordre :

$$(\mathrm{A})\qquad \left\{\begin{array}{ll} f = 0; & F = 0, \\ \dfrac{df}{dx} = 0, \quad \dfrac{df}{dy} = 0; & \dfrac{dF}{dx} = 0, \quad \dfrac{dF}{dy} = 0. \end{array}\right.$$

Nous admettons que ces deux équations ne possèdent pas les mêmes directions de caractéristiques (elles peuvent, toutefois, posséder une seule direction commune). Dans ce cas, nous ne nous sommes occupés que de solutions qui n'annulent pas les relations (D^2) :

$$(\mathrm{D}^2)\qquad \frac{F_x}{f_x} = \frac{F_y}{f_y} = \frac{F_t}{f_t}.$$

Si les (D^2) étaient conséquences de (A) nous aurions à former (B_1^2),

$$(\mathrm{B}_1^2)\qquad \left\{\begin{array}{lll} & & z = 0, \\ f = 0; & & \dfrac{dz}{dx} = 0, \quad \dfrac{dz}{dy} = 0, \\ \dfrac{df}{dx} = 0, \quad \dfrac{df}{dy} = 0; & & \dfrac{d^2z}{dx^2} = 0, \quad \dfrac{d^2z}{dx\,dy} = 0, \end{array}\right.$$

équivalent à celui que l'on déduit de

$$f = 0; \qquad F = 0, \qquad H = f_t\left(\frac{dF}{dx}\right) - F_t\left(\frac{df}{dx}\right) = 0,$$

$$\frac{df}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} = 0; \qquad [H]_t = f_t\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right) - F_t\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right) = 0,$$

$$K = f_t\left(\frac{dF}{dy}\right) - F_t\left(\frac{df}{dy}\right) = 0;$$

$$[K] = f_t\left(\frac{d^2F}{dx\,dy}\right) - F_t\left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right) = 0.$$

Proposons-nous de rechercher, si elles existent, les solutions qui satisfont aux D^2, mais telles que $f_t \neq 0$. Ces solutions satisfont à $H = 0$, $K = 0$, donc à une équation du premier ordre : $\varphi = 0$; si f et F sont linéaires en r, s, t, on peut former $\varphi = 0$ au moyen de $f = 0$

et $F = 0$; si elles ne le sont pas, on pourra calculer r, s, t au moyen de $f = 0$, $H = 0$, $K = 0$ et porter dans $F = 0$.

Formons le système (10)

$$(10) \qquad \begin{cases} \psi = 0, \\ f = 0, \qquad H = 0, \qquad K = 0 \end{cases}$$

Il jouit, moyennant $[f, F] = 0$ et D^2, et leurs dérivées par rapport à x, des propriétés d'un système $\mathbf{T}$: la relation $\frac{d\psi}{dx} = 0$ est conséquence, moyennant D^2, de $f = 0$, $\psi = 0$ et $H = 0$; de même $\frac{d\psi}{dy} = 0$ l'est de $f = 0$, $\psi = 0$, $K = 0$. Les relations $\frac{dH}{dx} = 0$, $\frac{dK}{dy} = 0$ le sont de (10) et (11), moyennant D^2 et les dérivées par rapport à x :

$$(11) \qquad \frac{df}{dx} = 0, \qquad \frac{df}{dy} = 0, \qquad [H]_x = 0, \qquad [K]_x = 0.$$

$\frac{dH}{dy} = 0$ est conséquence, à cause de l'hypothèse $f_t \neq 0$, des équations (10) et (11) et de $[f, F] = 0$, sinon, on en déduirait une relation entre $\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2 f}{dx\,dy}\right)$, $\left(\frac{d^2 F}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2 F}{dx\,dy}\right)$ distincte de $[H]_x = 0$ et $[K]_x = 0$, ce qui est impossible; de même pour $\frac{dK}{dy} = 0$.

Si les équations (10), ou C^2, permettent de calculer l'une des dérivées premières et r, s, t, si D^2 et $[f, F] = 0$ sont conséquences de (10) et (11), ou de C^2, nous obtenons des solutions singulières des équations données qui dépendent de deux constantes arbitraires; sur chacune d'elles les caractéristiques des deux équations sont confondues.

Ceci s'étend au système formé par deux équations d'ordre m, pour les solutions singulières engendrées de m façons par des caractéristiques communes aux deux équations.

Les premières équations du système C^m sont

$$f = 0; \quad F = 0; \quad F_{\ldots}\left(\frac{df}{dx}\right) - f_{\ldots}\left(\frac{dF}{dx}\right) = 0, \quad F_{\ldots}\left(\frac{df}{dy}\right) - f_{\ldots}\left(\frac{dF}{dy}\right) = 0,$$

. . . . . .

Supposons que ces quatre équations permettent de calculer une

dérivée d'ordre $m-1$ et trois d'ordre m; on forme un système d'ordre $m+M-1$ composé comme B_1^m; si les relations

$$\frac{F_{\ldots}}{f_{p_{m-0}}} = \frac{F_{\ldots}}{f_{\ldots}} = \ldots = \frac{F_{\ldots}}{f_{\ldots}}$$

sont conséquences des quatre relations écrites, si, de plus, $[f, F] = 0$ l'est du système d'ordre $m+M-1$, ce dernier est complètement intégrable et fournit des solutions singulières des deux équations données. Si le calcul indiqué est impossible, le système d'ordre $m+M-1$ que l'on a considéré, ne se trouve pas sous forme régulière et l'on doit poursuivre sa réduction.

Exemple. — Considérons le système

$$f(s, t, q, z, r, x, y) = 0 \qquad F(s, t, q, z, r, x, y) = 0.$$

Les deux relations que nous adjoignons pour former C_1^2

$$f_t\left(\frac{dF}{dx}\right) - F_t\left(\frac{df}{dx}\right) = 0, \qquad f_t\left(\frac{dF}{dy}\right) - F_t\left(\frac{df}{dy}\right) = 0$$

contiennent seulement p en plus des arguments qui figurent dans f et F. Le système formé comme B_1^2 ne se trouve pas sous forme régulière, les trois équations du deuxième ordre n'y contenant pas r; des quatre relations écrites de C_1^2 nous tirons deux relations du premier ordre par quoi nous remplaçons deux des relations de C_1^2, puis nous adjoignons la dérivée de l'une d'elles par rapport à x, comme il résulte de la discussion de deux équations du premier et du deuxième ordre; c'est du moins le cas général, car il peut se faire qu'on obtienne une relation ne contenant que x, y et z. Comme condition d'intégrabilité, nous n'avons à considérer que $\frac{f_t}{F_t} = \frac{f_z}{F_z}$ et $[f, F] = 0$. La première ne peut être conséquence que des quatre relations écrites de C_1^2, puisqu'elle ne contient pas r.

Plus généralement, les conditions D^r qui expriment que les deux équations ont r directions communes de caractéristiques n'étant pas satisfaites comme conséquences de (A), nous nous sommes bornés jusqu'ici à rechercher les solutions n'annulant pas les D^r. Formons le système C^r dont il a été question; nous n'avons pas envisagé un seul système C^r, celui dont il s'agit est parfaitement déterminé par la sous-

titution du système (A), ou, s'il y a discussion, suivant les diverses hypothèses que l'on peut faire : ce sera le même système que celui qu'on écrirait si tous les D^r étaient nuls comme conséquences de (A); C^r_ρ. Si maintenant les D^r, ainsi que $[f, F] = 0$, sont conséquences de C^r_ρ, en résolvant algébriquement ce système suivant le schéma fournit par B^r_ρ, nous obtenons un système complètement intégrable.

Les solutions que nous avons obtenues sont des solutions singulières du système (A); elles peuvent coexister avec d'autres solutions dépendant d'un nombre fini ou infini de constantes arbitraires. Elles sont engendrées par des caractéristiques communes à $f = 0$ et $F = 0$. Considérons deux équations ayant r directions communes de caractéristiques et telle que le système B^r correspondant soit complètement intégrable; effectuons une transformation de contact quelconque : nous obtenons deux nouvelles équations pour lesquelles les équations qui donnent les directions des caractéristiques n'ont pas en général de racines communes; elles admettent cependant des intégrales communes qui sont des solutions singulières; elles peuvent admettre d'autres intégrales communes, car les deux équations que nous avons d'abord considérées, si elles n'admettent pas d'autres surfaces intégrales communes (comme solutions non singulières) peuvent admettre des courbes comme intégrales communes.

13. De tout ce qui précède, nous déduisons la méthode de discussion suivante : soient les deux équations d'ordres m et M :

$$(1) \qquad \begin{cases} [f(\rho_1, \rho_2, \tau) \ldots \rho_m] = 0, \\ [F(\rho_1, \rho_2, \tau) \ldots \rho_m] = 0. \end{cases}$$

Nous formons le système (A) et les relations

$$(3) \qquad [f, F] = 0; \qquad D^1; \qquad D^2 = 0; \qquad D^3 \qquad D^4 \qquad \ldots \qquad D^n.$$

1° D^1 n'est pas conséquence algébrique de (A); mais (3) l'est : (A) est complètement intégrable.

2° a. Formons le système $C^1_{\rho_1}$, ρ_1 dépendant de la forme de (A); si (3) et D^1 sont conséquences de $C^1_{\rho_1}$, le système $B^1_{\rho_1}$ est complètement intégrable.

a_1. Si (3) est déjà conséquence de (A) sans que D^1 le soit, (A) admet des solutions déjà indiquées (1°) et, en outre, celles de $B^1_{\rho_1}$ qui sont des solutions singulières.

a_2. Si D^1 est conséquence de (A), la seule condition d'intégrabilité de $B^1_{\rho_1}$ est (3) qui peut, du reste, être déjà conséquence de (A).

a_3. Le système $B^1_{\rho_1}$ peut admettre des solutions singulières.

b. Formons le système $C^2_{\rho_2}$, ρ_2 dépendant de la forme de (A); si (3) et D^2 sont conséquences de $C^2_{\rho_2}$, le système $B^2_{\rho_2}$ est complètement intégrable.

b_1. Si (3) est déjà conséquence de (A), sans que D^1 ou D^2 le soient, (A) admet les solutions (1°) et, en outre, celles de $B^2_{\rho_2}$ qui sont des solutions singulières.

b_2. Si (3) et D^1 sont conséquences algébriques de $C^1_{\rho_1}$, ce système fournit des solutions de (A) qui admet en outre celles de $C^2_{\rho_2}$.

b_3. Si D^2 sont conséquences algébriques de (A), la seule condition d'intégrabilité de $B^2_{\rho_2}$ est (3), qui peut être déjà conséquence algébrique de (A).

b_4. Le système $B^2_{\rho_2}$ peut en outre admettre des solutions singulières.

c. Formons le système $C^3_{\rho_3}$ et ainsi de suite jusque $C^r_{\rho_r}$.

3° Si D^1 n'est pas conséquence de (A), non plus que (3), on adjoint cette dernière équation à (A). On forme un système admettant deux conditions de complète intégrabilité que l'on discuterait suivant la méthode générale donnée.

Remarque. — Lorsque D^1 est conséquence algébrique de (A) et que les deux équations (1) n'ont qu'une direction commune de caractéristique, il peut être avantageux, comme nous le faisions tout naturellement avant de parler de solutions singulières, de grouper 1° et 2°, a_2.

Si les équations ont r directions communes de caractéristiques, on ne s'occupe que des systèmes C^r, C^{r+1}, ..., et l'on pourra ainsi grouper 1° avec un article convenable de la discussion de C^r.

Conclusion.

Observons d'abord que les systèmes successifs que nous avons à considérer dans la méthode de réduction que nous avons employée comprennent un nombre croissant d'équations, à moins que le nombre des équations de l'ordre maxima ne vienne à diminuer, auquel cas le système final, si les conditions d'intégrabilité sont satisfaites, admet des solutions dépendant d'une infinité de constantes arbitraires.

1° Lorsque la solution la plus générale du système (1) dépend d'un

nombre fini de constantes arbitraires, ce nombre est au plus égal à mM : si l'on sait *a priori* que le système (1) admet des solutions dépendant de plus de mM constantes arbitraires, il en admet qui dépendent d'une infinité de constantes arbitraires.

2° Si la solution la plus générale de (1) dépend de mM constantes arbitraires, les deux équations n'admettent pas de direction commune de caractéristique et leur crochet est nul, soit identiquement, soit comme conséquence de (A). Plus généralement, le système C^r que l'on déduit de (A) est déterminé d'après la forme des équations (1), soit C^r_ρ; on en déduit par des opérations purement algébriques un système B^r_ρ qui se trouve sous forme régulière, il est complètement intégrable si les D^r et $[f, F] = 0$ en sont conséquences algébriques. Le nombre des dérivées paramétriques de B^r_ρ est déterminé. Il arrive que l'on sache *a priori* que B^r_ρ est possible et admet des solutions dépendant d'un nombre connu de constantes arbitraires; si ce nombre est égal à celui des dérivées paramétriques de B^r_ρ, d'une part les conditions D^r sont satisfaites, soit identiquement, soit comme conséquences de B^r_ρ ou C^r_ρ, d'autre part le crochet des deux équations est nul dans les mêmes conditions.

3° Supposons que les deux équations dépendent de certaines arbitraires et que, certaines hypothèses étant faites sur ces arbitraires, on puisse construire un système B^r_ρ complètement intégrable. Si dans des hypothèses plus particulières, on obtient un système qui exige une réduction plus poussée, ce dernier système est complètement intégrable.

CHAPITRE II.

RECHERCHE DE TRANSFORMATIONS DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

Systèmes de deux équations à deux inconnues.

1. Soient deux équations à deux inconnues z et z' des deux variations indépendantes x et y :

$$(1)\qquad \begin{cases} f(x, y, z, \ldots, p_{\mu\mu}; z', \ldots, p_{\mu\mu}) = 0, \\ F(x, y, z, \ldots, p_{\mu M}; z', \ldots, p_{\mu M}) = 0. \end{cases}$$

Nous nous proposons, en nous appuyant sur les résultats du Cha-

pitre précédent, de déterminer des cas où l'élimination de chacune des inconnues entre les relations (1) conduit à une seule équation pour l'autre.

Supposons pour l'instant z déterminé, quelconque d'ailleurs; nous obtenons deux équations $\overline{(1)}$ en z', d'ordres m' et M'; formons le système (A') correspondant, d'ordre $m' + M' - 1$, les relations $\overline{(2)}$ et $\overline{(3)}$

$$(2) \qquad [f, F]_{z'} = 0,$$

$$(3) \qquad D' = 0.$$

(2) est d'ordre $m' + M' - 1$ en z' et, par rapport à z, son ordre est égal au plus grand des nombres $m' + M$, $m + M'$, car on n'est pas assuré que l'on a à la fois $m < M$, $m' < M'$.

Si (3) est conséquence algébrique de (A'), nous nous plaçons dans le cas où les conditions $D'^{r'}$ sont conséquences algébriques de (A') et les deux équations (1) en z' admettent toujours r' [1] directions communes de caractéristique; on forme un système $B'^{r'}$, comme il a été expliqué, lorsque c'est possible, mais plus généralement un système $C'^{r'}$ tel que $\overline{C'^{r'}}$ admette $\overline{B'^{r'}}$ comme schéma; si entre les équations (A') et (2), ou $C'^{r'}$ et (2), suivant le cas, on peut éliminer z' et ses dérivées qui y figurent, on obtient une relation

$$(4) \qquad U = 0$$

qui constitue une équation aux dérivées partielles en z, d'ordre au moins égal au plus grand des deux nombres $m + M'$, $m' + M$. A toute solution de cette équation, satisfaisant toutefois à certaines inéquations ($\overline{D'} \neq 0$, ou d'autres analogues), correspondent les solutions en z d'un système $\overline{A'}$ ou $\overline{B'^{r'}}$ complètement intégrable. Les fonctions z ainsi obtenues satisfont à un certain système d'équations aux dérivées partielles; pour l'obtenir, nous prolongeons le système A' ou $B'^{r'}$, et formons les dérivées successives de (4), puis éliminons, entre les équations obtenues, z et ses dérivées. Mais les équations que nous considérons ainsi sont les mêmes que celles qu'on obtient en opérant sur z comme nous l'avons fait sur z', pour trouver l'équation (4), et

[1] r' est un nombre positif inférieur au plus petit des deux nombres m' et M'.

il sera plus simple de suivre ce dernier procédé. Supposons que l'on arrive également à une seule équation

$$(4') \qquad U = 0;$$

les deux équations (4) et (4') se transforment l'une dans l'autre; à une solution de l'une correspondent, en général, des solutions de l'autre que l'on obtient par l'intégration d'un certain système complètement intégrable : $\overline{A}$ ou $\overline{B}$, $\overline{A}$ ou B'.

Il peut arriver que le système B' qui correspond à certaines solutions de (4), B'_ρ, soit moins général que B_ρ ($\rho_1 > \rho$); un tel système $B'^{\prime\prime}_{\rho_1}$ est également complètement intégrable et ses solutions satisfont au système trouvé pour z', qui peut se réduire à une seule équation (4'). Comme cas plus particulier encore, le système B' correspondant à certaines solutions de (4) peut être impossible ou en involution.

2. Occupons-nous maintenant d'appliquer d'une façon générale les résultats de la deuxième partie du tableau de discussion. Formons un des systèmes C_ρ que l'on doit considérer : ρ dépendant de r et de la forme des équations (1); si les conditions $D'^{(\rho)}$ ainsi que (2) s'expriment, grâce à $C'^{\prime}_{\rho}$, seulement au moyen de x, y, z et de ses dérivées, on en déduit un certain système en z; si ce système n'est pas impossible, à ses solutions correspondent certaines fonctions z données par l'intégration de $\overline{C_\rho}$. Ce système peut être équivalent à une seule équation et l'on cherche directement le système en z' correspondant, qui peut également se réduire à une équation. Cela ne suppose rien sur le résultat de la première partie de la discussion qui a pu procurer une équation (4) ou non. Dans le cas où cette équation (4) existe, elle peut avoir des solutions communes avec le système (ou l'équation) en z nouvellement obtenu; à ces solutions correspondent, outre les intégrales trouvées de $B'^{\prime\prime}_{\rho}$ [1], des intégrales singulières de ce système, données par l'intégration de $\overline{C_\rho}$.

[1] Ou d'un système $\overline{B}$ moins général.

Remarque. — Jusqu'ici, nous avons supposé qu'au cours de la formation du système B'', il ne s'était présenté aucune équation indépendante (moyennant les autres relations déjà écrites) de z' et de ses dérivées. Supposons que nous en rencontrions une : $g = 0$; nous pouvons continuer la réduction, sur les équations qui restent, comme si cette relation était identiquement nulle; admettons qu'il ne s'en présente plus de cette sorte jusqu'à ce que nous obtenions un système $\beta^{r'}$ qui se trouve sous forme régulière ou un système $\gamma^{r'}$ dont le schéma le soit. Le système $\beta^{r'}$ jouit des propriétés d'un système $\mathbf{T}$ moyennant (2), certaines de ses dérivées, $g' = 0$ et certaines de ses dérivées; mais nous avons remarqué que les deux dérivées premières de $g' = 0$ ne sont pas indépendantes [moyennant (2) et ses dérivées déjà considérées] et nous n'avons à conserver qu'une seule des dérivées de $g' = 0$ de chaque ordre. Le système total des conditions obtenues, considéré comme système en z, jouit des propriétés d'un système $\mathbf{S}$ et il peut se faire que ce système soit équivalent à une seule équation [1]. Ce cas se produit si les deux équations (1) admettent, quel que soit z, plusieurs directions communes de caractéristiques et que les relations qu'on déduit de A' ne contiennent pas les lettres accentuées; on retrouve un résultat que l'on pouvait obtenir directement [2].

Les transformations dont nous venons de parler jouissent de propriétés que nous établirons un peu plus loin relativement à des transformations plus générales.

3. *Exemple.* — Une classe de ces transformations, qui a déjà été souvent utilisée, correspond au cas où l'une des équations (1) est de la forme

$$z' = \varphi(x, y, z, \ldots, p_{n+1}); \tag{5}$$

on peut toujours admettre que l'autre est simplement une équation

---

[1] Le système B correspondant à une solution quelconque de cette équation est d'un ordre d'involution non nul.

[2] Pour obtenir cette équation, il suffit de considérer la relation du moindre ordre en z déduite de (A'), que l'on substitue à (2); nous appelons encore $F = 0$ l'équation en z qu'elle représente; celle qu'on déduit de (2) est conséquence de celle-là et de certaines de ses dérivées par rapport à x et y.

en z,

$$(6) \qquad \Phi(x, y, z, \ldots p_{0,M}) = 0;$$

pour que les relations (5) et (6) définissent une transformation, il suffit que l'élimination de z conduise à une seule équation en z'; cela ne se produira pas en général; on peut se proposer, en se donnant une forme simple de la fonction φ, de déterminer les équations (6) qui admettent la transformation définie par $z' = \varphi$.

Si l'on prend

$$(7) \qquad z = y,$$

il faut que (6) soit de la forme [1]

$$(8) \qquad t\varphi_2(x) + p'\varphi_1(x) + z\varphi_0(x) + \psi(x, z, q, s, t) = 0;$$

il lui correspond alors l'équation

$$(8') \qquad t\varphi_2(x) + p'\varphi_1(x) + z'\varphi_0(x) + \frac{\partial\psi}{\partial s} + \frac{\partial\psi}{\partial q}t + \frac{\partial\psi}{\partial t}s + \frac{\partial\psi}{\partial t}t = 0,$$

où l'on remplace q par z, s par p', t par q. A toute solution de (8) correspond une solution de (8'); à toute solution de (8) correspondent les solutions communes à (7) et à (8); différents cas sont à envisager suivant que

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_0 = 0, \quad \varphi_2 = 0; \qquad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_0 = 0, \quad \varphi_2 = 0;$$
$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_0 = 0, \quad \varphi_2 = 0,$$

comme il résulte de la discussion de deux équations du premier et du deuxième ordres.

L'équation (8') n'admet pas, en général, la transformation

$$(9) \qquad z' = q;$$

pour qu'elle l'admette, il faut que ψ soit linéaire en q et s; l'équation (8) admet alors la transformation

$$(10) \qquad z'' = t.$$

---

[1] Goursat, II_2, p. 242.

Mais l'équation (8) peut fort bien admettre la transformation (10) sans être de la forme que nous venons d'indiquer. Ainsi, considérons l'équation

$$(11)\qquad g = s - \frac{p}{y + X_1} + t\,\varphi_1\left(q - \frac{z}{y + X_2}, x, y\right) + q\,\frac{X_3}{y + X_1} + \varphi_2\left(q - \frac{z}{y + X_2}, x, y\right) = 0;$$

(10) et (11) sont deux équations du deuxième ordre en z, formons le système

$$(\mathrm{X})\qquad \begin{cases} g = 0, & t = z'', \\ \dfrac{dg}{dx} = 0, \quad \dfrac{dg}{dy} = 0, & \gamma = p'', \quad \delta = q'; \end{cases}$$

les deux équations admettent une direction commune de caractéristique; de $\frac{dg}{dy} = 0$ on déduit une équation d'ordre inférieur à 3 : elle est du premier ordre ; supposons que, dans g, nous ayons fait $t = z''$,

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dy} = p'' &- \frac{s}{y + X_1} + \frac{p}{(y + X_1)^2} + q'\,\varphi_1 \\ &+ z''\left\{\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\left[z'' - \frac{1}{y + X_2}\left(q - \frac{z}{y + X_2}\right)\right]\right\} + z\,\frac{X_3}{y + X_1} \\ &- q\,\frac{X_3}{(y + X_1)^2} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\left[z'' - \frac{1}{y + X_2}\left(q - \frac{z}{y + X_2}\right)\right] = 0; \end{aligned}$$

en se servant de $g = 0$, il vient

$$\begin{aligned} p'' &+ z''\,\frac{\varphi_1}{y + X_1} + \frac{\varphi_2}{y + X_1} \\ &- q'\,\varphi_1 + z\left\{\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\left[z'' - \frac{1}{y + X_2}\left(q - \frac{z}{y + X_2}\right)\right]\right\} \\ &+ z\,\frac{X_3}{y + X_1} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\left[z'' - \frac{1}{y + X_2}\left(q - \frac{z}{y + X_2}\right)\right], \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$h = q - \frac{z}{y + X_2} - h(x, y, z'', p'', q'') = 0.$$

D'autre part, le crochet des deux équations (10) et (11) est équi-

valent à $\frac{d^2g}{dy^2} = 0$, c'est-à-dire à

$$(12) \qquad z - \frac{1}{y + X_2} h - \frac{dh}{dy} = 0;$$

(12) représente une équation du deuxième ordre en z'' correspondant à (11); formons le système complètement intégrable équivalent à $\overline{A}$ qui permet de déterminer les fonctions z correspondant à une solution z'' de (12).

($\overline{A}$) est équivalent à

$$(B_1^1) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} & & h = 0, \\ g = 0, & t = z'', & \frac{dh}{dx} = 0. \end{array} \right.$$

Comme $\frac{dh}{dx} = 0$ ne contient pas r, on en déduit une équation du premier ordre : $l = 0$,

$$l = \frac{p}{y + X_1} - z^2 \varphi_1 - q \frac{X_1}{y + X_1} + \frac{\varphi_2}{y + X_1} - \frac{p^2}{y + X_1} - \frac{z X_2}{(y + X_1)^2} - \frac{dh}{dx} = 0.$$

(B_1^1) est équivalent à

$$(B_1^1) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} & & h = 0, \quad l = 0, \\ g = 0, & t = z'', & \frac{dl}{dx} = 0. \end{array} \right.$$

Les deux équations $\overline{h} = 0$ et $l = 0$ sont en involution, et à une solution de (12) correspondent en général des solutions de (11) dépendant d'une constante arbitraire.

En réalité, à l'équation (11) correspond l'équation obtenue par l'élimination de $q - \frac{z}{y + X_2}$ entre $\frac{dg}{dy} = 0$ et $\frac{d^2g}{dy^2} = 0$.

Il peut se faire qu'en tenant compte de ($\overline{A}$), $\frac{dg}{dy} = 0$ ne contienne pas $q - \frac{z}{y + X_2}$. Le calcul est aisé; on trouve que φ_1 ne doit pas contenir cette expression et que φ_2 doit être de la forme

$$X_1 \frac{y + X_2}{y + X_1} \left(q - \frac{z}{y + X_2} \right) + \psi(x, y).$$

A l'équation en z correspond alors une équation du premier ordre

en z'', à toute solution de laquelle correspondent les solutions du système en involution des deux équations du deuxième ordre $(\overline{11})$ et $(\overline{10})$.

Généralisation du problème de Bäcklund.

4. Nous nous proposons de déterminer deux surfaces (s) et (s') de telle sorte qu'il soit possible d'établir entre elles une correspondance ponctuelle satisfaisant à la condition qu'en deux points correspondants $M(x, y, z)$, $M'(x', y', z')$, les valeurs de x, y, x', y', z, z' et de certaines de leurs dérivées soient liées par quatre relations données

$$(13)\qquad F_i(x, y, z, \ldots, p_{0,m_i}; x', y', z', \ldots, p'_{0,m}) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3 \text{ et } 4).$$

A la surface (s) correspondent, quand elles existent, les intégrales communes à deux équations aux dérivées partielles obtenues de la façon suivante : on remplace, dans les relations (13), z et ses dérivées par les expressions en x et y qui définissent la surface (s); d'une façon générale, nous indiquerons le résultat obtenu par une telle substitution en surlignant d'un trait le symbole représentant les expressions ou les relations où elle a été effectuée [1]; on élimine x et y entre les relations $(\overline{13})$, ce qui procure les deux équations annoncées : $\varphi' = 0$, $\Phi' = 0$, sous certaines conditions qui doivent être respectées par les relations que l'on introduit par la suite.

Nous ne pouvons former explicitement le système (A) comme dans le cas des deux équations $(\overline{1})$, mais nous avons le moyen de le représenter implicitement. Supposons que pour éliminer x et y, nous les calculions au moyen de $\overline{F}_1 = 0$, $\overline{F}_2 = 0$, et que nous obtenions $\varphi' = 0$ par l'élimination de x et y entre les trois premières relations $(\overline{13})$, $\Phi = 0$ par l'élimination de x et y entre les deux premières et la dernière.

Introduisons la notation $|[U_A]|_{U=\varphi,\chi,\psi}$, U_A représentant le résultat d'une certaine opération effectuée sur U,

$$|[U_A]|_{U=\varphi,\chi,\psi} = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{dx} & \frac{d\varphi}{dy} & \varphi_A \\ \frac{d\chi}{dx} & \frac{d\chi}{dy} & \chi_A \\ \frac{d\psi}{dx} & \frac{d\psi}{dy} & \psi_A \end{vmatrix}$$

[1] Nous surlignerons de deux traits pour indiquer que l'opération analogue a été effectuée sur l'autre groupe de lettres.

Si φ, χ, ψ sont trois des fonctions F_i, par exemple F_1, F_2, F_3, nous écrirons $\|F_i\|_{1,2,3}$.

Les différentielles des équations $\varphi' = 0$, $\Phi = 0$ par rapport aux arguments qui y figurent sont données par les relations (14), où l'on remplacera x et y par les expressions calculées

$$(14)\quad \begin{cases} \left\| \left[\dfrac{\partial F_i}{\partial x'} dx + \dfrac{\partial F}{\partial y'} dy + \dfrac{\partial F}{\partial z'} dz + \ldots + \dfrac{\partial F}{\partial p'_{0,1}} \right] \right\|_{1,2,3} = 0, \\ \left\| \left[\dfrac{\partial F}{\partial x} dx + \dfrac{\partial F}{\partial y} dy + \dfrac{\partial F}{\partial z} dz + \ldots + \dfrac{\partial F}{\partial p_{0,1}} \right] \right\|_{1,2,3} = 0; \end{cases}$$

cela nous donne le moyen de calculer la dérivée de φ' ou Φ', par rapport à l'un quelconque des arguments qui y figurent; les dérivées totales de $\varphi' = 0$ par rapport à x', y' se calculeront au moyen des suivantes :

$$[\varphi]_x = \left\| \left[\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial z} p_{1,0} + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial p_{0,1}} p_{0,1} \right] \right\|_{1,2,3} = 0,$$

$$[\varphi]_y = \left\| \left[\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} p_{0,1} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial p_{0,1}} p_{0,1} \right] \right\|_{1,2,3} = 0.$$

Les dérivées secondes de $\varphi' = 0$ se calculeront de même au moyen des relations

$$\|[U]\|_{1,2,3} = 0, \quad \|[U']\|_{1,2,3} = 0,$$

et ainsi de suite. On opère de semblable façon pour $\Phi = 0$ et nous pouvons écrire un système de relations Γ', qui permet d'exprimer toutes les équations qui figurent au système (A'), et puis deux relations $H' = 0$, $K' = 0$, qui donnent le moyen de calculer $D' = 0$, $[\varphi', \Phi'] = 0$. Supposons que $H' = 0$ ne soit pas conséquence algébrique de Γ'; si, des Γ' et $K' = 0$, on peut déduire une relation qui ne contienne aucune des lettres accentuées, on obtient une équation aux dérivées partielles en z, $U' = 0$. A toute solution de cette équation, pour laquelle $\overline{H}' = 0$ n'est pas conséquence de $\overline{\Gamma}'$, correspondent les solutions d'un système A' complètement intégrable; si $\overline{H}' = 0$ est conséquence de $\overline{\Gamma}'$, ce qui ne peut se produire que pour des intégrales particulières de $U = 0$, il faut opérer une réduction du système (A'), ce qui conduit généralement à un système complètement intégrable, comme il a été expliqué.

Supposons maintenant que H' soit conséquence algébrique de Γ'.

Désignons par $H'^{r'}$ l'ensemble des relations qui permettent de former les conditions $D'^{r'}$ exprimant que les deux équations $\varphi' = 0$, $\Phi' = 0$ ont r' directions communes de caractéristiques. Nous admettons que les $H'^{r'}$ sont conséquences algébriques de Γ', mais que les $H'^{r'+1}$ ne le sont pas : on forme alors un système $\Gamma'^{r'}$, tel que $\overline{\Gamma}'^{r'}$ permette de calculer le système $\overline{C}'^{r'}$, de schéma $B'^{r'}$; si des $\overline{\Gamma}'^{r'}$ et $K' = 0$ on peut déduire une relation ne contenant aucune des lettres accentuées, on en tire des conséquences analogues à celles qui ont été exposées pour $U = 0$. On peut établir ainsi une discussion semblable à celle qui a été faite sur les équations (1); nous allons simplement donner des exemples. Toutefois, signalons un cas analogue à celui que nous avons trouvé lors de cette discussion; il peut se faire que du système Γ' on déduise plusieurs relations ne contenant pas les lettres accentuées; on est conduit à substituer à $K' = 0$ une relation $K'_1 = 0$ d'ordre moindre en z, d'où il peut se faire que l'on déduise une équation $U_1 = 0$ à une solution de laquelle correspondent en général des surfaces (s') dépendant d'une infinité de constantes arbitraires.

5. Exemples. — I. *Transformations de Bäcklund.* — Soient

$$F_i(x, y, z, p, q; x', y', z', p', q') = 0 \tag{15}$$

les relations de définition.

Nous ne voulons pas refaire une discussion classique, mais simplement montrer que les transformations trouvées par Clairin correspondent au cas où le système des deux équations

$$\varphi' = 0, \qquad \Phi' = 0$$

admet une solution singulière, et établir certains calculs dont nous aurons à nous servir. Nous nous appuyons sur l'équivalence entre les deux relations

$$\begin{vmatrix} \|F_A\|_{1,2,\ldots} & \|F_B\|_{1,2,\ldots} \\ \|F_A\|_{1,2,\ldots} & \|F_B\|_{1,2,\ldots} \end{vmatrix} = 0$$

et

$$\left\| \frac{dF_i}{dx} \quad \frac{dF_i}{dy} \quad F_{zA} \quad F_{zB} \right\|_{1,2,\ldots} = 0.$$

L'existence de la solution singulière pour le système $\varphi = 0$, $\Phi = 0$

correspondant à (s) exige la compatibilité des équations $\overline{(15)}$ et $\overline{(16)}$:

$$(16)\quad \frac{\left\|\dfrac{\partial F}{\partial p}\right\|_{1,2,3}}{\left\|\dfrac{\partial F_1}{\partial p'}\right\|_{1,2,3}} = \frac{\left\|\dfrac{\partial F_1}{\partial q}\right\|_{1,2,3}}{\left\|\dfrac{\partial F_1}{\partial q'}\right\|_{1,2,3}}$$

$$= \frac{\left\|\dfrac{\partial F_1}{\partial x} - p\dfrac{\partial F_1}{\partial z}\right\|_{1,2,3}}{\left\|\dfrac{\partial F}{\partial x} - p\dfrac{\partial F}{\partial z}\right\|_{1,2,3}} = \frac{\left\|\dfrac{\partial F}{\partial y} - q\dfrac{\partial F}{\partial z}\right\|_{1,2,3}}{\left\|\dfrac{\partial F}{\partial y} - q\dfrac{\partial F}{\partial z}\right\|_{1,2,3}}.$$

On en déduit immédiatement la condition connue

$$\left\|\frac{\partial F}{\partial x} - p\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial F_1}{\partial y} - q\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial F_1}{\partial p'}\frac{\partial F_1}{\partial x}\right\|_{1,2,3} = 0.$$

Si cette condition est satisfaite [soit identiquement, soit comme conséquence de (15)], les ∞^1 éléments de (e') qui correspondent à un élément déterminé de (e) forment un bandeau d'éléments unis. On peut dans ce cas remplacer le système (15) par l'une des formes suivantes obtenues en examinant successivement les cas où des relations (15) on peut déduire deux ou trois indépendantes de p et q' :

$$\left\{\begin{array}{l} F(x, y, z; x', y', z', p, q) = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x'} = F_1 \ldots \\ \dfrac{\partial F}{\partial y'} = F_1 \ldots \quad \text{Nb} \ldots \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} F_1(x, y, z; x', y', z', p, q) = 0, \\ F_2(x', y', z'; x, y, z, p, q) = 0, \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial x'} = \dfrac{\partial F_2}{\partial z'}, \quad \text{Nb} \ldots \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial y'} = \dfrac{\partial F_2}{\partial y'} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} F_1(x, y, z; x', y', z', p, q) = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 0, \\ \text{Nb} \ldots, q', \ldots, q) = 0. \end{array}\right.$$

Les trois premières équations de chaque groupe, si l'on y suppose x, y, z, p, q constants, déterminent une M_2 (surface, courbe ou point).

II. Plaçons-nous maintenant dans le cas où les trois premières relations (13) ne contiennent que les coordonnées des éléments du premier ordre, la quatrième relation contenant les coordonnées des éléments du deuxième ordre :

$$(17)\qquad \begin{cases} F_1(x, y, z, p, q; x', y', z', p', q') = 0, \\ F_2(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) = 0, \\ F_3(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) = 0, \end{cases}$$

$$(18)\qquad V(x, y, z, p, q, r, s, t; x', y', z', p', q', r', s', t') = 0.$$

L'équation $\varphi' = 0$ est du premier ordre, $\Phi' = 0$ est du deuxième ordre; le système Γ comprend (17), $[\varphi]_a = 0$, $[\varphi]_b = 0$, (18). La relation $H' = 0$ est ici

$$(19)\qquad \left\|\frac{\partial F_i}{\partial p'}\right\|^2_{i=1,2,3} \frac{\partial V}{\partial t'} - 2\left\|\frac{\partial F_i}{\partial p'}\right\| \left\|\frac{\partial F_i}{\partial q'}\right\| \frac{\partial V}{\partial s'} + \left\|\frac{\partial F_i}{\partial q'}\right\|^2 \frac{\partial V}{\partial r'} = 0,$$

la relation

$$K = 0$$

est

$$(20)\qquad \left\|\frac{\partial F_i}{\partial p'}\right\|_{i=1,2,3} \left\|\frac{dU}{dx'}\right\|_{U=F_1, F_2, V} + \left\|\frac{\partial F_i}{\partial q'}\right\|_{i=1,2,3} \left\|\frac{dU}{dy'}\right\|_{U=F_1, F_2, V} + L\frac{\partial V}{\partial r} + M\frac{\partial V}{\partial s} + N\frac{\partial V}{\partial t} = 0,$$

L, M, N étant linéaires en α, β, γ, δ et ne contenant pas α', β', γ', δ'.

Supposons d'abord que (19) ne soit pas conséquence algébrique de (16), (17) et (18) et qu'en tenant compte de ces relations on puisse faire disparaître x', ... t' de (20); soit $U = 0$ la relation que l'on obtient; c'est une équation du troisième ordre en z; à toute intégrale (s) de cette équation, pour laquelle $(\overline{19})$ n'est pas satisfaite, correspondent des surfaces (s') dépendant de deux constantes arbitraires; si $(\overline{19})$ est vérifiée, au besoin en tenant compte de $(\overline{16})$, $(\overline{17})$, $(\overline{18})$, à (s) correspondent en général des surfaces dépendant de moins de deux constantes arbitraires.

Lorsque (19) est conséquence algébrique de (17), (18), $[\varphi]_a = 0$, $[\varphi]_b = 0$, on forme un système Γ' permettant d'établir C' dont le schéma est B', en adjoignant par exemple l'équation $\Big\{$ en sup

posant $\left\| \frac{\partial F}{\partial q} \right\|_{(x,y,z)} = 0$,

$$(21) \qquad \left\| \frac{\partial F_1}{\partial p} \right\|_{(x,y,z)} \left\| \frac{\partial U}{\partial x} \right\|_{(x,y,z)} - L \frac{\partial N}{\partial t} - M \frac{\partial N}{\partial t} \frac{\left\| \frac{\partial F}{\partial p'} \right\|}{\left\| \frac{\partial F_1}{\partial q'} \right\|} = 0.$$

On pourra d'ailleurs substituer à l'équation (20) la suivante :

$$(22) \qquad \left\| \frac{\partial F}{\partial q'} \right\| \left\| \frac{\partial U}{\partial y} \right\| - N \frac{\partial N}{\partial t} - M \frac{\partial N}{\partial t} \frac{\left\| \frac{\partial F}{\partial p'} \right\|}{\left\| \frac{\partial F_1}{\partial q'} \right\|} = 0.$$

Si l'équation (20), ou l'équation (22), s'exprime grâce à (17), (18), (16) et (21) au moyen seulement de x, y, z et de ses dérivées, on obtient une équation $U_1 = 0$ du troisième ordre en z. A toute intégrale (s) de cette équation, pour laquelle le calcul de p' et q' est possible dans B^1 correspondent des surfaces (s') dépendant d'une constante arbitraire; si le calcul de p' et q' n'est pas possible, il lui correspond, en général, un nombre fini de surfaces.

La relation (19) constitue une équation aux dérivées partielles pour V si l'on suppose, par exemple, que F_1, F_2, F_3 sont donnés; son intégration est immédiate, en particulier, on peut supposer que p ne figure pas dans (17), ni z dans (18). On se trouve dans le cas où existe une équation $U_1 = 0$, si x, y ; y, z ; x, z ne figurent pas dans les équations (17) et (18); on se trouve dans le cas où existe l'équation $U_1 = 0$ lorsque (19) étant satisfaite une des lettres x, y, z ne figure pas dans les quatre relations données.

Nous verrons plus loin que certaines particularités se présentent si les trois relations (17) satisfont à des conditions que nous établirons; en choisissant alors la relation (18) convenablement, nous poursuivrons la discussion plus avant.

III. Examinons maintenant ce qui se présente lorsque parmi les quatre relations (13) deux sont d'ordre m' en z', les deux autres d'ordre au plus égal à m'. Attachons-nous au cas particulier où les deux équations $\varphi' = 0$, $\Phi' = 0$, qui sont d'ordre m', ont toutes leurs

directions de caractéristiques communes; les relations $(\overline{23})$ sont alors vérifiées :

$$(23)\qquad \frac{\left\|\dfrac{\partial F_i}{\partial p'_{m',0}}\right\|_{1,2,3}}{\left\|\dfrac{\partial F_i}{\partial p'_{m',0}}\right\|_{1,2,4}} = \frac{\left\|\dfrac{\partial F_i}{\partial p'_{m'-1,1}}\right\|_{1,2,3}}{\left\|\dfrac{\partial F_i}{\partial p_{m'-1,1}}\right\|_{1,2,4}} = \ldots = \frac{\left\|\dfrac{\partial F_i}{\partial p_{0,m}}\right\|_{1,2,3}}{\left\|\dfrac{\partial F_i}{\partial p_{0,m}}\right\|_{1,2,4}};$$

elles sont, en général, équivalentes à celles que l'on déduit de $(\overline{24})$:

$$(24)\qquad \left\|\frac{dF_i}{dx}\quad \frac{dF_i}{dy}\quad \frac{\partial F_i}{\partial p'_{m',0}}\quad \ldots\quad \frac{\partial F_i}{\partial p_{0,m}}\right\|_{i=1,2,3,4} = 0.$$

Les équations de $\Gamma'^{m'}$ qui permettent de former les quatre premières du système $C^{m'}$ correspondant à $\varphi' = 0$, $\Phi' = 0$, s'obtiennent en adjoignant à $(\overline{13})$ les relations $(\overline{25})$, par exemple,

$$(25)\qquad \frac{\left\|\dfrac{\partial F_i}{\partial p_{0,m}}\right\|_{1,2,3}}{\left\|\dfrac{\partial F_i}{\partial p_{0,m}}\right\|_{1,2,4}} = \frac{\left\|\left(\dfrac{dF_i}{dx}\right)^{(1)}\right\|_{1,2,3}}{\left\|\left(\dfrac{dF_i}{dx'}\right)\right\|_{1,2,4}} = \frac{\left\|\left(\dfrac{dF_i}{dy}\right)^{(1)}\right\|_{1,2,3}}{\left\|\left(\dfrac{dF_i}{dy'}\right)\right\|_{1,2,4}}.$$

Elles s'écrivent

$$(26)\qquad \begin{cases} \left\|\dfrac{dF_i}{dx}\quad \dfrac{dF_i}{dy}\quad \dfrac{\partial F_i}{\partial p_{0,m}}\quad \left(\dfrac{dF_i}{dx'}\right)^{(1)}\right\|_{1,2,3,4} = 0, \\ \left\|\dfrac{dF_i}{dx}\quad \dfrac{dF_i}{dy}\quad \dfrac{\partial F_i}{\partial p_{0,m}}\quad \left(\dfrac{dF_i}{dy'}\right)\right\|_{1,2,3,4} = 0. \end{cases}$$

Il en résulte que les relations déduites de (27) sont vérifiées :

$$(27)\qquad \left\|\left(\frac{dF_i}{dx'}\right)\quad \left(\frac{dF_i}{dy'}\right)\quad \frac{\partial F_i}{\partial p'_{m',0}}\quad \ldots\quad \frac{\partial F_i}{\partial p'_{0,m}}\right\| = 0.$$

Pour qu'à toute solution de l'équation $U = 0$, à supposer qu'elle existe, correspondent deux équations $\varphi' = 0$, $\Phi' = 0$ admettant m directions communes de caractéristiques, il est donc nécessaire que les relations (27), qui ne contiennent pas de dérivées ne figurant pas dans (13), soient conséquence algébrique de ces dernières.

---

(1) Si la relation F_i est d'ordre inférieur à m en φ', il faut remplacer $\left(\dfrac{dF_i}{dx'}\right)$ par $\dfrac{dF_i}{dx'}$, $\left(\dfrac{dF_i}{dy'}\right)$ par $\dfrac{dF_i}{dy'}$.

Supposons, par exemple, $m = 2$, les relations (13) doivent satisfaire à deux conditions; si cela se produit et si x', y' n'y figurent pas, les (13), (26) et les quatre relations du troisième ordre en z' qu'il faut y ajouter pour former Γ^2 permettent, en général, de calculer z', p', q', r', s', t', α', β', γ', δ', et, en portant dans $K' = 0$, on obtient une équation pour déterminer z; à une solution de cette équation correspondent, en général, des surfaces (s') dépendant de deux constantes arbitraires.

6. Il peut se faire que des relations (13) on déduise une seule équation pour déterminer z; les surfaces (s') qui correspondent aux solutions de cette équation sont intégrales d'un certain système que l'on peut obtenir dans certains cas en permutant le rôle des deux groupes de lettres. Il arrive que ce système ne comprenne qu'une seule équation $U' = 0$, les deux équations $U = 0$ et $U' = 0$ se transforment alors l'une dans l'autre, comme il résulte des calculs qui y ont conduit. Lorsqu'à une solution de chaque équation correspondent des solutions de l'autre dépendant d'un nombre fini de constantes arbitraires, on établit facilement, en calquant la démonstration sur celle qu'a donnée M. Goursat [1] dans le cas des transformations de Bäcklund, que les caractéristiques se correspondent sur (s) et (s'), et les deux équations sont de même ordre; il faut admettre, simplement, que les caractéristiques des deux équations sont simples [2]; la démonstration s'applique aux caractéristiques multiples qui jouissent de propriétés appartenant aux caractéristiques simples, ce qui n'arrive pas toujours [3].

Supposons, maintenant, qu'à (s) corresponde, pour déterminer (s'), un système d'ordre d'involution ρ, à (s') un système d'ordre ρ' : on constate, en prenant quelques précautions supplémentaires, qu'en général, le nombre obtenu en ajoutant ρ' à l'ordre de $U = 0$ est égal à celui que l'on obtient en ajoutant ρ à celui de $U' = 0$, la correspondance existant entre les caractéristiques des deux équations qui ne le sont pas pour les systèmes en involution correspondant soit à (s), soit à (s').

---

(1) Goursat, II_2, p. 291.

(2) Goursat, II_2, p. 300.

(3) Sannia, *Mem. d. R. Accad. d. Scienze di Torino*, 2e série, t. XLIV, nos 2 et 13.

Nous allons, maintenant, signaler des cas importants où l'on peut prévoir l'existence de l'équation $U = 0$, par exemple. Supposons que les deux équations $\varphi' = 0$, $\Phi' = 0$ déduites d'une surface (s) quelconque soient d'ordres m' et M', puis que le système (13) admette un groupe continu de transformations de contact de l'espace (x') d'ordre $m'M'$. D'après la théorie générale de l'existence des solutions d'un système différentiel, il existe (en dehors de cas exceptionnels) des surfaces (s) et (s'); le système (A'), déduit d'une telle surface (s), n'est donc pas impossible; or, s'il admet une solution, il en admet qui dépendent, au moins, de $m'M'$ constantes arbitraires, déduites de celle-là par les transformations du groupe considéré; donc, en général, la relation $\overline{K'} = 0$ est conséquence de $\overline{\Gamma'} = 0$, ce qui entraîne que l'on déduit de $K' = 0$, moyennant Γ', une équation $U = 0$.

Ceci suppose, naturellement, que $H' = 0$ n'est pas conséquence de Γ'; si les conditions H'^{r} sont conséquences de Γ' sans que les H'^{r+1} le soient, si les relations (13) admettent un groupe de l'espace (x') dont l'ordre soit égal au nombre des dérivées paramétriques du système B' déduit d'une surface (s) quelconque, on en déduit, de même qu'en général il existe une équation pour déterminer (s) [1].

Une circonstance particulièrement simple, où s'applique ce que nous venons de dire, se présente lorsque certaines des lettres $x', y', \ldots$ ne figurent pas dans (13); nous en avons déjà donné des exemples.

7. Revenons, maintenant, à l'étude des systèmes (13) satisfaisant aux conditions (27). Si $m' = 1$, d'après ce que nous avons remarqué au sujet des transformations de Bäcklund, le système (13) est équivalent à un système où trois relations, quand on y suppose x, y, z et ses dérivées constants, représentent ∞^2 éléments supportés par une surface, une courbe ou un point; nous reviendrons sur ce cas dans le Chapitre suivant.

Si $m' > 1$, on aperçoit immédiatement que des relations (13) on en déduit au moins une, indépendante des dérivées de z' d'ordre m'; nous n'avons pas à envisager le cas où l'on en déduit trois, qui nous

---

[1] Il est bien entendu que, par suite de décompositions des systèmes considérés, il est possible qu'il existe d'autres façons de déterminer (s) pour répondre au problème de Bäcklund.

sortirait de la question que nous nous sommes posée. Envisageons séparément les cas où l'on en déduit une, puis deux.

Soit

$$F = 0 \tag{28}$$

une relation donnée d'ordre $m' - 1$ en z'; pour satisfaire aux conditions (26) nous prenons, comme autres relations définissant le problème de Bäcklund posé,

$$\frac{dF}{dx} = 0, \qquad \frac{dF}{dy} = 0 \tag{29}$$

les parenthèses ici n'ayant plus d'objet, puisqu'elles ne doivent servir qu'à écarter les dérivées d'ordre $m' + 1$ en z'; la quatrième relation sera prise arbitrairement, d'ordre m' en z',

$$\Psi = 0. \tag{30}$$

Pour trouver les équations $z' = 0$ et $\Phi = 0$, on calculera x, y au moyen de $\overline{29}$; on déduit $z' = 0$ de (28) et $\Phi = 0$ de (30).

Les dérivées de $z' = 0$ se calculent au moyen de (31),

$$\frac{dF}{dx} = 0, \qquad \frac{dF}{dy} = 0. \tag{31}$$

Cela suppose que la relation $\overline{32}$ n'est pas satisfaite,

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d^2F}{dx^2} & \dfrac{d^2F}{dx\,dy} \\ \dfrac{d^2F}{dx\,dy} & \dfrac{d^2F}{dy^2} \end{vmatrix} = 0, \tag{32}$$

ce qui a évidemment lieu, généralement. Nous allons, du reste, reprendre, dans un instant, l'étude de ce qui se passe lorsque (32) constitue la quatrième relation de définition et que (28) est du premier ordre en z et z'.

Auparavant, disons un mot du cas où deux relations données sont d'ordre $m' - 1$ en z',

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = 0. \tag{33}$$

On satisfait aux relations (25) en prenant, comme troisième

relation,

$$(34)\qquad G = \begin{vmatrix} \dfrac{dF_1}{dx'} & \dfrac{dF_1}{dy'} \\ \dfrac{dF_2}{dx'} & \dfrac{dF_2}{dy'} \end{vmatrix} = 0$$

la quatrième relation est prise, arbitrairement, d'ordre m' en z'. Les surfaces (s) et (s') correspondantes satisfont également à

$$\frac{\dfrac{dF_1}{dy'}}{\dfrac{dF_2}{dy'}} = \frac{\dfrac{dF_1}{dx}}{\dfrac{dF_2}{dx}} = \frac{\dfrac{dF_1}{dy}}{\dfrac{dF_2}{dy}}.$$

Cela suppose que $(\overline{35})$ n'est pas satisfaite,

$$(35)\qquad v = \begin{vmatrix} \dfrac{dF_1}{dx'} & \dfrac{dF_1}{dy'} \\ \dfrac{dG}{dx'} & \dfrac{dG}{dy'} \end{vmatrix} = 0.$$

Le problème défini en prenant $v = 0$ comme quatrième relation est analogue à celui que nous allons traiter maintenant.

Application aux équations du troisième ordre.

8. Nous nous proposons de rechercher s'il est possible d'établir entre deux surfaces (s) et (s') de deux espaces (e) et (e'), à trois dimensions, une correspondance ponctuelle définie par les quatre relations

$$(36)\qquad \begin{cases} F(x', y', z', p', q'; x, y, z, p, q) = 0; \\ \dfrac{dF}{dx'} = F_1 + p' F_2 + r' F_3 + s' F_4 = 0 \\ \dfrac{dF}{dy'} = F_1 + q' F_2 + s' F_3 + t' F_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{d^2F}{dx'^2} & \dfrac{d^2F}{dx'\,dy'} \\ \dfrac{d^2F}{dx'\,dy'} & \dfrac{d^2F}{dy'^2} \end{vmatrix} = 0$$

La surface (s') étant donnée, la surface (s), si elle existe, sera une intégrale commune à deux équations du premier ordre, obtenues par l'élimination de x' et y' entre les relations $(\overline{36})$; x' et y' seront calculés par la dernière de ces relations, et la deuxième ou la troisième. Les dérivées de ces équations du premier ordre par rapport

à x et y s'obtiennent au moyen des relations (37) et (38) :

$$(37)\qquad \begin{cases} \dfrac{dF}{dx} = 0, \\[2mm] \dfrac{dF}{dy} = 0; \end{cases}$$

$$(38)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2F}{dx'\,dy'}\,\dfrac{d^2F}{dx'\,dx} - \dfrac{d^2F}{dx'^2}\,\dfrac{d^2F}{dy'\,dx} = 0, \\[2mm] \dfrac{d^2F}{dx'\,dy'}\,\dfrac{d^2F}{dx'\,dy'} - \dfrac{d^2F}{dx'^2}\,\dfrac{d^2F}{dy'\,dy'} = 0; \end{cases}$$

leur crochet par

$$(39)\qquad \frac{d^2F}{dx'\,dy'}\left|F,\frac{dF}{dx}\right|_1 - \frac{d^2F}{dx'^2}\left|F,\frac{dF}{dy}\right|_2 = 0,$$

la notation $\left|F,\dfrac{dF}{dx}\right|_1$ indiquant que le crochet est calculé par rapport aux lettres non accentuées, les autres étant considérées comme représentant des constantes.

Les relations $\delta = 0$, $\delta = 0$ et les équations (III) (¹) par :

$$(40)\qquad \begin{vmatrix} F_p & F_y \\ \dfrac{d^2F}{dx'\,dy'}\,\dfrac{dF_p}{dx} - \dfrac{d^2F}{dx'^2}\,\dfrac{dF_p}{dy} & \dfrac{d^2F}{dx'\,dy'}\,\dfrac{dF_y}{dx} - \dfrac{d^2F}{dy'^2}\,\dfrac{dF_y}{dy} \end{vmatrix} = 0;$$

$$(41)\qquad \begin{vmatrix} F_q & F_z \\ \dfrac{d^2F}{dx'\,dy'}\,\dfrac{dF_q}{dx} - \dfrac{d^2F}{dx'^2}\,\dfrac{dF_q}{dy} & \dfrac{d^2F}{dx'\,dy'}\,\dfrac{dF_z}{dx} - \dfrac{d^2F}{dy'^2}\,\dfrac{dF_z}{dy} \end{vmatrix} = 0;$$

$$(42)\qquad \begin{cases} \begin{vmatrix} F_p & F_x + pF_z \\ \dfrac{d^2F}{dx'\,dy'}\,\dfrac{dF_p}{dx} - \dfrac{d^2F}{dx'^2}\,\dfrac{dF_p}{dy} & \dfrac{d^2F}{dx'\,dy'}\,\dfrac{d(F_x + pF_z)}{dx} - \dfrac{d^2F}{dx'^2}\,\dfrac{d(F_y + pF_z)}{dy} \end{vmatrix} = 0, \\[2mm] \begin{vmatrix} F_q & F_y + qF_z \\ \dfrac{d^2F}{dx'\,dy'}\,\dfrac{dF_q}{dx} - \dfrac{d^2F}{dx'^2}\,\dfrac{dF_q}{dy} & \dfrac{d^2F}{dx'\,dy'}\,\dfrac{d(F_y + qF_z)}{dx} - \dfrac{d^2F}{dx'^2}\,\dfrac{d(F_y + qF_z)}{dy} \end{vmatrix} = 0. \end{cases}$$

Ceci suppose, à la fois, que

$$\frac{\overline{d^2F}}{dx^2}\,\frac{\overline{d^2F}}{dx\,dy'} \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \overline{F_x}\left(\frac{\overline{d^2F}}{dx\,dy'}\,\frac{\overline{dF_x}}{dx} - \frac{\overline{d^2F}}{dx^2}\,\frac{\overline{dF_x}}{dy}\right) \neq 0.$$

(¹) Notations du début du Chapitre I.

Les différents cas que nous avons à considérer sont les suivants :

1° Les relations $(\overline{\overline{36}})$ et $(\overline{\overline{39}})$ sont compatibles;

a. Elles ne le sont pas avec $(\overline{\overline{40}})$: à (s') correspondent des surfaces (s) dépendant d'une constante arbitraire; elles peuvent admettre une enveloppe;

b. Elles le sont avec $(\overline{\overline{40}})$: à (s') correspond une surface (s).

2° Les relations $(\overline{\overline{36}})$, $(\overline{\overline{40}})$ et $(\overline{\overline{42}})$ sont compatibles entre elles, incompatibles avec $(\overline{\overline{41}})$;

a. $(\overline{\overline{39}})$ est incompatible avec $(\overline{\overline{36}})$: à (s') correspond une surface (s), il peut en correspondre une autre (3°);

b. $(\overline{\overline{39}})$ est compatible avec $(\overline{\overline{36}})$: une infinité de surfaces (s) dépendant d'une constante arbitraire, et qui admettent une enveloppe, correspondent à (s').

3° $(\overline{\overline{39}})$ étant incompatible avec $(\overline{\overline{36}})$, on l'adjoint à ces dernières relations, l'élimination de x' et y' entre $(\overline{\overline{36}})$ et $(\overline{\overline{39}})$ conduit à trois équations du premier ordre, dont les conditions de compatibilité se réduisent à deux, contenant des dérivées du quatrième ordre de z' par rapport à x' et y'.

De là, on déduit les conséquences suivantes :

En général, la surface (s') devra être choisie parmi les intégrales d'un système en involution de deux équations du quatrième ordre; réciproquement, à une solution de ce système on pourra faire correspondre une surface (s), du moins si les conditions restrictives que nous avons rencontrées sont satisfaites.

Supposons qu'entre les relations (36) et (39) on puisse éliminer x, y, z, p, q, on obtient une équation du troisième ordre $W_3 = 0$; pour que le problème soit possible, (s') doit en être une intégrale; réciproquement, à toute solution de cette équation correspondent, en général, des surfaces (s) dépendant d'une constante arbitraire; à des solutions exceptionnelles (pour lesquelles $\delta = 0$, $\delta' = 0$) n'en correspond qu'une, et même pas du tout (comme cela peut se produire si $\delta' = 0$). Ce cas se présente s'il manque x, y ou z dans F.

Cherchons maintenant s'il peut se faire que, pour toute surface (s') à laquelle corresponde quelque surface (s), on se trouve dans le cas (1°, *b*). Il faut, pour cela, que les relations (36), (39) et (40) se réduisent à cinq relations distinctes seulement, et alors l'élimination

de x, y, z, p, q entre les relations (36) et (37), ou bien (36), la première des (37) et (39) conduit à une équation du troisième ordre en z' : $W'_2 = 0$; à toute solution de cette équation correspond une surface (s'), du moins en général.

L'élimination de $\frac{d^2F}{dx'dy'}$ et $\frac{d^2F}{dx'^2}$ entre (36) et (39) conduit à la relation

$$(43)\quad \begin{vmatrix} F_p & F_q \\ \left[F, \frac{dF}{dy'}\right]_z \frac{dF_p}{dx'} - \left[F, \frac{dF}{dx'}\right]_z \frac{dF}{dy'} & \left[F, \frac{dF}{dy'}\right]_z \frac{dF_q}{dx'} - \left[F, \frac{dF}{dx'}\right]_z \frac{dF_q}{dy'} \end{vmatrix} = 0.$$

Pour que la circonstance envisagée se présente, il faut donc que (43) soit conséquence des trois premières équations (36), et cela quels que soient r', s', t. On obtient donc deux relations aux dérivées partielles auxquelles doit satisfaire la fonction F; il suffit du reste que cela ait lieu en tenant compte de la première relation (36).

En particulier, considérons le cas où la relation (39) est conséquence des relations (36), il faut pour cela que les suivantes le soient des trois premières (36) :

$$\frac{\frac{dF_{x'}}{dx'}}{\frac{dF_{y'}}{dx'}} = \frac{\frac{dF_{x'}}{dy'}}{\frac{dF_{y'}}{dy'}} = \frac{F_{x'}}{F_{y'}}.$$

On en déduit, en remplaçant r' et t' en fonction de s',

$$\frac{F_{x'}}{F_{y'}} = \frac{F_{p'}F_{q'x'} - F_{q'}F_{x'x'}}{F_{p'}F_{q'y'} - F_{q'}F_{x'y'}} = \frac{(F_{x'x'} + p'F_{x'y'})(F_{y'} - (F_{x'} + p'F_{x'})F_{y'y'})}{(F_{x'y'} + p'F_{y'y'})(F_{y'} + (F_{x'} + p'F_{y'})F_{y'y'})}$$
$$\frac{(F_{y'x'} + q'F_{x'y'})(F_{x'} + (F_{y'} + q'F_{x'})F_{y'y'})}{(F_{y'y'} + q'F_{x'y'})(F_{x'} - (F_{y'} + q'F_{x'})F_{y'y'})}.$$

Par conséquent, les rapports des expressions $F_{p'}$, $F_{q'}$, $F_{x'} + p'F_{z'}$, $F_{y'} + q'F_{z'}$ sont fonctions de F, x', y', z', p', q', x, y, z; des conditions d'involution des trois équations du premier ordre en F qui expriment cette propriété, on déduit qu'il en est de même des rapports mutuels des expressions F_p, F_q, F_x, F_y, F_z, donc que F est de la forme

$$F = \Phi[x', y', z', p', q', x, y, z, \Omega(x, y, z, p, q)],$$

la vérification est immédiate. Comme cas particulier, on peut signaler celui où p ou q ne figure pas dans F.

Enfin, occupons-nous de trouver si pour toute surface (s') peuvent se présenter les circonstances qui se rencontrent dans la deuxième partie de la discussion. Il faut pour cela que les relations (36), (39) et (42) se réduisent à six relations distinctes, seulement.

L'élimination de $\frac{d^2 F}{dx'^2}$, $\frac{d^2 F}{dx' dy}$ entre (39) et (42) conduit à deux relations obtenues en annulant les déterminants du troisième ordre de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} U & \frac{dU}{dx'} & \frac{dU}{dy'} \end{matrix} \right\|_{U = F, \; U_1 = F_1 + pF_z, \; U_2 = qF_z} = 0.$$

L'élimination de r', s', t' entre ces deux relations et la deuxième et la troisième des (36) conduit à une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre en F : $K = 0$: si F y satisfait, en tenant compte au besoin de $F = 0$, les relations (36), (40), (42) se réduisent bien à six seulement. L'élimination de x, y, z, p, q entre ces six relations conduit à une équation aux dérivées partielles du troisième ordre en z' : $W_3 = 0$ à toute solution de laquelle (pour qui $\delta' \neq 0$) correspond une surface (s), par cinq de ces six relations; mais il peut en outre en correspondre soit une autre, soit une infinité d'autres.

Observons que pour former l'équation $K = 0$, à laquelle on arrive pour déterminer F, on peut procéder de la manière suivante : supposons que r', s', t' représentent les coordonnées d'un point d'un espace à trois dimensions; les relations (40) et (42) expriment, après élimination du rapport $\frac{d^2 F}{dx' dy'} : \frac{d^2 F}{dx'^2}$, que la droite (37) se trouve sur la quadrique dont l'équation est

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2 F}{dx' dx} & \frac{d^2 F}{dy' dx} \\ \frac{d^2 F}{dx' dy} & \frac{d^2 F}{dy' dy} \end{vmatrix} = 0$$

et les calculs faits précédemment pour trouver $K = 0$ expriment que la même droite (37) est située sur la quadrique en tenant compte des deuxième et troisième relations (36); en exprimant cela directement, on est conduit par l'élimination de r', t', r, t à une relation bilinéaire en s' et s : $h_1 ss' + h_2 s' + h_3 s + h_4 = 0$, qui doit être satisfaite quel que soit s; le premier membre doit, par conséquent, se décomposer en un produit de deux binomes du premier degré, l'un en s, l'autre

en s' ; c'est-à-dire que

$$h_1 k_2 - k_1 k_2 = 0,$$

on obtient ainsi l'équation $K = 0$.

Ce que nous venons de dire peut se répéter en permutant les rôles des lettres accentuées et de celles qui ne le sont pas ; l'élimination des lettres accentuées peut aussi conduire à une seule équation $W_1 = 0$, $W_2 = 0$ ou $W_3 = 0$. Par suite de la symétrie par rapport aux deux groupes de lettres des calculs qui nous ont conduits à la condition $K = 0$, les équations $W_3 = 0$ et $W'_3 = 0$ existent en même temps, du moins en général et les intégrales de ces deux équations se correspondent, les coordonnées d'un élément du premier ordre d'une surface intégrale de l'une s'exprimant au moyen des coordonnées d'un élément du troisième ordre de l'autre. Lorsqu'il existe une équation $W'_1 = 0$ ou $W'_2 = 0$, il lui correspond généralement un système de deux équations du quatrième ordre en involution; s'il existe également une équation $W_1 = 0$ ou $W_2 = 0$, ses intégrales correspondent à celles $W'_1 = 0$ ou $W'_2 = 0$ suivant une correspondance (∞^1, ∞^1), $(\infty^1, 1)$, $(1, \infty^1)$, $(1, 1)$ suivant les cas. D'ailleurs, les équations $W_3 = 0$ et $W_3 = 0$ ne donnent pas, quand elles existent, toutes les solutions du problème; il se produit alors une décomposition et les quatre relations (36) permettent d'établir en outre une correspondance entre les intégrales de deux systèmes du quatrième ordre en général, l'un de ces systèmes, ou les deux, pouvant être, dans certains cas, remplacé par une équation du troisième ordre.

Les équations du troisième ordre auxquelles on parvient ainsi ne sont pas des équations quelconques : $W_1 = 0$ et $W_2 = 0$ admettent un système de caractéristiques du second ordre; $W_3 = 0$ admet un système de caractéristiques du premier ordre : cela résulte immédiatement des formules qui établissent la correspondance entre $W_3 = 0$ et $W'_3 = 0$.

On forme aisément des exemples de transformations entre équations à indice 1 et 2 en partant d'une fonction F où manquent une des lettres de chaque groupe.

Voici un exemple de transformation entre équations à indice 3.

Remarquons d'abord que si la relation $F = 0$ est de la forme

$$p' + p = \Phi(x', y', z', q', x, y, z, q) = 0,$$

les calculs que nous avons faits doivent subir une légère modification,

au lieu de (40) et (42) nous devons considérer

$$\frac{d^2\Phi}{dx'\,dy'}\,\frac{d\Phi_q}{dx'} - \frac{d^2\Phi}{dx'^2}\,\frac{d\Phi_q}{dy'} = 0,$$

$$\frac{d^2\Phi}{dx'\,dy'}\,\frac{d(\Phi_x + p\,\Phi_z)}{dx'} - \frac{d^2\Phi}{dx'^2}\,\frac{d(\Phi_x + p\,\Phi_z)}{dy'} = 0,$$

$$\frac{d^2\Phi}{dx'\,dy'}\,\frac{d(\Phi_y + q\,\Phi_z)}{dx'} - \frac{d^2\Phi}{dx'^2}\,\frac{d(\Phi_y + q\,\Phi_z)}{dy'} = 0.$$

et la condition à laquelle doit satisfaire Φ s'obtient en éliminant s' et t' entre

$$\frac{\left(\dfrac{d\Phi_q}{dx'}\right) + s'\,\Phi_{qq}}{\left(\dfrac{d\Phi_q}{dy'}\right) + t'\,\Phi_{qq'}} = \frac{\dfrac{d(\Phi_x + p\,\Phi_z)}{dx'} + s'(\Phi_{xq'} - p\,\Phi_{zq'})}{\dfrac{d(\Phi_x + p\,\Phi_z)}{dy'} + t'(\Phi_{xq'} + p\,\Phi_{zq'})}$$

$$= \frac{\dfrac{d(\Phi_y + q\,\Phi_z)}{dx'} + s'(\Phi_{yq'} + q\,\Phi_{zq'})}{\dfrac{d(\Phi_y + q\,\Phi_z)}{dy'} + t'(\Phi_{yq'} + q\,\Phi_{zq'})};$$

d'où, finalement,

$$\left\| \begin{matrix} U & \left(\dfrac{dU}{dx'}\right) & \left(\dfrac{dU}{dy'}\right) \end{matrix} \right\|_{U = F_{q'}F_x + pF_z,\ F_y + qF_z} = 0.$$

On vérifie immédiatement que cette relation est vérifiée si l'on prend

$$p' + p' + \varphi_1(z, x', y', q) + \varphi_2(z', x, y, q) = 0. \tag{44}$$

car le déterminant suivant est nul :

$$\begin{vmatrix} p\,\varphi_{1z'} + p'\,\varphi_{2z'} & p\,\varphi_{1zx} + q'\,\varphi_{2zx} & p \\ q\,\varphi_{1z'} + p'\,\varphi_{2z'} & q\,\varphi_{1zy} + q'\,\varphi_{2zy} & q \\ p' & q & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

En général, la relation (44) définit donc une transformation entre deux équations $W_3 = 0$ et $W'_3 = 0$; en outre, elle en définit une entre deux systèmes du quatrième ordre. Mais bien des cas particuliers peuvent se présenter sur cet exemple. Si x seul ne figure pas dans φ_2, on ne peut former une équation $W'_3 = 0$; on obtient deux équations, en général incompatibles : aux surfaces intégrales de $W_3 = 0$ ne correspondent pas des surfaces de (e'); toutefois, il existe une équation

$W'_1 = 0$, à laquelle correspond un système du quatrième ordre; si q seul ne figure pas, alors on peut former $W'_3 = 0$, et en plus une équation $W'_2 = 0$; $W'_3 = 0$ correspond à $W_3 = 0$, $W_2 = 0$ à un système du quatrième ordre. En supposant en plus qu'une des lettres accentuées manque, on en tire des conséquences évidentes.

Sur cet exemple particulier on s'aperçoit de la multiplicité des cas qui peuvent se présenter. D'ailleurs, dans la discussion générale, nous ne nous sommes occupés que des circonstances les plus importantes; les relations (36) peuvent conduire à des équations du second ordre; le cas le plus intéressant sera examiné plus loin, c'est celui où p' et q', par exemple, ne figurent pas dans F.

Remarque. — En nous servant des calculs que nous venons de présenter pour les équations (36), on constate qu'une théorie analogue peut s'établir en partant d'une relation

$$F(x', y', z', p', q', x, y, z, q, s, t) = 0;$$

en particulier, si p' ne figure pas dans F et si F satisfait à une condition analogue à $K = 0$, la relation $F = 0$ définit une transformation entre deux équations du quatrième ordre.

CHAPITRE III.

SUR UNE CLASSE PARTICULIÈRE DE TRANSFORMATIONS.

1. Vers la fin du Chapitre précédent nous avons été conduits à considérer des systèmes de quatre relations dont trois

$$(1) \qquad F(x', y', z', p', q', x, y, z, p, q, s, t) = 0$$

déterminent les ∞^2 éléments supportés par une surface, une courbe ou un point de l'espace (e') quand on y suppose que x, y, z et ses dérivées sont constants. Cela revient à supposer que les deux relations représentées par (2)

$$(2) \qquad \left\| \frac{\partial F_1}{\partial x'} + p' \frac{\partial F_1}{\partial z'} \quad \frac{\partial F_1}{\partial y'} + q' \frac{\partial F_1}{\partial z'} \quad \frac{\partial F_1}{\partial p'} \quad \frac{\partial F_1}{\partial q'} \right\| = 0$$

sont satisfaites, soit identiquement, soit comme conséquence de (1).

A une surface (s'), les relations (1) font correspondre les intégrales d'une équation aux dérivées partielles d'ordre $n-1$ en z : $\varphi_{n-1}=0$ obtenue par l'élimination de x', y' entre les relations $(\overline{\overline{1}})$, à condition que les relations $(\overline{\overline{3}})$

$$(3)\qquad \frac{\dfrac{dF_1}{dx'}}{\dfrac{dF_1}{dy'}}=\frac{\dfrac{dF_2}{dx'}}{\dfrac{dF_2}{dy'}}=\frac{\dfrac{dF_3}{dx'}}{\dfrac{dF_3}{dy'}}$$

ne soient pas conséquences de $(\overline{\overline{1}})$; par exemple, x' et y' sont calculés par les relations $\overline{\overline{F}}_2=0$, $\overline{\overline{F}}_3=0$. Les dérivées de $\varphi_{n-1}=0$ par rapport à x et à y se calculent au moyen de (4) :

$$(4)\qquad \left\{\frac{dF_i}{dx}\right\}=0,\qquad \left\{\frac{dF_i}{dy}\right\}=0,$$

en représentant par $\left\{\dfrac{dF_i}{dx}\right\}$ le déterminant dont une colonne est formée de $\dfrac{dF_1}{dx}$, $\dfrac{dF_2}{dx}$, $\dfrac{dF_3}{dx}$, les deux autres colonnes appartenant à la matrice qui figure dans le premier membre de (2). Dans (4) ne figurent que x', y', z', p', q' et non les dérivées secondes de z' ; les dérivées secondes de $\varphi_{n-1}=0$ s'obtiennent au moyen de

$$\left\|\frac{dU}{dx'}\quad\frac{dU}{dy'}\quad\frac{dU}{dx}\right\|_{U=F_1,F_2,\left\{\frac{dF_i}{dx}\right\}}=0,\qquad \left\|\frac{dU}{dx'}\quad\frac{dU}{dy'}\quad\frac{dU}{dy}\right\|_{U=F_1,F_2,\left\{\frac{dF_i}{dy}\right\}}=0,$$

$$\left\|\frac{dU}{dx}\quad\frac{dU}{dy}\quad\frac{dU}{dy}\right\|_{U=F_1,F_2,\left\{\frac{dF_i}{dy}\right\}}=0,$$

où figurent les dérivées secondes de z' et les dérivées de z d'ordre $n+1$; on calcule de même les dérivées successives de $\varphi_{n-1}=0$: ses $h+1$ dérivées d'ordre h contiennent les $h+1$ dérivées de z' d'ordre h et les dérivées de z jusqu'à l'ordre $n+h$.

Admettons que les relations (1) et (4) permettent de calculer x', y', z', p', q', on peut les exprimer alors par des fonctions de x, y, z et de ses dérivées jusqu'à l'ordre n qui vérifient la relation

$$dz'-p'\,dx'-q'\,dy'=0,$$

si l'on suppose que x, y, z, ..., $p_{0,n}$ sont les coordonnées des ∞^2 éléments d'ordre n d'une surface quelconque (s) ; cela résulte des rela-

tions

$$\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz + \frac{\partial V}{\partial y'}dy' + \frac{\partial V}{\partial z'}dz' + \frac{\partial V}{\partial p}dp + \frac{\partial V}{\partial q}dq = 0,$$

d'où l'on déduit, grâce à (2) et (4),

$$(dz - p\,dx - q\,dy)\left\|\frac{\partial V}{\partial z}\ \ \frac{\partial V}{\partial p}\ \ \frac{\partial V}{\partial q}\right\|_{0,0,0} = 0.$$

Le déterminant est différent de zéro, en général, sans quoi des relations (1) on en déduirait une autre ne contenant que x, y, z, p, q, ce que nous excluons. D'ailleurs, à (s) correspond généralement une surface, ou alors une courbe ou un point. Lorsqu'il lui correspond une surface, les dérivées secondes r', s', t' se calculent par des relations (5) qui permettent d'exprimer, en général, r', s', t' au moyen de x, y, z et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $n+1$, et l'on prolonge les formules de la transformation de telle façon que les dérivées d'ordre h de z' s'expriment au moyen de x, y, z et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $n+h$. A deux surfaces (s) ayant un contact d'ordre (n) correspondent deux surfaces (S) qui sont tangentes.

Revenons au système de quatre relations : la quatrième peut toujours être remplacée par une autre qui soit indépendante des lettres non accentuées et qui constitue une équation aux dérivées partielles en z : $V = 0$. Le problème revient à chercher ce qui correspond à cette équation par la transformation définie par les relations (1). L'application des résultats généraux que nous avons établis permet de trouver des cas où il lui correspond une seule équation; la plupart des transformations connues peuvent se définir de cette manière; nous donnerons sur un exemple un moyen facile d'en construire d'autres; puis la considération des cas singuliers des transformations (1) nous conduira à de nouveaux résultats.

2. Nous allons d'abord exposer quelques propriétés générales des transformations (1). Bäcklund les a trouvées [1] en recherchant s'il est possible de faire correspondre à une surface quelconque (s) de (e) une surface (s') de (e'), de telle sorte qu'à deux surfaces de (e) ayant en commun un élément d'ordre n correspondent deux surfaces de (e')

[1] Bäcklund, *Math. Ann.*, t. IX, XI et XIII.

ayant en commun un élément du premier ordre. Cela conduit à trouver des fonctions x', y', z', p', q' de $x, y, z, \ldots, p_{0,n}$ satisfaisant à l'équation aux différentielles totales

$$(6)\qquad \begin{aligned} &dz' - p'\,dx' - q'\,dy' - \lambda(dz - p_{0,1}\,dx - p_{0,2}\,dy) \\ &\quad - \sum_{i=0,\,j=0}^{i=n-1,\,j=n-1} \lambda_{ij}(dp_{ij} - p_{i+1,j}\,dx - p_{i,j+1}\,dy) = 0. \end{aligned}$$

Par une méthode analogue à celle qu'on emploie pour déterminer les transformations de contact ([1]), on est amené à définir les transformations cherchées par des relations telles que (1). Nous ne nous occuperons par la suite que du cas où ces relations définissent une surface de (e') quand on y suppose $x, y, z, \ldots, p_{0,n}$ constants, c'est-à-dire des transformations définies par une seule équation directrice ([2]),

$$(7)\qquad F(x', y', z', x, y, z, \ldots, p_{0,n}) = 0$$

à laquelle on associe les suivantes :

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{dF}{dx} = F_x + p_{10}F_z + p_{20}F_{p_{10}} + \ldots + p_{n-1,1}F_{p_{n-2,1}} + \ldots + p_{1,n-1}F_{p_{0,n-1}} = 0, \\ \dfrac{dF}{dy} = F_y + p_{01}F_z + p_{11}F_{p_{10}} + \ldots + p_{n-1,1}F_{p_{n-2,1}} + \ldots + p_{0,n-1}F_{p_{0,n-2}} = 0. \end{cases}$$

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{dF}{dx'} = F_{x'} + p'F_{z'} = 0, \\ \dfrac{dF}{dy'} = F_{y'} + q'F_{z'} = 0. \end{cases}$$

On tire x', y', z' de (7) et (8); cela est possible, à moins que l'équation (7), où l'on suppose x', y', z' constants, ne soit intégrale intermédiaire d'une équation d'ordre n, cas que nous écartons; on obtient ensuite p' et q' au moyen de (9). Les expressions ainsi calculées jouissent de propriétés remarquables que nous ne faisons que signaler ([3]).

La transformation ainsi définie s'interprète géométriquement de

---

([1]) *Voir*, par exemple, GOURSAT, t. I, p. 255.

([2]) Les résultats généraux que nous démontrerons s'appliquent aux transformations définies par deux ou trois équations directrices.

([3]) BACKLUND, *loc. cit.*

la façon suivante : à un élément d'ordre $n-1$ de (e), nous faisons correspondre par la relation (7) une surface (Σ) de (e'); pour trouver la surface (s') correspondant à une surface (s) de (e), nous prenons l'enveloppe des surfaces (Σ) correspondant aux ∞^2 éléments d'ordre $n-1$ de (s); on obtient bien en général une surface (s'), mais la théorie des enveloppes nous fait prévoir des exceptions; elles se produisent si la relation $\overline{(10)}$,

$$(10)\qquad \Delta \begin{vmatrix} \dfrac{d^2F}{dx^2} & \dfrac{d^2F}{dx\,dy} \\ \dfrac{d^2F}{dx\,dy} & \dfrac{d^2F}{dy^2} \end{vmatrix} = 0,$$

est compatible avec $\overline{(7)}$ et $\overline{(8)}$. Par l'élimination de x', y', z' entre (7), (8) et (10), on obtient une équation (en général) d'ordre $n+1$ dont les intégrales se comportent d'une manière singulière dans la transformation. Nous reviendrons plus loin sur ce point.

Pour obtenir l'équation $z_{n-1}=0$ correspondant à une surface (s'), nous calculons x', y' par les relations $(\overline{\overline{9}})$, ce qui nous conduit à supposer que $\overline{\overline{\Delta}} \neq 0$ et par suite $\overline{\overline{\nabla}} \neq 0$:

$$\Delta \begin{vmatrix} \dfrac{d^2F}{dx^2} & \dfrac{d^2F}{dx\,dy} \\ \dfrac{d^2F}{dx\,dy} & \dfrac{d^2F}{dy^2} \end{vmatrix},$$

$$\nabla \begin{vmatrix} \dfrac{d^2F}{dx'\,dx} & \dfrac{d^2F}{dx\,dy} \\ \dfrac{d^2F}{dy'\,dx} & \dfrac{d^2F}{dy'\,dy} \end{vmatrix},$$

les dérivées de cette équation s'expriment au moyen de (11). Le cas exceptionnel $\overline{\Delta}=0$ sera examiné en même temps que celui qui vient d'être signalé.

Exemples :

1° $(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2-f(p(x-x')-q(y-y')-z', x, y, z, p, q, \ldots)=0.$

A un élément d'ordre n, on fait correspondre une surface de révolution admettant pour axe la normale à l'élément. En deux points correspondants des surfaces (s) et (s'), les normales sont concourantes.

2° En particulier, supposons que f ne contienne pas $px' - qy' - z'$; les surfaces (Σ) sont des sphères; à un point m de (s) correspondent deux points de (s') sur la sphère (Σ) correspondant à m.

3° $$(x'-a)^2 + (y'-b)^2 - (z'-c)^2 = R^2;$$

a, b, c, R étant fonctions de p, q, $x+pz$, $y+qz$: à toute droite de (e), on fait correspondre une sphère, et cette sphère, dans la transformation, correspond à chacun des éléments de la file déterminée par la droite. A une surface (s') correspond une équation du premier ordre qui admet comme transformation infinitésimale de contact la dilation. Si la correspondance entre droites et sphères est telle qu'à deux droites concourantes correspondent deux sphères tangentes, aux lignes de courbure de (s) correspondent les lignes principales de la congruence de sphères sur (s').

Calcul des dérivées secondes. — Les équations (9) et (8) donnent, par différentiation :

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2F}{dx'^2}\,dx' + \dfrac{d^2F}{dx'\,dy'}\,dy' + \dfrac{d^2F}{dx'\,dx}\,dx + \dfrac{d^2F}{dx'\,dy}\,dy = 0, \\[2ex] \dfrac{d^2F}{dx'\,dy'}\,dx' + \dfrac{d^2F}{dy'^2}\,dy' + \dfrac{d^2F}{dy'\,dx}\,dx + \dfrac{d^2F}{dy'\,dy}\,dy = 0; \end{cases}$$

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2F}{dx'\,dx}\,dx' + \dfrac{d^2F}{dy'\,dx}\,dy' + \dfrac{d^2F}{dx^2}\,dx + \dfrac{d^2F}{dx\,dy}\,dy = 0, \\[2ex] \dfrac{d^2F}{dx'\,dy}\,dx' + \dfrac{d^2F}{dy'\,dy}\,dy' + \dfrac{d^2F}{dx\,dy}\,dx + \dfrac{d^2F}{dy^2}\,dy = 0. \end{cases}$$

En ne considérant que des transformations de surfaces, l'élimination de dx', dy' entre (11) et (12), puis de dx, dy entre les mêmes relations, conduit à deux groupes de trois formules, équivalentes puisque $\nabla \neq 0$:

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2F}{dx^2}\,\Delta + \left(\dfrac{d^2F}{dx\,dy}\right)^2 \dfrac{d^2F}{dy^2} - 2\,\dfrac{d^2F}{dx'\,dx}\,\dfrac{d^2F}{dy'\,dx}\,\dfrac{d^2F}{dx\,dy} + \left(\dfrac{d^2F}{dy'\,dx}\right)^2 \dfrac{d^2F}{dx^2} = 0, \\[2ex] \dfrac{d^2F}{dx\,dy}\,\Delta + \dfrac{d^2F}{dx'\,dx}\,\dfrac{d^2F}{dx'\,dy}\,\dfrac{d^2F}{dy^2} \\ \qquad - \left(\dfrac{d^2F}{dx\,dy}\,\dfrac{d^2F}{dy\,dy} + \dfrac{d^2F}{dx'}\,\dfrac{d^2F}{dy'\,dy}\right)\dfrac{d^2F}{dx^2} - \dfrac{d^2F}{dy'\,dx}\,\dfrac{d^2F}{dy'\,dy}\,\dfrac{d^2F}{dx^2} = 0, \\[2ex] \dfrac{d^2F}{dy^2}\,\Delta + \left(\dfrac{d^2F}{dx\,dy}\right)^2 \dfrac{d^2F}{dy^2} - 2\,\dfrac{d^2F}{dx'\,dy}\,\dfrac{d^2F}{dy'\,dy}\,\dfrac{d^2F}{dx\,dy} + \left(\dfrac{d^2F}{dy'\,dy}\right)^2 \dfrac{d^2F}{dx^2} = 0. \end{cases}$$

et

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2F}{dx'^2}\,\delta = \frac{d^2F}{dy^2}\left(\frac{d^2F}{dx'\,dx}\right)^2 - 2\frac{d^2F}{dx\,dy}\,\frac{d^2F}{dx'\,dx}\,\frac{d^2F}{dx'\,dy} + \frac{d^2F}{dx^2}\left(\frac{d^2F}{dx'\,dy}\right)^2,\\
&\frac{d^2F}{dx'\,dy'}\,\delta = \frac{d^2F}{dy^2}\,\frac{d^2F}{dx'\,dx}\,\frac{d^2F}{dy'\,dx} - \frac{d^2F}{dx\,dy}\left(\frac{d^2F}{dx'\,dx}\,\frac{d^2F}{dx'\,dy} + \frac{d^2F}{dy'\,dx}\,\frac{d^2F}{dy'\,dy}\right)\\
&\qquad\qquad + \frac{d^2F}{dx^2}\,\frac{d^2F}{dx'\,dy}\,\frac{d^2F}{dy'\,dy},\\
&\frac{d^2F}{dy'^2}\,\delta = \frac{d^2F}{dy^2}\left(\frac{d^2F}{dy'\,dx}\right)^2 - 2\frac{d^2F}{dx\,dy}\,\frac{d^2F}{dy'\,dx}\,\frac{d^2F}{dy'\,dy} + \frac{d^2F}{dx^2}\left(\frac{d^2F}{dy'\,dy}\right)^2,
\end{aligned}\right.$$

où

$$\frac{d^2F}{dx'^2} = r'F + \left(\frac{dF}{dx'}\right), \qquad \ldots.$$

Les relations (13) permettent d'exprimer les trois dérivées secondes de l'équation $\varphi_{n-1} = 0$. A ces résultats qui se trouvent dans Backlund ou s'en déduisent immédiatement, nous ajoutons les considérations suivantes.

5. En général, à deux surfaces (s_1), (s_2) de (c) ayant le long d'une courbe (c) un contact d'ordre n correspondent deux surfaces (s'_1), (s'_2) ayant le long d'une courbe (c') un contact du premier ordre; mais peut-il se faire que le contact des surfaces (s'_1), (s'_2) soit d'un ordre supérieur?

Cette question est liée à la suivante : si le long de la même courbe (c), la surface (s_1) a seulement un contact d'ordre $n-1$, avec une surface (s_3), on ne peut, en général, rien en conclure pour les surfaces (s_1) et (s_3); nous allons voir que si la courbe (c) est convenablement choisie, les deux surfaces (s'_1) et (s'_3) sont tangentes le long d'une courbe qui est la courbe (c') précédemment considérée, et qu'alors les deux surfaces (s'_1) et (s'_2) admettent le long de cette même courbe un contact du second ordre.

Étant donnée la surface s_1, la surface s'_1 correspondante permet d'y déterminer une famille de courbes, qui sont les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles $\varphi_{n-1} = 0$ à laquelle correspond s'_1 par la transformation; soient (γ) ces courbes; pour que la propriété énoncée soit satisfaite, il faut et il suffit que la courbe (c) soit une courbe (γ). Rappelons que les courbes (γ) sont définies par les

équations suivantes $(\overline{\overline{15}})$ [1] :

$$(15)\quad \begin{cases} F = 0, \qquad dz = p_{10}\,dx + p_{0,1}\,dy, \qquad dy = \lambda\,dx, \\ dp_{ik} = p_{i+1,k}\,dx + p_{i,k+1}\,dy \qquad (i + k = n - 2), \\ G = 0, \qquad H = 0, \end{cases}$$

où

$$G = \left(\frac{dF}{dx}\right) dx + \Delta_{n-1}(\lambda)\,dp_{n-1,0} + \ldots + (-1)^{n-2}\Delta_1(\lambda)\,dp_{1,n-2},$$

$$H = \left(\frac{dF}{dy}\right) dy + \Delta_{n-1}(\lambda)\,dp_{n-2,1} + \ldots + (-1)^{n-2}\Delta_1(\lambda)\,dp_{0,n-1},$$

$$\begin{aligned} 0 = \Delta(\lambda) &= F_{pn-1,0}\lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1}F_{p0,n-1}, \\ \Delta_1(\lambda) &= F_{pn-1,0}\lambda^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2}F_{p1,n-2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta_{n-2}(\lambda) &= F_{pn-1,0}\lambda - F_{pn-2,1}, \\ \Delta_{n-1}(\lambda) &= F_{pn-1,0}. \end{aligned}$$

Ceci posé, considérons une courbe (c) quelconque sur (s); le long de cette courbe $x, y, z, \ldots, p_{0,n-1}$ sont certaines fonctions d'un paramètre ρ; on définit ainsi un bandeau d'ordre $n-1$; le long de (c), $p_{n,0}, \ldots, p_{0,n}$ sont fonctions de ρ; il suffit de connaître $p_{0,n}$, soit $p^1_{0,n}$ pour en déduire $p^1_{n,0}, \ldots, p^1_{1,n-1}$; sur une surface (s_3) admettant avec (s_1), le long de (c), un contact d'ordre $n-1$ et non supérieur, le long de cette courbe $x, y, z, \ldots, p_{0,n}$ sont les mêmes fonctions de ρ que sur $s_1, \ldots, p_{0,n}$ est une fonction de ρ différente de $p^1_{0,n}$: $p^3_{0,n}$, de laquelle on déduit de la même façon $p^3_{n,0}, \ldots, p^3_{1,n-1}$. Sur (s'_1) il correspond à (c) une courbe (c'_1); le long de cette courbe, x', y', z' sont des fonctions de ρ obtenues par les relations (7) et (8) où l'on a substitué à $x, y, z, \ldots, p_{0,n}$ les fonctions de ρ dont nous venons de parler: p' et q' s'obtiennent ensuite par (9), les équations (8) donnent

$$(16)\quad \begin{cases} G + p_{0,n}\left\{(-1)^n F_{pn-1,0}\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + \ldots + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 F_{p0,n-2} - \frac{dy}{dx} F_{p0,n-1}\right\} dx = 0, \\ H + p_{0,n}\left\{(-1)^{n-1} F_{pn-1,0}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + \ldots + F_{p0,n-1}\right\} dx = 0. \end{cases}$$

Ces deux relations se réduisent à une seule, car $dF = 0$. De même, sur (s'_3) correspond à (c) une courbe (c'_3) qu'on obtient d'une manière

---

[1] Goursat, *Équations du deuxième ordre*, t. II, p. 300.

analogue; il suffit de remplacer, dans les équations (16), $p^1_{0,n}$ par $p^3_{0,n}$ et il est bien clair que les deux courbes (c'_1) et (c'_3) ne peuvent coïncider, puisque $p^1_{0,n} \neq p^3_{0,n}$, que si l'expression entre $\{\ \}$ est nulle; les valeurs de p' et q' le long de cette courbe sont alors les mêmes. Le deuxième point se trouve ainsi démontré.

D'ailleurs, le long de (c'), les valeurs de r', s', t' seront, en général, différentes pour les deux surfaces s_1 et s_3; reportons-nous pour nous en assurer aux formules (14). Le second membre de ces relations dépend des dérivées de z d'ordre $n+1$; le long de (c), ces dérivées s'expriment au moyen de $p_{0,n+1}$ et de $dp_{n,0}, \ldots, dp_{0,n}$, c'est-à-dire de $dp_{n,0}$ et $d^2p_{n-1,1}, \ldots, d^2p_{0,n-1}$.

Le second membre de la première relation s'écrit

$$p_{0,n+1}\left\{F_{p_{n,0}} + \ldots + (-1)^{n-1}F_{p_{0,n-1}}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1}\right\}$$
$$\times\left\{\left(\frac{d^2F}{dx\,dy}\right)^2 - \frac{d^2F}{dx^2}\frac{d^2F}{dy^2} - \frac{d^2F}{dx\,dy}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\} = K_1.$$

En général, K_1 dépend de $p_{0,n}$ et $dp_{0,n}$, cependant il peut se faire qu'il n'en dépende pas, de même que les expressions analogues construites avec les deux autres formules : on en a un exemple dans les transformations B_1.

Retournons maintenant à la première question posée : les deux surfaces (s_1) et (s_2) ont le long d'une courbe (c) un contact d'ordre n; en raisonnant comme nous venons de le faire, on constate que les deux surfaces (s'_1) et (s'_2) ont un contact du deuxième ordre si l'une des expressions qui multiplient $p_{0,n+1}$ est nulle, ainsi qu'une de celles que l'on déduit des autres formules. On obtient une solution si la courbe (c) est une courbe (γ). Pour qu'il y en eût une autre, il faudrait que les relations

$$\left(\frac{d^2F}{dx\,dy}\right)^2 - \frac{d^2F}{dx^2}\frac{d^2F}{dy^2} - \frac{d^2F}{dx\,dy}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^2F}{dx'\,dx}\frac{d^2F}{dy'\,dx} - \left(\frac{d^2F}{dx'\,dx}\frac{d^2F}{dy'\,dy} + \frac{d^2F}{dx'\,dy}\frac{d^2F}{dy'\,dx}\right)\frac{dy}{dx}$$
$$+ \frac{d^2F}{dx\,dy}\frac{d^2F}{dy\,dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

$$\left(\frac{d^2F}{dy\,dx}\right)^2 - \frac{d^2F}{dy\,dx}\frac{d^2F}{dy^2}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

fussent compatibles, ce qui entraînerait $\nabla = 0$; la surface (s_1) est quelconque, nous avons, pour le moment, exclu le cas où elle est intégrale de l'équation du $n^{\text{ième}}$ ordre en z que l'on déduit de $\nabla = 0$; les points de (s_1) pour lesquels les coordonnées de l'élément d'ordre n satisfont à cette équation sont sur une certaine courbe; si, de plus, le long de cette courbe, $\frac{dy}{dx}$ satisfait à l'une des relations précédentes, on obtient une nouvelle solution du problème. Mais c'est là un cas tout à fait exceptionnel et, de toutes façons, la surface (s_1) étant quelconque, il ne peut s'y trouver qu'une seule courbe répondant à la question, en dehors des courbes (γ). Nous verrons que ce résultat subsiste lorsque la surface (s_1) se comportant d'une manière singulière dans la transformation, il lui correspond cependant une surface.

On déduit de ce qui précède que lorsque deux surfaces (s_1) et (s_2) ont un contact d'ordre $n-1$ le long d'une courbe, si cette courbe est une courbe (γ) pour l'une des surfaces, elle l'est aussi pour l'autre. Nous définissons ainsi des bandeaux d'ordre $n-1$ de (e) qui se transforment en bandeaux du premier ordre de (e'), de même, nous avons trouvé des bandeaux d'ordre n qui se transforment en bandeaux du second ordre, tandis qu'en général, un bandeau d'ordre n se transforme en un bandeau du premier ordre ou un élément du premier ordre, un bandeau d'ordre $n-1$ en une surface de (e').

4. Considérons une équation aux dérivées partielles en z, d'ordre m,

$$f(x, y, z, \ldots, p_{m-1}) = 0 \qquad (\varepsilon). \tag{17}$$

Les intégrales de cette équation se transforment en des surfaces qui sont intégrales d'un certain système d'équations aux dérivées partielles en z'. Pour déterminer ce système nous avons deux méthodes : soit éliminer x, y, z et ses dérivées entre les formules de la transformation qui donnent x', y', z' et ses dérivées et l'équation (17) à laquelle on adjoint celles qu'on en déduit par dérivations; soit en recherchant à quelles conditions doit satisfaire une surface (s') de (e') pour que l'équation $\varphi_{n-1} = 0$ qui lui correspond soit compatible avec l'équation (17), ce qui est la méthode générale que nous avons indiquée. Nous nous proposons l'étude des cas où l'on ne trouve qu'une condition pour (s'), où cette surface est assujettie à être intégrale d'une seule équation aux dérivées partielles en (z') : (ε'). Cela se présente lorsque $[f, \varphi] = 0$ doit être conséquence algébrique du système A

ou B déduit de (17) et $\varphi = 0$, ce que l'on peut prévoir quelquefois. Supposons qu'il en soit ainsi. L'équation (ε) est d'ordre m au plus : elle est de cet ordre si l'équation $\varphi_{n-1} = 0$ correspondant à une quelconque de ses intégrales admet avec (ε') des solutions communes dépendant d'un nombre fini de constantes arbitraires; elle sera d'ordre inférieur à m si ces deux équations admettent des solutions communes dépendant de fonctions arbitraires.

Considérons une famille de caractéristiques de (ε) qui, sur une surface intégrale quelconque, ne coïncident pas avec des courbes (γ); si l'ordre de ces caractéristiques est inférieur à $n + 1$ et qu'il leur corresponde des caractéristiques de (ε'), celles-ci sont du premier ordre; si leur ordre m_1 est supérieur à n, il leur correspond des caractéristiques d'ordre $m_1 - n + 1$. Admettons maintenant que sur une surface intégrale quelconque de (ε) la famille considérée soit constituée par des courbes (γ) et qu'elle corresponde à des caractéristiques de (ε') : si l'ordre en est inférieur à n, les caractéristiques correspondantes de (ε) sont du premier ordre; sinon, ces dernières sont d'ordre $m_1 - n + 2$, en général.

Ces généralités exposées, il nous serait possible de donner de nombreux exemples de transformations d'équations aux dérivées partielles, mais cela nous entraînerait à de trop longs développements. Bornons-nous à signaler que les transformations que Clairin a définies [1], pour les équations du second ordre admettant un groupe fini de transformations de contact d'ordre au moins égal à 2, rentrent dans la catégorie que nous venons de définir et qu'elles peuvent être généralisées pour des équations d'ordre p admettant une famille de caractéristiques $(p-1)^{\text{ème}}$.

Nous allons simplement traiter rapidement un exemple qui donne des transformations nouvelles.

Considérons la transformation définie par la relation

$$[illegible] = 0;$$

une équation $f(s, t, q, z) = 0$ est transformée en une équation du deuxième ordre, car l'équation $\varphi_2 = 0$ correspondant à une surface (s') transformée d'une intégrale quelconque (s) de $f = 0$ et l'équation $\varphi = 0$ admettent des solutions communes dépendant de deux constantes arbitraires [déduites de (1) par une translation quelconque

---

[1] CLAIRIN, *Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. XXVII, 1910, p. 451.

parallèle au plan Oxy]. Le système B′ déduit de $f = 0$ et $\varphi_2 = 0$, qui admettent une direction commune de caractéristiques, est de la forme

$$(\mathrm{B}_1^1)\qquad \begin{cases} f = 0, & \varphi_2 = 0, & \chi = 0, \\ \dfrac{df}{dx} = 0, & \dfrac{df}{dy} = 0, & \dfrac{d\varphi_2}{dx} = 0, & \dfrac{d\varphi_2}{dy} = 0 \end{cases}$$

Mais ψ ne contient pas r, (B_1^1) ne se trouve donc pas sous forme régulière, on en déduit

$$(\mathrm{B}_2^1)\qquad \begin{cases} \chi = 0, \\ f = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \dfrac{df}{dx} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

χ étant du premier ordre. Ce système est complètement intégrable et l'on en tire les conclusions habituelles. L'équation du deuxième ordre en z' admet une famille de caractéristiques du premier ordre, correspondant aux caractéristiques de $f = 0$ qui ne sont pas les courbes $x =$ const. (courbes γ).

Ceci posé, une relation

$$G(x', y', z', p', q', z, q, s, t) = 0$$

permet de former une équation du troisième ordre en z, en y substituant les expressions de x', y', z', p', q' qui définissent la transformation. La recherche des surfaces (s') qui correspondent aux intégrales de cette équation revient à la discussion de deux équations du deuxième ordre où figurent seulement z, q, s, t; si (s') correspond à une intégrale (s) quelconque de l'équation du troisième ordre, ces deux équations du deuxième ordre admettent des solutions communes dépendant de deux constantes arbitraires, et, en raisonnant comme nous venons de le faire, on constate que (s') doit être intégrale d'une seule équation qui se trouve être en général du troisième ordre. Cette équation admet généralement deux systèmes de caractéristiques du premier ordre et un du deuxième; mais une discussion serait nécessaire, que nous ne faisons pas.

Étude des singularités des transformations définies par une équation directrice.

3. *Remarques préliminaires sur la théorie des enveloppes de surfaces dépendant de deux paramètres.* — Soit

$$Z = f(X, Y, a, b) \tag{1}$$

l'équation des surfaces d'une telle famille que, pour la simplicité de l'écriture, nous supposons d'abord résolue par rapport à Z : on obtient l'enveloppe de ces surfaces, quand elle existe, en adjoignant à (1) les relations (2),

$$f'_a = 0, \quad f'_b = 0 \tag{2}$$

l'élimination de a et b entre (1) et (2) donne une relation qui représente l'équation de la surface enveloppe. Pour que cette élimination soit possible, il faut qu'on puisse tirer a et b de (2), c'est-à-dire que la relation

$$f'_a f'_b - f'_b f'_a = 0 \tag{3}$$

ne soit satisfaite ni identiquement ni comme conséquence de (2). Dans le premier cas, l'enveloppe se réduit évidemment à une courbe ou à un point. Plaçons-nous dans le deuxième ; les équations (2) permettent de calculer X et Y en fonction de a et b,

$$X = \varphi(a, b), \quad Y = \psi(a, b),$$

à condition que

$$\begin{vmatrix} \varphi'_a & \varphi'_b \\ \psi'_a & \psi'_b \end{vmatrix} \neq 0 \tag{4}$$

ne soit satisfait ni identiquement ni comme conséquence de (2). Supposons d'abord qu'il en soit ainsi : les relations (2) donnent, après différentiation,

$$f'_a f'_b - f'_b f'_a = (\varphi'_a \psi'_b - \varphi'_b \psi'_a)(f'_X f'_Y - f'_Y f'_X),$$

par conséquent, en raison de l'hypothèse faite sur (4),

$$(a) \quad f'_X f'_Y - f'_Y f'_X = 0.$$

il existe donc une relation au moins entre X et Y indépendante de a et b; puis il existe une relation entre X, Y, Z seuls, déduite de (1) à cause de (2). Dans ce cas, on peut donc dire que l'enveloppe se réduit à une courbe ou à un point.

Examinons maintenant l'hypothèse où la relation (4) est, comme (3), conséquence de (2). On s'en assure en calculant a et b au moyen de (4) et de la première (2), ce calcul étant supposé possible; la deuxième doit être satisfaite identiquement quand on y substitue à a et b les expressions qui viennent d'être calculées. De (1) on déduit une relation entre X, Y et Z qui est l'équation de la surface enveloppe (S); on obtient les coordonnées du point de S correspondant à la surface de paramètres a et b en calculant X et Y au moyen de (4) et de la première (2). Les expressions ainsi obtenues pour X et Y doivent satisfaire identiquement à la deuxième (2). Si ce calcul de X et Y était impossible, chaque surface enveloppée serait tangente à (S) le long d'une courbe. En chaque point de la surface (S), les coordonnées de l'élément du premier ordre sont les mêmes pour (S) et la surface enveloppée qui y passe, car $P = F_X$, $Q = F_Y$; de plus, on déduit par différentiation, comme conséquence de (4),

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} R - F_X & S - F_{XY} \\ S - F_{XY} & T - F_Y \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui exprime que la surface (S) est osculatrice à l'enveloppée.

Observons que le calcul qui a été fait de a et b peut fournir des systèmes de solutions qui ne satisfont pas à la deuxième (2) et qu'il ne faudra pas considérer.

Si le calcul de a et b est impossible de la façon que nous avons indiquée, une nouvelle discussion s'impose : en général, il n'existe pas de surface tangente aux surfaces données.

Si l'équation des surfaces enveloppées n'est pas résolue par rapport à Z :

$$F(X, Y, Z, a, b) = 0,$$

la relation (3) garde la même forme

$$F_a F_{ab} - F_b F_{aa} = 0,$$

mais il faut écrire à la place de (4), en posant $F_X + PF_Z = 0$, $F_Y + QF_Z = 0$,

$$(4)' \qquad \begin{vmatrix} F_{aX} + PF_{aZ} & F_{aY} + QF_{aZ} \\ F_{bX} + PF_{bZ} & F_{bY} + QF_{bZ} \end{vmatrix} = 0.$$

Exemple. — Soient les sphères

$$(1)_1 \qquad (X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2-R^2=0,$$

dont le centre est sur une surface donnée, le rayon dépendant de la position du centre ; les diverses relations que nous avons considérées sont ici

$$(2)_1 \qquad \begin{cases} X-x+p(Z-z)+RR_x=0 \\ Y-y+q(Z-z)+RR_y=0; \end{cases}$$

$$(3)_1 \qquad \begin{vmatrix} -1-p^2+r(Z-z)+RR_{xx}-R_x^2 & -pq-s(Z-z)+RR_{xy}+R_xR_y \\ -pq-s(Z-z)+RR_{xy}+R_xR_y & -1-q^2+t(Z-z)+RR_{yy}+R_y^2 \end{vmatrix}=0;$$

$$(4)'_1 \qquad \begin{vmatrix} 1+pP & pQ \\ qP & 1+qQ \end{vmatrix}=1+P+qQ=0;$$

$$X-x+P(Z-z)=0,$$
$$Y-y+Q(Z-z)=0.$$

L'élimination de $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ entre $(1)_1$, $(2)_1$ et $(3)_1$ procure, la surface des centres étant connue, une équation du deuxième ordre en R qui détermine le rayon de telle façon que les sphères de la congruence soient tangentes à une courbe ; le point caractéristique de la sphère enveloppe situé sur la courbe est donné par l'élimination indiquée; l'autre point engendre une surface. D'autre part, des équations $p(X-x)+q(Y-y)+(Z-z)=0$, (2_1) et $(4)_1$, on déduit

$$(Z-z)(1+p^2+q^2)+R(pR_x+qR_y)=0$$

puis

$$(X-x)(1+p^2+q^2)-R[R_x(1+p^2)-pqR_y]=0,$$
$$(Y-y)(1+p^2+q^2)-R[R_y(1+q^2)-pqR_x]=0;$$

d'où, finalement, la relation connue

$$(1+q^2)R_x^2+2pqR_xR_y+(1+p^2)R_y^2-(1+p^2+q^2)=0$$

ou

$$\Delta R=1,$$

Δ représentant le paramètre différentiel du premier ordre pris sur la surface des centres. Elle détermine R pour que les sphères considérées constituent une famille de sphères de courbure d'une certaine surface, que nous avons d'ailleurs complètement déterminée.

Remarque. — L'enveloppe d'une famille de surfaces qui dépendent

de deux paramètres (et qui comprend le lieu des points singuliers et des lignes singulières de ces surfaces) peut se décomposer en différents éléments correspondant aux divers cas signalés ; par exemple, l'enveloppe d'une famille de sphères peut se décomposer en une courbe et une surface, comme nous l'avons indiqué ; elle se décompose en deux courbes si R satisfait à un système de deux équations du second ordre qui expriment, par exemple, que les deux équations du second degré qui déterminent $Z - z$ ont leurs coefficients proportionnels.

6. Considérons la transformation [1] définie par la relation

$$F(x', y', z', x, y, z, \ldots, p_{0,n-1}) = 0. \tag{6}$$

Nous lui adjoignons les suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dF}{dx} = 0, \\ &\frac{dF}{dy} = 0; \end{aligned}\right. \tag{7}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\Gamma_x + p'F = 0, \\ &\Gamma_y + q'F = 0. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Le cas où, entre les équations (6) et (7), l'élimination de x', y', z' est possible a été écarté ; les relations $\delta = 0$, $\nabla = 0$ permettent, en général, chacune de déterminer une équation aux dérivées partielles en z par l'élimination de x', y', z' au moyen de (6) et (7), (σ_{n+1}) d'ordre $(n+1)$, (θ_n) d'ordre n. Nous observons immédiatement que (θ_n) est une intégrale intermédiaire de (σ_{n+1}) : les relations (7) donnent en effet par différentiation :

$$\frac{d^2F}{dx\,dx}dx' + \frac{d^2F}{dx\,dy}dy' + \frac{d^2F}{dx^2}dx + \frac{d^2F}{dx\,dy}dy = 0,$$

$$\frac{d^2F}{dx\,dy}dx' + \frac{d^2F}{dy\,dy}dy' + \frac{d^2F}{dx\,dy}dx + \frac{d^2F}{dy^2}dy = 0,$$

d'où l'on déduit que les dérivées de (θ_n) par rapport à x et y se cal-

---

[1] Pour la théorie analogue relative aux transformations de contact, voir Goursat, t. II_1, Chap. I ; Lie, *Math. Ann.*, t. LIV, p. 193 (art. posthume).

culent au moyen de

$$(10)\quad \frac{d^2F}{dx\,dy}\,\frac{d^2F}{dx^2}-\frac{d^2F}{dx\,dz}\,\frac{d^2F}{dx\,dy}=0,\qquad \frac{d^2F}{dx^2\,dy}\,\frac{d^2F}{dx\,dz}-\frac{d^2F}{dx\,dy}\,\frac{d^2F}{dy^2}=0,$$

en supposant

$$\frac{d^2F}{dx\,dz}\,\frac{d^2F}{dx\,dy}\neq 0$$

ce qui a lieu en général, et les intégrales de (θ_n) satisfont à l'équation que l'on déduit de $\delta=0$, c'est-à-dire (σ_{n+1}).

Ceci posé, si une surface (s) n'est pas intégrale de (σ_{n+1}), les ∞^2 surfaces Σ qui lui correspondent au moyen de (6) enveloppent une surface (S) que l'on obtient par les formules de la transformation et qui présente un contact du premier ordre avec chaque surface (Σ).

Supposons maintenant que (s) soit intégrale de (σ_{n+1}); si elle ne l'est pas de (θ_n), les ∞^2 Σ correspondantes sont tangentes à une courbe (c') de (e') ou bien ont un point commun; elles peuvent d'ailleurs être tangentes, en outre, à une certaine surface. Réciproquement, supposons que dans la relation (1), x', y', z' soient des constantes, nous obtenons une équation d'ordre $n-1$ qui est une intégrale intermédiaire de (σ_{n+1}), puisqu'elle satisfait à

$$\frac{dF}{dx^2}=0,\qquad \frac{dF}{dx\,dy}=0,\qquad \frac{dF}{dy^2}=0.$$

De même, si x, y, z sont les coordonnées des points d'une courbe de (e'), c'est-à-dire s'ils dépendent d'un paramètre t, l'élimination de t entre (6) et

$$1=\frac{dx}{dt}=1=\frac{dy}{dt}=1=\frac{dz}{dt}=0$$

procure une équation d'ordre $n-1$; les dérivées de cette équation s'obtiennent au moyen des relations (7), en y substituant à x', y', z' leurs expressions en t, puis à t la valeur que l'on vient de calculer; la différentiation des équations (7) donne des relations de la forme

$$A\,dx=\frac{dF}{dx^2}\,dx+\frac{dF}{dx\,dy}\,dy=0,$$

$$B\,dt=\frac{dF}{dx\,dy}\,dx+\frac{dF}{dy^2}\,dy=0.$$

d'où l'on en tire qui permettent de calculer les dérivées secondes de l'équation d'ordre $n-1$ considérée ; les solutions de cette équation satisfont donc à celles que l'on déduit de

$$B\frac{d^2F}{dx^2} - A\frac{d^2F}{dx\,dy} = 0,$$
$$B\frac{d^2F}{dx\,dy} - A\frac{d^2F}{dy^2} = 0$$

donc aussi à (σ_{n+1}) et l'équation d'ordre $n-1$ est intégrale intermédiaire de (σ_{n+1}) qui admet, par conséquent, une intégrale intermédiaire d'ordre $(n-1)$ dépendant de deux fonctions arbitraires d'une variable.

7. Les choses se passent d'une façon toute différente lorsque (s) est intégrale de (θ_n) : les ∞^2 surfaces (Σ) qui lui correspondent sont osculatrices à une surface (s') : nous déterminons x', y', z' au moyen de $(\overline{6})$, la première $(\overline{7})$ et $\overline{\nabla} = 0$; puis p et q' par $(\overline{8})$. Cherchons à déterminer les dérivées secondes. On déduit de (3) par différentiation :

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2F}{dx'^2}\,dx' + \frac{d^2F}{dx'\,dy}\,dy' - \frac{d^2F}{dx'\,dx}\,dx - \frac{d^2F}{dx'\,dy}\,dy = 0,\\ &\frac{d^2F}{dx'\,dy'}\,dx' + \frac{d^2F}{dy'^2}\,dy' + \frac{d^2F}{dy'\,dx}\,dx + \frac{d^2F}{dy'\,dy}\,dy = 0,\\ &\frac{d^2F}{dx'^2} = r'F_{z'} - \left(\frac{d^2F}{dx^2}\right), \quad \ldots \end{aligned}\right.$$

Puisque $\overline{\nabla} = 0$, nous en déduisons les relations $(\overline{12})$:

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2F}{dx'^2}\,\frac{d^2F}{dx\,dy} - \frac{d^2F}{dx'\,dy}\,\frac{d^2F}{dx\,dx} = 0,\\ &\frac{d^2F}{dx'\,dy}\,\frac{d^2F}{dx\,dy} - \frac{d^2F}{dy'^2}\,\frac{d^2F}{dx\,dx} = 0, \end{aligned}\right.$$

en admettant, ce qui est le cas général, que $\frac{d^2F}{dx\,dy}\cdot\frac{d^2F}{dx\,dx} \neq 0$.

Le système $(\overline{11})$ est, par suite, équivalent à l'une de ses équations, la première par exemple, et à $(\overline{12})$. D'ailleurs, des deux premières

relations (11) et (9), on tire

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2F}{dx'\,dy'}\,\dfrac{d^2F}{dx^2} - \dfrac{d^2F}{dx'\,dx}\,\dfrac{d^2F}{dx\,dy'} = 0, \\[2ex] \dfrac{d^2F}{dx'\,dy'}\,\dfrac{d^2F}{dx\,dy} - \dfrac{d^2F}{dx'\,dy}\,\dfrac{d^2F}{dx\,dy'} = 0, \end{cases}$$

ces deux relations sont compatibles grâce à la première (10) et déterminent (s'). Tout se passe comme si les deux relations $(\overline{12})$ étaient les dérivées par rapport à x' et y' d'une certaine relation ; on en déduit par différentiation trois relations où figurent les dérivées troisièmes de z', tandis que les relations $(\overline{13})$ seraient les dérivées par rapport à x et à y d'une autre relation et équivalentes à l'une d'entre elles, en tenant compte des relations déjà écrites ; nous pouvons indifféremment considérer une relation comme fonction de x' et y', ou de x et y, puisque nous avons défini une transformation ponctuelle entre ces deux couples de variables indépendantes. Une différentiation opérée sur les relations $(\overline{13})$ ne donne qu'une relation nouvelle, où figure une dérivée troisième de z' ; nous avons donc, en tout, quatre relations pour déterminer ces dérivées : trois d'ordre $n+1$, une d'ordre $n+2$, et ainsi de suite pour déterminer les dérivées successives de z' ; pour déterminer les dérivées d'ordre p, on obtient p relations contenant les dérivées de z jusqu'à l'ordre $p+n-2$, une autre les contenant jusqu'à l'ordre $p+n-1$.

On peut se faire une idée du système auquel satisfont les surfaces qui correspondent aux intégrales de (θ_n). Formons toutes les équations qui contiennent des dérivées de z jusqu'à l'ordre p' : il y a celles qui donnent x', y', z' et ses dérivées jusqu'à l'ordre $p-1$, tel que $p' = p+n-2$, puis p qui contiennent les dérivées de z' d'ordre p ; ensuite, il y a la relation $\nabla = 0$ et celles qui permettent de calculer les dérivées de (θ_n) jusqu'à l'ordre p' en z ; cela fait en tout

$$2 + \frac{p(p+1)}{2} + p + \frac{(p-n+1)(p'-n+2)}{2}$$
$$= 2 + p + \frac{p(p+1)}{2} + \frac{p(p-1)}{2} = p^2 + p + 2 :$$

les arguments à éliminer x, y, z et ses dérivées jusqu'à l'ordre p

forment un total de

$$2 + \frac{(p'+1)(p'+2)}{2} = 2 \cdot \frac{(p-n-1)(p-n)}{2}.$$

Si $n = 2$, pour $p = 2$ on obtient un nombre de relations égal au nombre d'inconnues à éliminer; pour $p = 3$, l'élimination de $x, y, z, \ldots$ donne deux relations du troisième ordre en z', $p = 4$ donne trois nouvelles relations du quatrième ordre; l'équation (θ) est du deuxième ordre et il lui correspond un système de deux équations du troisième ordre en involution.

Si $n = 3$, l'équation (θ) est du troisième ordre et l'on constate que le système correspondant comprend deux équations du 5e ordre, quatre du 6e, cinq du 7e, six du 8e, etc.

Si $n = 4$, l'équation (θ) est du quatrième ordre, il lui correspond un système en involution comprenant une équation du 7e ordre, cinq équations du 8e, six du 9e, sept du 10e, etc.

Ce sont là du moins les circonstances générales; et à une solution d'un de ces systèmes correspond une seule intégrale de (θ) parfaitement déterminée.

Exemple. — Considérons la transformation définie par

$$(x'-a)^2 + (y'-b)^2 + (z'-c)^2 - R^2 = 0,$$

a, b, c, R étant fonctions de x, y, z et de certaines de ses dérivées.

L'équation (θ) est donnée par la relation

$$E\left(\frac{dR}{dy}\right)^2 - 2F\frac{dR}{dx}\frac{dR}{dy} + G\left(\frac{dR}{dx}\right)^2 - (EG - F^2) = 0,$$

où

$$E = \left(\frac{da}{dx}\right)^2 + \left(\frac{db}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dc}{dx}\right)^2, \quad \ldots$$

A une surface (s) intégrale de (θ) correspondent ∞^2 sphères qui sont les sphères de courbure d'une surface (s'). Si a, b, c, R ne dépendent que de x, y, z, p, q, ces surfaces (s') sont en général intégrales d'un système de deux équations du troisième ordre en involution, à toute solution duquel correspond une solution de (θ).

8. On pourrait rechercher, par la méthode que nous venons de

donner, les circonstances où le système correspondant à (θ) est plus simple que celui dont nous avons établi l'existence, et en particulier se réduit à une seule équation. Il sera plus simple de procéder suivant l'autre méthode, que nous avons exposée dans le cas général; la correspondance établie entre (θ) et le système en question est définie par les relations (6), (8) et (14) :

$$(14) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{d^2F}{dx'^2} & \dfrac{d^2F}{dx'\,dy'} \\ \dfrac{d^2F}{dx'\,dy'} & \dfrac{d^2F}{dy'^2} \end{vmatrix} = 0;$$

nous allons chercher à quelles conditions doit satisfaire une surface (s') de (e') pour qu'il lui corresponde, par ces quatre relations, quelques surfaces (s); nous calculons x' et y' par l'une des relations $(\overline{\overline{8}})$ et $(\overline{\overline{14}})$, puis, au moyen de $(\overline{\overline{6}})$ et l'autre $(\overline{\overline{8}})$, nous obtenons deux équations aux dérivées partielles d'ordre $n-1$ en z : $\psi = 0$, $\chi = 0$; d'une façon générale, pour trouver la transformée d'une équation d'ordre n, l'ordre de (θ), par la transformation (6), on est conduit à discuter le système de deux équations d'ordres $n-1$ et n; dans le cas présent, on trouve donc une simplification. Elle s'explique aussi parce que (θ_n) admet, avec l'équation $\psi = 0$, $n-1$ directions communes de caractéristiques; cela résulte des relations (10); on en conclut que des quantités proportionnelles aux dérivées du premier membre de (θ_n), par rapport à $p_{n,0}, \ldots, p_{0,n}$, se déduisent des expressions

$$\frac{d^2F}{dy'\,dy}\,F_{p_{i,j}} - \frac{d^2F}{dx'\,dx}\,F_{p_{i,j}+1,j} \qquad (i = j = n-1)$$

où l'on remplace x', y', z' par des expressions en $x, y, z, \ldots, p_{0,n}$; les dérivées du premier membre de $\psi = 0$ sont, de même, proportionnelles à des quantités déduites des $F_{p_{i,j}}$, où l'on remplace x', y', z' par des fonctions de $x, y, z, \ldots, p_{0,n}$, qui sont différentes des précédentes, mais qui prennent la même valeur en x et y lorsqu'on y suppose que z est la fonction de x et y qui définit une surface intégrale de (θ_n) : (s); les $(n-1)$ solutions en $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ de l'équation qui définit les caractéristiques de $\psi = 0$ sur (s) sont donc solution de l'équation analogue relative à (θ_n); soient (γ^1) les courbes ainsi définies.

A un bandeau d'ordre $(n-1)$ appartenant à (s) correspond en

général une surface de (e'), à moins que le bandeau ne soit supporté par une courbe (γ^1), auquel cas il lui correspond un bandeau du premier ordre ; la démonstration est la même que celle qui a été donnée dans le cas d'un bandeau appartenant à une surface quelconque supporté par une courbe (γ). De même à un bandeau d'ordre n situé sur une intégrale de (θ_n) correspond en général un bandeau du premier ordre, à moins que la valeur de s' déduite de (13) ne soit indépendante des dérivées de z d'ordre $n+1$, ce qui exige que le bandeau soit supporté par une courbe (γ^1), et il lui correspond alors un bandeau du second ordre, en général.

Il résulte de là que le système correspondant à (θ_n) admet une famille de caractéristiques du premier ordre et $n-1$ du second ordre lorsque toutes les caractéristiques de (θ_n) sont du $n^{\text{ième}}$ ordre. Si une des familles supportées par des courbes (γ^1) est d'ordre inférieur à n, il lui correspond des caractéristiques du premier ordre.

Nous allons d'abord étudier le cas où $n=2$; il conduit à des propriétés générales des équations du second ordre, qui ne peuvent se généraliser au cas où $n>2$; nous donnerons ensuite une idée des différences qui se présentent en nous occupant du cas où $n=3$.

9. Soit la relation (15) qui définit une transformation

$$F(x', y', z', x, y, z, p, q) = 0. \tag{15}$$

L'équation (θ) est du second ordre et il lui correspond en général un système de deux équations du troisième ordre en involution; nous sommes d'ailleurs dans un cas particulier d'une question précédemment exposée. Pour étudier les diverses circonstances qui peuvent se présenter, nous avons à discuter le système des deux équations du premier ordre $\psi=0$, $\chi=0$; formons les équations qui nous permettent de calculer celles dont nous avons besoin pour cette discussion : $\chi_p\psi_q-\psi_q\chi_p=0$: $(\overline{\overline{16}})$; $[\psi,\chi]=0$: $(\overline{\overline{17}})$, et les deux relations (9) (Chap. I), $(\overline{\overline{18}})$:

$$\begin{vmatrix} F_p & F_q \\ \dfrac{d^2F}{dx\,dy}\dfrac{dF_p}{dx}-\dfrac{d^2F}{dx^2}\dfrac{dF_p}{dy} & \dfrac{d^2F}{dy^2}\dfrac{dF_q}{dx}-\dfrac{d^2F}{dx\,dy}\dfrac{dF_q}{dy} \end{vmatrix}=0; \tag{16}$$

$$\frac{d^2F}{dx\,dy}\left[F,\frac{dF}{dx}\right]-\frac{d^2F}{dx^2}\left[F,\frac{dF}{dy}\right]=0 \tag{17}$$

et

$$(18)\quad \begin{cases} \begin{vmatrix} F_p & F_x + pF_z \\ \dfrac{d^2F}{dx^2\,dy}\,\dfrac{dF_p}{dx} - \dfrac{d^2F}{dx^2}\,\dfrac{dF_p}{dy} & \dfrac{d^2F}{dx\,dy}\,\dfrac{d(F_x + pF_z)}{dx} - \dfrac{d^2F}{dx^2}\,\dfrac{d(F_x + pF_z)}{dy} \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} F_p & F_y + qF_z \\ \dfrac{d^2F}{dx^2\,dy}\,\dfrac{dF_p}{dx} - \dfrac{d^2F}{dx^2}\,\dfrac{dF_p}{dy} & \dfrac{d^2F}{dx\,dy}\,\dfrac{d(F_y + qF_z)}{dx} - \dfrac{d^2F}{dy^2}\,\dfrac{d(F_y + qF_z)}{dy} \end{vmatrix} = 0. \end{cases}$$

Supposons d'abord que (16) ne soit pas conséquence algébrique des autres relations qui définissent la transformation de (θ) : (15), (7), (8), $\delta = 0$, $\nabla = 0$, $\Delta = 0$. Si, entre les cinq relations d'où l'on déduit $\psi = 0$ et $\chi = 0$: (15), (8), (14) et (17), on peut éliminer x, y, z, p, q de telle façon qu'on obtienne une relation ne contenant que x', y', z' et ses dérivées, cette relation constitue une équation aux dérivées partielles (Θ) à une solution de laquelle correspondent, en général, des solutions de (θ) dépendant d'une constante arbitraire.

Exemples. — Ce cas se présente si l'une des lettres x, y, z ne figure pas dans F; elle ne figure pas non plus dans l'équation de (θ); il se présente aussi lorsque x, y, z, p, q ne figurent dans F que par les quatre invariants d'un groupe de transformations de contact à un paramètre. Soit (s) une surface correspondant à une solution (s) de (θ) : les deux équations $\psi = 0$, $\chi = 0$, qu'elle permet de former, sont en involution puisqu'elles admettent comme solutions (s') et les surfaces qu'on en déduit par les transformations du groupe considéré. L'équation (θ) admet alors évidemment ce groupe de transformations, ce qui était à prévoir.

Ainsi, reprenons la transformation définie par

$$(x' - a)^2 + (y' - b)^2 + (z - c)^2 = R^2,$$

en supposant a, b, c, R fonctions de $p, q, x - pz, y - qz$: nous savons former l'équation (θ) correspondante au moyen de $\Delta R = 1$; elle admet le groupe des dilatations; à cette équation correspond une équation du second ordre, et si la correspondance entre droites et sphères est telle qu'à deux droites qui se rencontrent correspondent deux sphères tangentes, sur deux surfaces intégrales correspondantes des deux équations les lignes de courbure se correspondent.

L'équation Θ, d'après la façon dont elle est formée, admet en

général un système de caractéristiques du premier ordre; cela résulte aussi de la théorie générale, l'équation (6) n'admettant, sauf exceptions, que des caractéristiques du second ordre.

Pour obtenir les conditions auxquelles doivent satisfaire la fonction F pour que l'élimination soit possible, remplaçons d'abord (14) par

$$(19)\qquad \frac{d^2F}{dx'\,dy'}\left[F,\ \frac{dF}{dx}\right]_z + \frac{d^2F}{dy'^2}\left[F,\ \frac{dF}{dx}\right]_z = 0.$$

Il faut qu'on puisse éliminer x, y, z, p, q entre (14), (8), (17) et (19): le déterminant fonctionnel des premiers membres par rapport à x, y, z, p, q doit être nul en tenant compte de ces relations; cela donne une relation en s' qui paraît du deuxième degré, mais qui est seulement du premier; on y remplace p' et q' au moyen de (8) et la fonction F doit satisfaire à deux conditions seulement, moyennant $F = 0$.

Passons aux articles suivants du tableau de discussion de deux équations du premier ordre.

Pour que la relation (16) soit satisfaite, il faut d'abord que

$$\frac{F_p}{F_q} = \frac{\left(\dfrac{dF}{dx'}\right)_p}{\left(\dfrac{dF}{dy'}\right)_p} = \frac{F_{xp} + p'F_{zp}}{F_{xq} + p'F_{zq}} = \frac{F_{yp} + q'F_{zp}}{F_{yq} + q'F_{zq}}.$$

En y remplaçant p' et q' par leurs expressions tirées de (8), il vient

$$\frac{F_p}{F_q} = \frac{F_{xp}F_z - F_{zp}F_x}{F_{xq}F_z - F_{zq}F_x} = \frac{F_{yp}F_z - F_{zp}F_y}{F_{yq}F_z - F_{zq}F_y}.$$

Cela entraîne que le rapport $\frac{F_p}{F_q}$ soit fonction de x, y, z, c'est-à-dire que F satisfasse à une équation de la forme

$$\frac{F_p}{F_q} = \Phi(F, x, y, z)$$

ou, en définitive, que F soit fonction de p et q par l'intermédiaire d'une expression de la forme

$$l(x, y, z, p, q)$$

de telle sorte que l'équation de la transformation est

$$F_1[x', y', z', f(x, y, z, p, q), x, y, z] = 0,$$

la réciproque est évidente. Le cas se présente lorsque p ou q ne figure pas dans F.

Supposons alors que (16) soit satisfaite; les équations $\psi = 0$ et $\chi = 0$ admettent une seule solution commune, en général; elles peuvent ne pas en admettre du tout ou admettre toutes celles de l'une d'elles; l'élimination de x, y, z, p, q, entre les six relations (15), (8), (14), (18), conduit en général à une équation (Θ_1) du second ordre en z'; à toute solution de (Θ_1) correspond en général une seule solution de (θ); les deux équations (θ) et (Θ_1) se correspondent dans une transformation (B_1).

Recherchons enfin s'il est possible que les équations $\psi = 0$ et $\chi = 0$ admettent, pour toute intégrale de (θ), une solution singulière : (16) doit être conséquence de (14), (15), (8) et (18); s'il en est ainsi, l'élimination de x, y, z, p, q entre ces six relations donne une équation du second ordre en z' : (Θ_2); mais on s'aperçoit que les deux équations (θ) et (Θ_2) se correspondent dans une transformation de Bäcklund B_1 définie par les quatre relations (15), (8) et celle que l'on déduit de (18) par l'élimination du rapport $\frac{d^2 f}{dx^2} : \frac{d^2 f}{dx\,dy}$, et nous n'insistons pas.

Remarque. — Dans tout ce qui précède, nous nous sommes bornés à envisager les circonstances générales qui peuvent se présenter, où certaines expressions ne sont pas nulles soit identiquement, soit comme conséquence des relations que l'on considère; l'examen des divers cas particuliers qui se présentent n'offre aucune difficulté et n'apprend d'ailleurs rien de bien important. Signalons toutefois que nous avons supposé que l'élimination de x, y, z, p, q est impossible entre (15), (8) et (14), et que cette hypothèse revient à admettre que F ne dépend pas de x, y, z, p, q par l'intermédiaire seulement de trois fonctions $\psi_1(x, y, z, p, q)$, ψ_2, ψ_3, comme on s'en aperçoit aisément en supposant pour un instant la relation (15) résolue par rapport à z'. La transformation $\xi = \psi_1$, $\eta = \psi_2$, $\zeta = \psi_3$ nous ramène à étudier les surfaces qui se comportent d'une façon singulière dans une transformation de contact.

10. Étant donnée une équation du second ordre

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \tag{20}$$

peut-on l'obtenir en partant d'une transformation définie par une relation telle que (15) vis-à-vis de laquelle elle jouerait le rôle de l'équation (θ). La réponse est affirmative; on peut, sauf exceptions, déterminer de telles transformations; seulement, en général, elles ne font pas correspondre à (20) une seule équation, mais un système de deux équations du troisième ordre.

Pour le montrer, nous allons faire usage de la représentation géométrique habituelle où r, s, t sont considérés comme les coordonnées d'un point d'un espace à trois dimensions (ε). Soit h la surface dont l'équation est (20). Observons que la surface doit alors pouvoir être obtenue comme la surface focale de la congruence des droites définies par les relations

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dF}{dx} &= 0, \\ \frac{dF}{dy} &= 0, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

x', y', z' étant les paramètres liés par la relation $F = 0$. Les droites de cette congruence appartiennent au complexe des droites qui rencontrent la conique située à l'infini sur le cône $rt - s^2 = 0$. Inversement, connaissant la surface (h), cherchons à déterminer la congruence formée par ses tangentes qui sont parallèles aux génératrices de ce cône. Posons

$$\frac{F_x + pF_z}{F_p} = u, \qquad \frac{F_y + qF_z}{F_p} = v, \qquad \frac{F_z}{F_p} = w.$$

L'équation de la congruence s'écrit :

$$\left\{\begin{aligned} u + r + sw &= 0, \\ v + s + tw &= 0, \end{aligned}\right. \tag{21}$$

u, v, w dépendant des deux paramètres. Considérons-les comme les coordonnées d'un point d'un espace à trois dimensions (ε'); les coordonnées de ce point dépendent de deux paramètres, il décrit en général une surface (h') et les deux surfaces (h) et (h') se correspondent dans la transformation de contact définie par les deux relations (21). On obtient facilement l'équation de la surface (h'), soit

$$\varphi(u, v, w) = 0. \tag{22}$$

Pour obtenir les congruences cherchées, il suffira d'exprimer les coordonnées d'un point de (h') en fonction de deux paramètres. Revenons à la question posée; la relation (22) permet d'établir une relation homogène entre $F_x + pF_z$, $F_y + qF_z$, F_p, F_q; on obtient ainsi une équation aux dérivées partielles du premier ordre en F : il suffit de considérer une solution de cette équation dépendant de trois constantes arbitraires pour obtenir une fonction F répondant aux conditions demandées, et cela est toujours possible d'une infinité de façons. En particulier, si x ne figure pas dans f, nous pouvons chercher une fonction F qui ne contienne pas x: ce sera une intégrale complète de l'équation que nous avons appris à former, nous en déduisons le théorème suivant :

Étant donnée une équation du deuxième ordre admettant une transformation infinitésimale, il est toujours possible, par l'intégration d'équations différentielles, de la transformer en une équation du deuxième ordre admettant un système au moins de caractéristiques du premier ordre. On peut même trouver une infinité de ces transformations correspondant aux diverses intégrales complètes de l'équation du premier ordre qui détermine F : *les diverses équations du deuxième ordre qu'on obtient se déduisent de l'une d'entre elles par une transformation de contact quelconque, ainsi qu'il résulte d'une propriété connue des équations du premier ordre.*

Remarques. — I. La transformation F étant choisie, une famille de courbes (γ') se trouve déterminée sur les surfaces intégrales de (20); il est facile de reconnaître avec laquelle des deux familles de caractéristiques elle coïncide. Des formules de la transformation de contact on déduit en effet

$$wf_r - f = \frac{-f_t}{w},$$

d'où

$$f_r w^2 - wf_s - f_t = 0,$$

ou encore

$$f_r F_q^2 - f_s F_p F_q + f_t F_p^2 = 0;$$

une détermination étant choisie pour w, c'est la famille de caractéristiques correspondant à la même détermination qui coïncide avec les courbes (γ') et c'est l'autre famille qui correspond aux caractéristiques du premier ordre de (Θ).

II. Nous avons admis qu'à h correspond par la transformation de contact (21) une surface (h') : il peut lui correspondre une courbe : il faut pour cela que la fonction f (de r, s, t) soit intégrale d'une équation du second ordre, l'intégration de cette équation est évidente ; l'équation (20) doit représenter une surface réglée dont les génératrices appartiennent au complexe précédemment indiqué : l'équation $f = 0$ admet donc au moins un système de caractéristiques du premier ordre et la transformation qui correspond à ce système est une transformation de Bäcklund. Si l'équation est de Monge-Ampère, les deux transformations sont de Bäcklund, en admettant naturellement qu'à l'équation (20) corresponde une équation.

L'équation du second ordre qui définit les équations admettant un système de caractéristiques du premier ordre admet une intégrale singulière du premier ordre dont les intégrales fournissent les équations admettant des caractéristiques doubles, car la surface (h) correspondante est une développable dont les génératrices appartiennent au complexe ; mais ceci est un cas dont nous ne nous occupons pas ici.

Nous avons supposé que l'élimination de x', y', z' entre (15), (17) et $V = 0$ conduit à une seule relation entre x, y, z et ses dérivées, mais on voit par l'exemple d'une relation (15) linéaire en x', y', z' qu'il peut se faire qu'on soit conduit à deux relations. Il est facile de déterminer les fonctions F qui ne conduisent pas à une seule relation : par la transformation de contact (21), à une surface (h') quelconque de (ε) correspond une surface (h) de (ε), à moins que (h') ne soit intégrale d'une équation du second ordre, auquel cas il lui correspond une courbe ou un point ; cette équation du second ordre admet une intégrale intermédiaire du premier ordre dont les solutions correspondent aux développables que nous venons de signaler ; on peut donc définir des transformations conduisant aux équations à caractéristiques doubles. Mais on remarque, comme dans le cas général, que la transformation ne fait pas correspondre nécessairement à (θ) une équation (Θ).

III. A diverses reprises, nous avons trouvé que les transformations que nous déterminions étaient des transformations de Bäcklund ; on peut aisément former les conditions auxquelles doit satisfaire la fonction F pour qu'il en soit ainsi ; il nous suffit d'examiner le cas où ce n'est pas par une solution singulière des deux équations $\psi = 0$, $\chi = 0$ que s'établit la correspondance ; il faut alors que des relations (7) et $\nabla = 0$, on en déduise une qui soit indépendante de r, s, t. La droite (7) ren-

contre la quadrique représentée par $\nabla = 0$ en un point dont la coordonnée s est donnée par une relation de la forme $Ks + K_1 = 0$; dans K et K_1 nous remplaçons p' et q' par les expressions tirées de (8); nous obtenons $Ls + L_1 = 0$; il faut que moyennant $F = 0$ les deux expressions L et L_1 aient un facteur commun; comme cas particulier on peut prendre une fonction F satisfaisant soit à $L = 0$, soit à $L_1 = 0$.

11. *Transformations du troisième ordre : $n = 3$.* — Soit

$$F(x, y, z, x', y', z', p, q, r, s, t) = 0 \tag{23}$$

la relation directrice; l'équation (θ) est du troisième ordre, et nous avons vu qu'il lui correspond généralement un système en z' du troisième ordre d'involution, dont les équations de base comprennent deux équations du cinquième et une du sixième ordre; nous nous proposons de rechercher s'il est possible qu'à (θ) corresponde une seule équation.

La détermination des surfaces (s') correspondant à une intégrale quelconque (s) de (θ) revient à la discussion du système de deux équations du second ordre $\psi = 0$, $\chi = 0$, provenant de l'élimination de x' et y' entre les relations (23), (24), (25) :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dF}{dx'} = 0, \\[2ex] \dfrac{dF}{dy'} = 0, \end{array}\right. \tag{24}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{d^2F}{dx'^2} & \dfrac{d^2F}{dx'\,dy'} \\[2ex] \dfrac{d^2F}{dx'\,dy'} & \dfrac{d^2F}{dy'^2} \end{vmatrix} = 0; \tag{25}$$

les surfaces (s') sont déterminées comme solution d'une seule équation aux dérivées partielles (Θ), si de ces deux équations $\psi = 0$, $\chi = 0$ on déduit un système (A) ou (B) ($r = 1$ ou 2) tel que $|\psi, \chi| = 0$ en soit conséquence algébrique.

Si les deux équations n'admettent pas en général de direction commune de caractéristiques, pour que cela se produise il faut qu'elles admettent des solutions communes dépendant de quatre constantes arbitraires; c'est ce qui arrive, par exemple, lorsque parmi les lettres non accentuées qui figurent dans F il manque z et trois autres parmi x, y, p, q, ou bien encore s, p, q, z.

Si les deux équations admettent en général une direction commune de caractéristiques, on en déduit un système (B^1) et différents cas peuvent se présenter : par exemple, on obtient une équation (Θ) si parmi les petites lettres ne figurent que s, t, p, q ou s, t, q, z, ou bien encore y, q, s, t; mais, par la transformation $\zeta = q$, on est ramené dans ce dernier cas à une transformation déjà étudiée, l'équation (Θ) est seulement du deuxième ordre et à chacune de ces solutions correspondent des intégrales (Θ) données par l'intégration d'une équation du premier ordre. L'étude du cas où les deux équations admettent généralement des solutions singulières engendrées par une famille de caractéristiques communes est compliquée parce qu'elle fait intervenir des relations où figurent les dérivées troisièmes de z'; nous la laissons de côté et arrivons au cas où les deux équations admettent généralement les deux directions de caractéristiques communes.

Le système (B^2) qu'on en déduit est équivalent à celui d'une équation du deuxième ordre et d'une équation du premier ordre ; donnons des exemples des différentes circonstances qui peuvent se présenter. La fonction F ne contient que s, p, q et une des trois lettres x, y, z; le système (B_1^2) est complètement intégrable puisqu'il admet des solutions dépendant de deux constantes arbitraires; la fonction F ne contient que s, q, z et une des lettres x, y; le système (B_2^2) est complètement intégrable puisqu'il admet des solutions dépendant d'une constante arbitraire; la fonction F ne contient que x, y, z, s; le système (B_3^2) admet une solution parfaitement déterminée; la fonction F contient x, y, q, s et l'équation (Θ) est du deuxième ordre. Enfin, le cas où les deux équations ont une direction de caractéristiques doubles communes se rattache à celui-là ; ainsi, lorsque la fonction F ne contient que x, y, z, q, t, elle définit une transformation entre deux équations du troisième ordre ayant une direction de caractéristiques doubles et telle qu'à une solution de chaque équation correspond une solution de l'autre.

Recherchons maintenant s'il peut se faire que le système des deux équations admette généralement des solutions singulières communes engendrées chacune par des caractéristiques des deux familles. Les mineurs de D procurent les relations

$$\frac{\dfrac{d^2F}{dx\,dy}\dfrac{dF_x}{dx} - \dfrac{d^2F}{dx^2}\dfrac{d^2F}{dy^2}}{F_x} = \frac{\dfrac{d^2F}{dx\,dy}\dfrac{dF_y}{dx} - \dfrac{d^2F}{dx^2}\dfrac{dF_y}{dy}}{F_y}$$

$$= \frac{\dfrac{d^2F}{dx\,dy}\dfrac{dF_z}{dx} - \dfrac{d^2F}{dx^2}\dfrac{dF_z}{dy}}{F_z}$$

et les deux premières relations qu'il faut adjoindre pour former le système (C^2) sont obtenues en égalant les deux rapports suivants à l'un de ceux qu'on vient d'écrire :

$$\frac{\dfrac{d^2F}{dx'\,dy'}\,\dfrac{d\left(\dfrac{dF}{dx}\right)}{dx'} - \dfrac{d^2F}{dx'^2}\,\dfrac{d\left(\dfrac{dF}{dx}\right)}{dy'}}{\left(\dfrac{dF}{dx}\right)}, \qquad \frac{\dfrac{d^2F}{dx'\,dy}\,\dfrac{d\left(\dfrac{dF}{dy}\right)}{dx} - \dfrac{d^2F}{dx'^2}\,\dfrac{d\left(\dfrac{dF}{dy}\right)}{dy}}{\left(\dfrac{dF}{dy}\right)},$$

ce qui donne comme condition que trois relations se réduisent algébriquement à une seule. Ici encore les transformations qu'on obtient appartiennent à une classe déjà indiquée, définie par quatre relations du premier ordre par rapport aux lettres accentuées, du second par rapport aux autres et telles que les déterminants déduits de la matrice (27) (Chap. II) soient nuls comme conséquence de ces relations. Pour indiquer un exemple, supposons que F ne contienne que x, z, q, s, t; un seul des mineurs déduit de D procure une condition. Des deux relations que l'on adjoint pour former (C^2), une seule contient p, nous éliminons le rapport $\frac{dF}{dx\,dy} : \frac{dF}{dx^2}$ entre l'autre et la condition dont nous venons de parler; nous obtenons ainsi une équation aux dérivées partielles pour déterminer la fonction F de x', y', z', y, z, q, s, t, de façon à ce qu'elle définisse une transformation entre deux équations du troisième ordre; à toute solution de (Θ) en correspondent de (θ) dépendant d'une constante arbitraire. — Les équations (Θ) que nous avons obtenues admettent des caractéristiques du premier ou du deuxième ordre, comme on s'en assure en appliquant les résultats généraux que nous avons établis.

12. Une propriété fondamentale distingue le cas où $n = 3$ de celui où $n = 2$.

Nous avons vu qu'une équation quelconque du deuxième ordre peut s'obtenir comme équation (θ) d'une infinité de transformations; nous allons montrer qu'une équation du troisième ordre quelconque ne peut être obtenue de cette façon.

Employons une représentation géométrique analogue à celle qui a été employée pour les équations du second ordre; α, β, γ, δ représentent les coordonnées d'un point d'un espace à quatre dimensions (ε). Une équation du troisième ordre

$$(26) \qquad f(\alpha, \beta, \gamma, \delta, x, y, z, p, q, s, t) = 0$$

peut donc s'interpréter comme étant l'équation d'une surface à trois dimensions de (ε), soit (h). Supposons que $f = 0$ soit l'équation (θ) d'une transformation définie par $F = 0$. Posons

$$\frac{\left(\frac{dF}{dx}\right)}{F_t} = u, \qquad \frac{\left(\frac{dF}{dx}\right)}{F_t} = v, \qquad \frac{F_z}{F_t} = w, \qquad \frac{F_t}{F_t} = \rho,$$

et admettons que u, v, w, ρ représentent les coordonnées d'un point d'un espace à quatre dimensions (ε'). Considérons la transformation de contact entre (ε) et (ε') définie par les deux relations

$$(29) \qquad \begin{cases} u + \alpha + \beta w + \gamma \rho = 0, \\ v + \beta + \gamma w + \delta \rho = 0. \end{cases}$$

La façon dont on suppose obtenue l'équation $f = 0$ s'interprète ainsi: u, v, w, ρ dépendent de trois paramètres x', y', z' liés par la relation $F = 0$, ils définissent donc une multiplicité à deux dimensions de (ε'); par la transformation de contact, il lui correspond une surface à trois dimensions de (ε) : (h); mais réciproquement à (h) doit correspondre une multiplicité à deux dimensions de (ε'); or, en général, étant donnée une surface (h) quelconque, il lui correspond, par la transformation de contact, une surface de (ε) à trois dimensions. Pour qu'il lui corresponde une multiplicité à deux dimensions, il faut que (h) soit intégrale d'une équation du deuxième ordre, comme il résulte de la théorie des transformations de contact. Soient

$$\Phi_1(x_1, x_2, x_3, z; x'_1, x'_2, x'_3, z') = 0,$$
$$\Phi_2(x_1, x_2, x_3, z; x'_1, x'_2, x'_3, z') = 0,$$

les relations qui définissent la transformation entre deux espaces (x_1, x_2, x_3, z), (x'_1, x'_2, x'_3, z'); nous leur adjoignons:

$$\frac{\frac{d\Phi_1}{dx_1}}{\frac{d\Phi_2}{dx_1}} = \frac{\frac{d\Phi_1}{dx_2}}{\frac{d\Phi_2}{dx_2}} = \frac{\frac{d\Phi_1}{dx_3}}{\frac{d\Phi_2}{dx_3}}.$$

Formons la relation obtenue en égalant à zéro le déterminant fonctionnel par rapport à x_1, x_2, x_3, z des quatre relations obtenues; l'équation du deuxième ordre dont nous venons de parler, U, admet une intégrale intermédiaire V, qui s'obtient par l'élimination de x_1,

x'_2, x'_3, z' entre les cinq relations formées. Si nous choisissons (h) parmi les intégrales de cette équation, U, qui ne sont pas intégrales de V, en général il lui correspond une multiplicité à deux dimensions de (ε') dont les équations sont

$$h_1(u, v, w, \rho) = 0, \qquad h_2(u, v, w, \rho) = 0,$$

d'où l'on déduit un système de deux équations aux dérivées partielles du premier ordre pour déterminer F et il faut qu'il admette une solution dépendant de trois constantes arbitraires, ce qui n'a pas lieu en général. Il faut d'ailleurs remarquer que, lorsque cela se produit, l'équation du troisième ordre (26) se transforme en un système en z', à moins qu'elle ne satisfasse encore à d'autres conditions. On peut du reste indiquer aisément une classe d'équations du troisième ordre qui sont certainement équations (θ) d'une transformation $F = 0$; ce sont celles qui ont pour équation

$$f(x, y, z, p, q, s, t, \gamma, \delta) = 0,$$

et pour lesquelles on peut établir une théorie analogue à celle des équations du deuxième ordre en recherchant une fonction F où ne figure pas r.

Les équations d'ordre supérieur au troisième se comportent d'une manière analogue à celle dont se comportent les équations de cet ordre; mais pour fournir des exemples, au fur et à mesure que l'ordre s'élève, on doit se reporter à des articles de plus en plus éloignés du tableau de discussion.

TABLE DES MATIÈRES.

Huitième
~~SEPTIÈME~~ SÉRIE. — TOME ~~IV~~.

Les indications qui précèdent le titre de chaque Mémoire de cette Table sont celles adoptées par le Congrès international de Bibliographie des Sciences mathématiques en [illegible].

(*Note de la Rédaction.*)

Pages.

[T7c] Les ondes électromagnétiques planes périodiques et le problème de leur réflexion et de leur réfraction; par M. *Louis Roy* 1

[H11d] Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles; par M. *Gaston Julia* 47

[O″6h] Sur les surfaces minima ou élassoïdes; par M. *F.-C. Clapier*. 247

[H9f] Sur les transformations des équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque à deux variables indépendantes; par M. *G. Cerf* 309

~~FIN DU TOME IV DE LA SEPTIÈME SÉRIE~~.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie

[illegible] Quai des Grands-Augustins, 55

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PUBLIÉ DE 1875 A 1884

PAR H. RESAL

HUITIÈME SÉRIE

PUBLIÉE

Par CAMILLE JORDAN

AVEC LA COLLABORATION DE

G. HUMBERT, R. DE MONTESSUS DE BALLORE, E. PICARD

TOME DEUXIÈME — ANNÉE 1919

(87e Volume de la Collection)

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

55, Quai des Grands-Augustins

1919

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur les constituants transitifs de certains groupes linéaires à invariant bilinéaire dans un champ de Galois ;

Par J.-A. de SÉGUIER.

Le présent travail peut être considéré comme une suite de mon Mémoire *Sur les groupes à invariant bilinéaire ou quadratique dans un champ de Galois* (1), dont je conserverai la terminologie et les notations (2).

Ces deux Mémoires forment le développement de trois Note-

---

(1) *Journ. Math.*, 1916. Je renverrai à ce Mémoire par le chiffre I.

(2) Je rappelle seulement que je désigne par $\mathfrak{C}$ un champ galoisien d'ordre $\pi = p^k$, (p premier), par $\mathfrak{C}' = \mathfrak{C}(\nu)$ le champ d'ordre π^2 défini par l'adjonction de la racine ν d'une équation quadratique irréductible dans $\mathfrak{C}$, par ζ et ζ' des éléments primitifs de $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$, par N un non carré quelconque de $\mathfrak{C}$, par $a = (a_{ij})$ une matrice invertible d'ordre n de $\mathfrak{C}$ ou $\mathfrak{C}'$ qui sera assimilée à la forme $\sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j$ ($i, j = 1, \ldots, n$), par φ la matrice d'ordre π conjuguée de φ relativement à $\mathfrak{C}$, ν, $\nu^\pi = \nu$, par $[\varphi]$ la similitude de multiplicateur φ, et que je pose $I = [\zeta]$, $I = [\zeta]$, $J = [\zeta^{\pi-1}]$, $d = [\zeta^{\pi-1}]$, $D = [d]$ et désigne par J^π le diviseur de J formé de ses substitutions de déterminant 1.

présentées à l'Académie des Sciences en 1913 et 1915 [1]. J'expose ici les résultats indiqués dans les deux dernières. Il s'agit de l'étude des constituants transitifs des groupes hermitiens, gauches et quadratiques dans un champ galoisien quelconque et des groupes des formes bilinéaires symétriques dans un champ galoisien d'ordre 2^k. On déduit de là les équations de ces divers groupes.

En cherchant à représenter transitivement quelques-uns des groupes considérés ici, M. Dickson a précisément obtenu des groupes semblables à leurs constituants transitifs [2].

I. — Groupe hermitien.

1. Soit λ un élément de $\mathfrak{S}$. Désignons par e_λ l'équation $a = \Sigma a_{ik} x_i \dot{x}_k = \lambda$, si $\bar{a} = \dot{a}$, ou l'équation $a = \omega\lambda$, $\omega = \upsilon - \dot{\upsilon}$, si $\bar{a} = -\dot{a}$, et posons $x_i = x_{i0} + \upsilon x_{i1}$, x_{i0} et x_{i1} étant réels. L'ensemble des points de coordonnées x_i^0, x_{i1} qui vérifient e_λ forme une quadrique de $\mathfrak{S}$. Mais il sera plus simple de considérer cette quadrique comme formée des points $(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \ldots x_n$. Désignons cette quadrique par $q_{\lambda na} = q_{\lambda a} = q_\lambda$, *en convenant que le point* $0 \ldots 0$ *sera exclu de* q_0, et soit $s_{\lambda n} = s_\lambda$ le nombre des points de q_λ.

Si $n = 1$, $s_0 = 0$, $s_\lambda = \pi + 1$ ($\lambda \neq 0$), et A, qui conserve chaque q_λ, a $\pi - 1$ systèmes d'intransitivité de degré $\pi + 1$. Alors A est un $g_{\pi+1}^{\pi-1}$ cyclique semi régulier, et $A^2 = 1$.

Soit $n > 1$. Chaque s_λ étant > 0, A a au moins π systèmes d'intransitivité. On peut évidemment, lorsqu'il ne s'agit que des degrés des systèmes d'intransitivité, faire abstraction de la forme choisie pour a. Soit $a = h$ (I, 2). A transforme le point $10 \ldots 0$ de q_0 en un point quelconque de q_0 (I, 4), *d'où le système d'intransitivité* q_0 *de degré* $s_0 = [\pi^n - (\pi - 1)^n][\pi^{n-1} - (\pi - 1)^{n-1}]$ (I, **2**, **4**). Soit $a = \varepsilon$ (I, **2**). A transforme le point $\iota'' 0 \ldots 0$ en tous les points $(\alpha_{11}\iota'', \alpha_{21}\iota'', \ldots)$, le point $\alpha_{11}\alpha_{21} \ldots$ parcourant $\varepsilon = 1$, c'est-à-dire en

[1] *Comptes rendus*, t. **157**, 1er septembre 1913, p. 430; t. **161**, 8 novembre 1915, p. 553; t. **161**, 29 novembre 1915, p. 670.

[2] *M. A.*, t. 65; *A. J.*, t. 23.

tous les points de $q_\lambda = \nu$, *d'où les* $\pi - 1$ *systèmes d'intransitivité* q_λ $(\lambda \neq 0)$ *de degré* $s_{1n} = \pi^{2n-1}$ [illegible] π^{n-1} (I, **2**).

Ainsi pour $\pi = n = 2$, A est un g^{3} ayant deux systèmes d'intransitivité des degrés $s_{02} = 3.3$ et $s_{13} = 3.2$. On a ici, en écrivant $a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m, n, o, p$ au lieu de $01, 0\nu, 0\dot{\nu}, 10, 11, 1\nu, 1\dot{\nu}, \nu 0, \nu 1, \nu\nu, \nu\dot{\nu}, \dot{\nu}0, \dot{\nu}1, \dot{\nu}\nu, \dot{\nu}\dot{\nu}$ respectivement ($\nu^2 = \nu + 1$),

$$m_{1\nu} = |\nu x_1, \nu y_1| = abc.dhm.ekp.fln.gio,$$
$$\tau_1 = ad.bh.cm.e.k.p.fi.gn.lo, \qquad u_{11} = ae.bk.cp.dh.m.fo.gi.ln,$$
$$\tau_1 u_{11} = ade.bhk.cmp.fnl.gio;$$

q_0 est formé des points $a, b, c, d, e, h, k, m, p$, et q_1, des points f, g, i, l, n, o.

A(3, 2) est un $g^{3.21}_{3.216}$ ayant deux systèmes des degrés $s_{02} = 3.6$ et $s_{12} = 3.12$ (*cf.* I, **14**). A(4, 2) est un $g^{3.80}_{3.25920}$ ayant deux systèmes des degrés $s_{02} = 3.45$ et $s_{12} = 3.40$. A(3, 3) est un $g^{[illegible]}$ ayant un système de degré $s_{03} = 8.28$ et deux de degré $s_{13} = 4.63$.

Soit $A^{(\lambda)}(n, \pi)$ le constituant de A de champ q_λ. J déplaçant tous les symboles, chaque $A^{(\lambda)}$ admet, comme système d'imprimitivité, les systèmes d'intransitivité (de degré $\pi + 1$) de J dans q_λ.

La similitude $[\iota']$ permute circulairement les $\pi - 1$ q_λ où $\lambda \neq 0$ et fixe q_0. Donc : 1° *les* $A^{(\lambda)}$ *où* $\lambda \neq 0$ *sont semblables*; 2° $A^{(\lambda)}$ *a deux constituants transitifs, l'un* $A'^{(\lambda)}(n, \pi)$ *de degré* $(\pi - 1)s_1$ *ayant pour champ l'ensemble des* q_λ *où* $\lambda \neq 0$, *l'autre* $A'^{(\lambda)}(n, \pi)$ *de champ* q_0. *Pour la même raison que tout à l'heure chacun d'eux est imprimitif.*

Si $n \geqq 3$, A^0 *a les mêmes systèmes d'intransitivité que* A. Soit en effet $a = h$. Comme la substitution $s = m_{2\nu}$ ou $m_{\nu\nu}$ (I, **2**) fixe le point $\xi = (\lambda\nu, 1, 0, \ldots, 0)$ de q_λ, A^0 et $A = \{s\}A^0$ remplacent ξ par les mêmes points de q_λ.

Soit $n = 2$, *et d'abord* $\lambda \neq 0$. A^0 remplace ξ par tous les points $x_1 = \alpha_{11} + \alpha_{11}\lambda\nu$, $y_1 = \beta'_{11} + \beta_{11}\lambda\nu$ pour lesquels $\alpha_{11}\beta'_{11} - \beta_{11}\alpha'_{11} = 0$, $\alpha_{11}, \alpha'_{11}, \beta_{11}, \beta'_{11}$ étant réels (I, **5**). Or *cette condition équivaut à* $x_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1 = \lambda\omega$. Donc A^0 *remplace* ξ *par tous les points de* q_λ $(\lambda \neq 0)$ [1].

[1] D'ailleurs la condition $\alpha_{11}\beta_{11} - \beta_{11}\alpha_{11} = 1$ détermine $\pi(\pi^2 - 1)$ points [illegible] (S., **74**), c'est-à-dire tous les points de q_λ.

Soit $n = 2$ *et* $\lambda = 0$. A^0 substitue à $(\alpha'', 0)$ $(l = 0, \ldots, \pi)$ les $\pi^2 - 1$ points $(\alpha_{ll}\alpha'', \beta_{ll}\alpha'')$ (α_{ll} et β_{ll} parcourant $\mathfrak{S}$ sans s'annuler à la fois) : on obtient ainsi les $(\pi^2 - 1)(\pi + 1) = s_{0,2}$ points de q_0. Donc *les points de* q_0 *se répartissent dans* A^0 *en* $\pi + 1$ *systèmes d'intransitivité donnant lieu à* $\pi + 1$ *constituants transitifs parallèles semblables à* $U(2, \pi)$.

Ainsi, en désignant par $A^{0(\lambda)}(n, \pi)$ le constituant de A^0 dans q_λ, on a vu que $A^{0(0)}(2, 2)$ est fromé de trois g_6^3 parallèles isomorphes à $A^0(2, 2)$ et que $A^{0(1)}(2, 2)$ est un g_6^6 régulier également isomorphe à $A^0(2, 2)$.

$A'^{(\lambda)}$ *et* $A^{(\lambda)}$ *sont respectivement isomorphes à* A' *et à* A. Il suffit de considérer A'. Or supposons que le p. g. c. d. $D'^{(\lambda)}$ de $A'^{(\lambda)}$, A' soit > 1. $D'^{(\lambda)}$ est premier à I' (I' est semi-régulier) et normal dans A'. D'ailleurs le p. g. c. d. $\Delta'^{(\lambda)}$ de $D'^{(\lambda)}$, A est > 1, sans quoi $AD'^{(\lambda)}$ serait produit direct, et $D'^{(\lambda)}$ serait $< I'$ (I, **15**). Donc, en exceptant le cas où $\pi = 2$ avec $n \leqq 3$, $\Delta'^{(\lambda)}$ est $\geqq A^0$, et A_0 fixerait les points de q_μ où $\mu \neq \lambda$, ce qui n'a pas lieu. Si $\pi = 2$ et $n = 3$, Δ' serait $> J^0$ (I, **12**), ce qui est absurde, J^0 étant semi régulier. Pour $\pi = n = 2$, $A' = A$, et l'on a vérifié directement que $A'^{(\lambda)} = A$.

2. Les symboles de $\mathfrak{A}$ sont les $\frac{\pi^{n+1} - 1}{\pi^2 - 1}$ systèmes de $\pi^2 - 1$ points de $\mathfrak{S}'$, autres que $0 \ldots 0$, situés sur chaque droite issue de $0 \ldots 0$. *Donc, en laissant de côté le cas* $n = 1$, $\mathfrak{A}$ *a deux systèmes d'intransitivité, l'un,* q_0 *de degré* $\frac{s_{n,2}}{\pi^2 - 1} = \frac{\pi^{n-1} - 1 - (\pi - 1)}{\pi^2 - 1} = \frac{\pi^{n-1} - 1 - (\pi - 1)^{n-1}}{\pi - 1 - (\pi - 1)^{n-1}}$ *répondant à* $a = 0$. *l'autre,* q_1 *de degré* $\frac{(\pi - 1)s_1}{\pi^2 - 1} = \pi - 1 \frac{\pi^n - 1 - (\pi - 1)}{\pi - 1}$ *répondant à* $a \neq 0$. Je désignerai par $\mathfrak{A}^{(i)}$ le constituant transitif de $\mathfrak{A}$ de champ q_i.

En exceptant le cas où $\pi = n = 2$, $\mathfrak{A}$ *est isomorphe à* $\mathfrak{A}^{(i)}$. Car si le p. g. c. d. $\omega^{(i)}$ de $\mathfrak{A}^{(i)}$, $\mathfrak{A}$ est > 1, le diviseur correspondant D_i de A n'est pas J. D_i est donc $\geqq A^0$, à moins que l'on n'ait $\pi = 2$ avec $n \leqq 3$. Mais si D_i est $\geqq A^0$, A^0, fixant certaines droites issues de l'origine [correspondant aux symboles de $\mathfrak{A}^{(k)}$ $(k \neq i)$], n'a pas les mêmes systèmes d'intransitivité que A. Donc $n = 2$, et $i = 0$. Donc $\mathfrak{A}^{(i)} = \mathfrak{A}$, et $\mathfrak{A}^{(0)}$ est isomorphe à un groupe facteur de $\mathfrak{A}^{(0)}$ qui est d'ordre 1 ou 2. Or cela est impossible, car $\mathfrak{A}^{(0)}$ est transitif

de degré $\pi+1$. Soit donc $\pi=2$ et $n=3$. Le cas de $\mathcal{A}(3, 2)$ déjà étudié (I, **12**) ne fait pas exception. *Mais* $\mathcal{A}^0(2, 2)$ *est* $\mathcal{A}(2, 2)$. Car $\mathcal{H}=\mathcal{H}^0=\mathrm{H}^0$ (ici $\mathrm{J}=\{m_{12}\}$ est premier à H^0) est, en posant $\frac{x_1}{y_1}=z$, le $g_6\{z+1, z^{-1}\}$ où z parcourt $0, 1, \infty, \nu, \nu$ ($\nu^2=\nu+1$) (*cf.* I, 5). Or $z+1=01.\nu\nu$, $z^{-1}=0\infty.\nu\nu$, $\frac{z+1}{z}=01\infty$. Donc $\mathcal{A}^0$ est un g_6 et $\mathcal{A}^1$ un g_2.

3. Soit, pour $a=h$, $\mathrm{X}_0=\mathrm{X}$ le diviseur de A qui fixe $10\ldots0$, et $\mathrm{X}_1^{(\lambda)}=\mathrm{X}^{(\lambda)}$ son constituant de champ q_λ. Les substitutions de X ont, d'après les formules (4), (5), (6) de I, **3** des matrices de la forme

$$\mathrm{M}=\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & \alpha'_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & \alpha'_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \ldots \\ 0 & \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right),$$

où les éléments dont les deux indices sont $\neq 1$ forment une matrice quelconque M_1 du groupe A_1 de $a_1=a=(x_1y_1-y_1x_1)$ [je désignerai par A'_1, A^0_1, $\mathcal{A}^0_1$, A'_1, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}'_1$ les groupes déduits de A_1 comme A', A^0, $\mathcal{A}^0$, A', $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ de A (A_1 ne divise pas A')], et où l'on peut prendre arbitrairement, ou bien les α'_{1j}, β_{1j} où $j\neq 1$ [alors (4), (5), (6) de I, **3** déterminent explicitement par les autres coefficients de α les α_{1j}, α_{1j} où $j\neq 1$ et $\alpha'_{11}=\alpha_{11}$], ou bien les α_{1j}, α'_{1j} où $j\neq 1$ [alors (8), (9), (10) de I, **3** déterminent les α_{1j}, β_{1j} où $j\neq 1$ et $\alpha'_{11}=\alpha_{11}$]. Donc $(\mathrm{X}, \mathrm{A}_1)=\pi^{2n-3}$. *Les matrices du* $g_{\pi^{2n-3}}$ P *déjà considéré* (I, **15**) *sont celles des matrices* M *où* $\mathrm{M}_1=1$. P *est premier à* A_1 *et évidemment permutable à chaque substitution de* A_1, *donc normal dans* $\mathrm{X}=\mathrm{A}_1\mathrm{P}=\mathrm{P}\mathrm{A}_1$, *et* $(\mathrm{X}, 1)=\frac{(\mathrm{A}, 1)}{\mathrm{X}_0}$. *Le diviseur* X' *de* A' *qui fixe* $10\ldots0$ *est évidemment* $(\mathrm{X}, \tau_1^{-1}\gamma\tau_1)$ (γ *étant la même substitution que dans* I, **2**); $\tau_1^{-1}\gamma\tau_1$ *est permutable à* A_1 *et à* P, *et* $(\mathrm{X}', \mathrm{X})=\pi^{n-1}$.

X (ou même P) remplace le point $0y_1 0\ldots0$ ($y_1\neq 0$) de q_1 par les π^{2n-3} points $(\alpha_{11}y_1, y_1, \alpha_{21}y_1, \ldots)$ d'où π^{2n-3} [illegible]

d'intransitivité $q_0^{\nu_1}$ ($y_1 \neq 0$) de X (ou de P) de degré π^{2n-3} [et, dans X', $\pi^2 - 1$ systèmes de degré $\pi^{2n-3}(\pi - 1)$]. On voit directement que toute substitution $\neq 1$ de P déplace tous les symboles de chaque $q_0^{\nu_1}$. L'action de P sur les $q_0^{\nu_1}$ fournit donc une représentation semirégulière de P. D'autre part A_1 fixe les points $0y_1 0 \ldots 0$, et ses constituants dans les champs $q_0^{\nu_1}$ sont évidemment parallèles. Donc les constituants de X dans les champs $q_0^{\nu_1}$ sont aussi parallèles. Si $n \leq 3$, les points des $q_0^{\nu_1}$, joints aux $\pi^2 - 1$ points $x_1 0 \ldots 0$ ($x_1 \neq 0$) fixés par X, épuisent q_0. Si $n > 3$, q_0 contient encore $0010 \ldots 0$ que X remplace par $\alpha_{12} 0 \alpha_{22} \beta_{22} \ldots$, α_{12} pouvant être pris arbitrairement, et le système des α_{i2}, β_{i2}, où $i \neq 1$ pouvant prendre dans A, $s_{0,n-2}$ déterminations (toutes différentes de $0 \ldots 0$); d'où un nouveau système q_0^0 de degré $\pi^2 s_{0,n-2}$ (ce nombre est nul si $n = 3$) qui achève d'épuiser q_0 (P a, dans q_0^0, $s_{0,n-2}$ constituants transitifs de degré π^2). *Donc* $X^{(0)}$ *ne fixe que les* $\pi^2 - 1$ *points* $x_1 0 \ldots 0$ *de* q_0.

Comme $A_1 = A_1^{(0)}$ (**1**), et que chaque substitution de P déplace les points $0y_1 0 \ldots 0$ fixés par $A_1^{(0)}$, l'action de P sur q_0 est première à $A_1^{(0)}$. *Donc* $X^{(0)} = X$.

4. Considérons maintenant $\mathfrak{A}^{(0)}$. Soit $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}$ le diviseur de $\mathfrak{A}$ fixant $10 \ldots 0$, $\mathfrak{X}_0 = \mathfrak{X}'$ son constituant de champ q_0, et Ξ' le groupe déduit de X' en y regardant les variables comme homogènes. I' étant premier à X' (I' est semi-régulier), Ξ' à l'ordre de X' et est évidemment $\subset \mathfrak{X}$. D'ailleurs $\mathfrak{X}^{(0)} = \mathfrak{A}$ (même si $n = \pi = 2$) (**2**). Donc $\mathfrak{X}^{(0)} = \mathfrak{X}$, et $(\mathfrak{X}, 1) = (\mathfrak{X}^{(0)}, 1) = (\mathfrak{A}, 1) : \frac{s_{0,n}}{\pi^2 - 1}$; donc $\mathfrak{X} = \Xi$.

La forme générale des matrices de $\mathfrak{X}$ est

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \ldots \\ 0 & \beta_{11} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \beta_{21} & \alpha_{22} & \alpha'_{22} & \ldots \\ 0 & \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{42} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix},$$

$\mathfrak{M}$ n'étant déterminée qu'à une matrice près de I' comme facteur. Fixons ce facteur de manière que $\mathfrak{M}$ soit dans A. Alors la ma-

trice $\mathfrak{M}_1$ des éléments de $\mathfrak{M}$ dont les deux indices sont $\neq 1$ est la matrice générale de A_1, et $\alpha_{11}\beta_{11} = 1$. En multipliant par une m on peut ramener α_{11} et β_{11} à 1. Les α_{j1}, β_{j1} ou $j \neq 1$ (ou les α_{1i}, α'_{1i} où $i \neq 1$) et la partie réelle de α_{11} (d'après (5) ou (9) de I, 5) sont arbitraires, et les coefficients restants de $\mathfrak{M}$ sont déterminés par le choix de ceux-là et de ceux de $\mathfrak{M}_1$. Mais on devra regarder comme indistinctes les $\mathfrak{M}$ dont les coefficients sont proportionnels. *Donc* $\mathfrak{X} = \{A_1 P, m_{11}\} \{I'\} \{I' = \{A_1 P, m_{11}\}\} J$. De là encore $(\mathfrak{X}, 1) = (\pi - 1)(X, 1)$.

Au lieu des $\pi^2 - 1$ systèmes $q_0^{\nu_1} y_1 \neq 0$ de X, on obtient ici de la même manière dans $\mathfrak{X}$ un seul système, $\mathfrak{q}_0^1$ de degré π^{2n-3}. Au lieu de q_0^0, on obtient ici de même (les $\pi^2 - 1$ points autres que l'origine de chaque génératrice du cône $q_{0,n-2,a_1}$ forment un seul symbole) pour $\mathfrak{X}$ un système $\mathfrak{q}_0^0$ de degré $\frac{\pi^2 s_{0,n-2}}{\pi^2 - 1}$ (qui disparaît si $n = 3$). Au lieu des $\pi^2 - 1$ points autres que $0 \ldots 0$ fixés par $X^{(0)}$, on a ici un seul symbole fixé par $\mathfrak{X}^{(0)}$, et ce symbole, joint à $\mathfrak{q}_0^1$, $\mathfrak{q}_0^0$, forme $\mathfrak{q}_0$.

Si $\mathfrak{A}^{(0)}$ a des systèmes d'imprimitivité de degré δ (≥ 1), $\mathfrak{X}^{(0)}$ fixe celui qui contient $10 \ldots 0$. Il faut donc que n soit ≥ 3, et alors, ou bien $\delta = 1 + \frac{\pi^2 s_{0,n-2}}{\pi^2 - 1}$, ou bien $\delta = 1 + \pi^{2n-3}$. Si $\delta = 1 + \frac{\pi^2 s_{0,n-2}}{\pi^2 - 1}$, δ, divise le degré π^{2n-3} de l'autre système d'intransitivité de $\mathfrak{X}^{(0)}$, ce qui est absurde. Si $\delta = 1 + \pi^{2n-3}$, δ divise $\frac{s_{0,n-2}}{\pi^2 - 1}$. Donc $(\pi^2 - 1)\delta$ est $s_{0,n-2}$, et *a fortiori*

$$\pi^{2n-1} - \pi^{2n-3} = \pi^{2n-3} + \pi^{n-2},$$

d'où, en divisant par π^{n-2} (n est ≥ 3), et en remplaçant 1 par $\pi^{n-1} - \pi^{n-3}$, $\pi^{n+1} < 2\pi^{n-1}$ ou $\pi^2 < 2$, ce qui ne se peut. *Donc* $\mathfrak{A}^{(0)}$ *est primitif pour* $n = 2$.

Pour $n = 2$, en posant $\frac{x_1}{y_1} = z$ et en changeant la notation, $\mathfrak{X} = \Sigma(z, \mu z + \mu')$ (μ et μ' réels, et $\mu \neq 0$, d'ailleurs quelconques) est d'ordre $\pi(\pi - 1)$, et le champ du $g^{\pi}_{\pi-1}$ transitif $\mathfrak{X}^{(0)}$ est formé des points substitués à $z = 0$. *Donc* $\mathfrak{A}^{(0)}(2, \pi)$ *est semblable à* $\mathfrak{L}(2, \pi)$ (S., 73, 85) *qui est trois fois transitif* (S., 78).

5. Prenons maintenant a sous la forme ζ, et soit X_1 le diviseur de A qui fixe $10 \ldots 0$ (d'après les systèmes d'intransitivité de A'), X_1 est aussi le diviseur de A' qui fixe $10 \ldots 0$. La forme générale

des matrices de X_1 est

$$\left\{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \dots \\ \hline 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right\}$$

où les éléments dont les deux indices sont > 1 forment une matrice du groupe A_1 de $a_1 = a - z_1 \dot{z}$ (je désignerai par A_1^0, $\mathcal{A}_1^0$, $A_1^{(\lambda)}$, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_1^{(\lambda)}$ les groupes déduits de A_1 comme A^0, $\mathcal{A}^0$, $A^{(\lambda)}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^{(\lambda)}$ de A). *Donc* X_1 *est formé de* π^2 *constituants parallèles semblables à* A_1, et $(X_1, 1) = \frac{(A, 1)}{s_{11}}$. Donc X_1 a π^2 constituants transitifs de degré $s_{0,n-1}$ semblables à A_1^0 et $\pi^2(\pi - 1)$ de degré $s_{1,n-1}$ semblables à $A_1^{(1)}$. Les π^2 points restants sont les points $z_1 0 \dots 0$ fixés par X_1, *dont les* $\pi + 1$ *pour lesquels* $z_1^{\pi+1} = 1$ *font partie de* q_1.

Cherchons les systèmes d'intransitivité du constituant $X_1^{(1)}$ de X_1 dont le champ est q_1, c'est-à-dire ceux des systèmes de X_1 pour lesquels $a = 1$. Pour ceux de degré $s_{0,n-1}$, $a = 0$; si donc $a = 1$, on a $z_1^{\pi+1} = 1$, *d'où* $\pi + 1$ *systèmes d'intransitivité de degré* $s_{0,n-1}$ *de* $X_1^{(1)}$. Pour ceux de degré $s_{1,n-1}$, on a $a_1 \neq 0$. Si donc $a = 1$, on a $a_1 = 1 - z_1^{\pi+1}$, z_1 n'étant pas racine de $z_1^{\pi+1} = 1$. D'ailleurs $1 - z_1^{\pi+1}$ est réel, et, pour chacune de ses $\pi + 1$ valeurs autres que 0 et 1, z_1 prend $\pi + 1$ valeurs, tandis que, pour la valeur 1, $z_1 = 0$. *D'où* $(\pi + 1)(\pi + 1) + 1 = \pi^2 + \pi + 1$ *systèmes d'intransitivité de degré* $s_{1,n-1}$ *de* $X_1^{(1)}$. Les systèmes obtenus pour $X_1^{(1)}$ contenant $s_{1,n-1}$ $\pi + 1$ points, on retrouve que $X_1^{(1)}$ fixe $\pi + 1$ points de q_1.

6. Considérons maintenant $\mathcal{A}^{(1)}$. Soit $\mathcal{X}_1$ le diviseur de $\mathcal{A}$ qui fixe $10 \dots 0$, $\mathcal{X}_1^{(1)}$ son constituant dans q_1, et Ξ_1 le groupe déduit de X_1 en y supposant les variables homogènes. Comme au n° **4**, Ξ_1 a l'ordre de X_1 et est $\mathcal{X}_1$, et $(\mathcal{X}_1, 1) = (\mathcal{X}_1, 1)^{(1)} = (1, 1) : \frac{\mathcal{X}_1}{\pi + 1}$; donc $\mathcal{X}_1 = \Xi_1$.

D'ailleurs la matrice générale de $\mathcal{X}_1$ est

$$\mathcal{M} = \left\{\begin{array}{cccc} \alpha_{11} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right\} \quad (\alpha_{11} = 0).$$

$\mathfrak{M}$ n'étant déterminée qu'à une matrice près de Γ comme facteur. Fixons ce facteur de manière que $\alpha_{11} = 1$. Alors la matrice $\mathfrak{M}_1$ déduite de $\mathfrak{M}$ en supprimant la première ligne et la première colonne est la matrice générale de A_1. Mais on devra regarder comme indistinctes les $\mathfrak{M}$ dont les coefficients sont proportionnels. Donc $\mathfrak{X}_1 \equiv A_1$, et de nouveau $\mathfrak{X}_1 = \Xi_1$.

Au lieu des $\pi^2 - 1$ constituants de X_1 semblables à $A_1^{(1)}$ où $z_1 \neq 0$, on obtient ici de même un seul constituant semblable à $A_1^{(1)}$, dont le champ est dans $\mathfrak{q}_1$. Au lieu de celui où $z_1 = 0$, on obtient pour $\mathfrak{X}_1$ un constituant semblable à $\mathfrak{A}_1^{(0)}$, dont le champ est dans $\mathfrak{q}_0$ (ce constituant disparaît si $n = 2$). Au lieu des $(\pi^2 - 1)(\pi - 1)$ constituants de X_1 semblables à A_1^1 où $z_1 \neq 0$, on a pour $\mathfrak{X}_1$ $\pi - 1$ constituants parallèles semblables à A_1^1, dont $\pi - 2$ ont leur champ dans $\mathfrak{q}_1$ et un dans $\mathfrak{q}_0$. Au lieu des $\pi - 1$ constituants de X_1 semblables à $A_1^{(1)}$ où $z_1 = 0$, on a ici pour $\mathfrak{X}_1$ un constituant semblable à $\mathfrak{A}_1^{(1)}$, dont le champ est dans $\mathfrak{q}_1$ *et se réduit à un point si* $n = 2$. Donc, pour $n = 2$, $\mathfrak{X}_1^1$ fixe deux points, et $\mathfrak{A}^{(1)}(2, \pi)$ *est imprimitif* : son imprimitivité sera précisée tout à l'heure. Les systèmes d'intransitivité obtenus, joints au point $10\ldots0$ fixé par $\mathfrak{A}_1$, épuisent $\mathfrak{q}_0$ et $\mathfrak{q}_1$.

Si $\mathfrak{A}^{(1)}$ a des systèmes d'imprimitivité de degré $\delta (> 1)$, $\mathfrak{X}_1^1$ fixe celui qui contient $z_1 0\ldots0$ $(z_1 \neq 0)$. Donc δ a la forme

$$\delta = 1 + \rho s_{0,n-1} + \sigma s_{1,n-1} + \tau \frac{s_{1,n-1}}{\pi + 1}$$

$$(\rho, \tau = 0 \text{ ou } 1, \quad \sigma \text{ entier} \geq 0 \text{ et } \pi - \sigma \geq 0),$$

et δ divise le degré $\frac{s_{1n}}{\pi + 1} = \pi^{n-1} \frac{\pi^n - (-1)^n}{\pi + 1}$ de $\mathfrak{A}^1$.

Soit d'abord $\rho = 1$. Alors δ a le facteur π^{n-2}, et $\frac{(\pi + 1)\delta}{\pi^{n-2}}$ divise $\pi^n - (-1)^n$. Or on a

$$\frac{(\pi + 1)\delta}{\pi^{n-2}} = \pi^n + \pi^{n-1} + (-1)^{n-1}(\pi + 1) + \sigma(\pi + 1)[\pi^{n-1} + (-1)^{n-1}]$$
$$+ \tau[\pi^{n-1} + (-1)^{n-1}] = \pi^n + \pi^{n-1} - \pi + (-1)^n + \sigma\pi + \sigma\pi^{n-1} + \sigma\pi^{n-2}$$

Donc cette dernière quantité doit être $\pm(\pi^n - (-1)^n)$, $\pi^n \pm 1$. On doit donc avoir

$$\sigma\pi^n + \sigma\pi^{n-1} = \pi^n + \sigma\pi,$$

d'où, en remplaçant σ par 0 au premier membre, par $\pi - 2$ au second,

$$\pi^{n-1} - 2\pi^2 - 2\pi < 2\pi^2 \quad \text{ou} \quad \pi^{n-1} < 1, \quad \text{d'où} \quad n = 3,$$

et l'inégalité précédente devient $\sigma\pi^3 < \sigma\pi$. Donc $\sigma = 0$, et $\frac{(\pi+1)\delta}{\pi^{n-2}} = \pi^3 + \pi^2(\tau + 2) - \tau - 1$. Or on voit de suite que cette quantité ne peut être $\leq \pi^n - (-1)^n = \pi^3 + 1$.

Soit donc $\rho = 0$, *et d'abord* $\sigma > 0$. *Si* $n \geq 3$, δ est $-1 \bmod \pi$ et divise $\frac{\pi^n - (-1)^n}{\pi + 1}$. Donc $(\pi + 1)\delta$ est $\pi^n + 1$, et l'on a *a fortiori*, en remplaçant $(\pi + 1)\delta$ par $\pi s_{1,n-1}$,

$$\pi^{2n-2} < \pi^n - (-1)^n \pi^{n-1} + 1$$

d'où, en remplaçant le second membre par $2\pi^n$, l'impossibilité $\pi^{n-2} < 2$.

Si $n = 2$, en omettant le cas déjà traité (**2**) où $n = \pi = 2$, on a $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}$. Donc toute division en systèmes d'imprimitivité correspond à un $g_{\delta\pi+1}\mathcal{S} > \mathcal{X}_1$ (*S.*, 60). Or ici $s_{1,n+1} = \pi + 1$, et δ est $> \pi + 1$. Donc $(\mathcal{S}, 1)$ est $> (\pi + 1)^2 > \pi(\pi + 1)$. Or $\mathcal{A} \equiv \mathcal{G}(2, \pi)$ (**I, 5**). Donc $(\mathcal{A}, \mathcal{S})$ serait $< \pi - 1$, et $\mathcal{G}(2, \pi)$ serait représentable en moins de π symboles, ce qui est impossible (*S.*, **86**).

Soit $\sigma = 0$. Alors $\tau = 1$, et l'inégalité $(\pi + 1)\delta < \pi^n + 1$ devient, en remplaçant, dans δ, $s_{1,n+1}$ par $\pi^{2n-1} - \pi^{n-2}$,

$$\pi^{2n-3} - \pi^{n-2} - \pi^n - \pi < \pi^n, \quad \text{ou} \quad \pi^{n-1} < \pi^2 + 1, \quad \text{ou} \quad \pi^{n-1} < \pi^2.$$

Donc n *est* ≤ 3. *Soit d'abord* $n = 2$, donc $s_{1,n+1} = \pi + 1$, $\delta = 2$. En omettant le cas déjà traité (**2**) où $n = \pi = 2$, on a $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}$. Donc toute division en systèmes d'imprimitivité correspond à un $g_{2\pi+1}\mathcal{S} > \mathcal{X}_1$ (*S.*, 60). Or, en posant $\frac{z_1}{z_2} = z$, toute substitution de $\mathcal{A}$ a la forme $\alpha = \left(\frac{\alpha_{11} z + \alpha_{12}}{\alpha_{21} z + \alpha_{22}}\right)$ (avec les conditions indiquées dans **I, 5**). Pour que α soit permutable à $\mathcal{X}_1 = (\mu z)$ (μ étant d'ordre $\pi + 1$), il faut et suffit que $\alpha(\mu z)$ puisse se mettre sous la forme $(\mu z)^\lambda \alpha$, d'où

$$z^2 \alpha_{11}\alpha_{21}\mu(1 - \mu^2) + z(\alpha_{11}\alpha_{22}(\mu - \mu^2) + \alpha_{12}\alpha_{21}(1 - \mu^2)^2) + \alpha_{12}\alpha_{22}(1 - \mu^2) = 0.$$

Donc $\alpha_{11}\alpha_{21} = \alpha_{12}\alpha_{22} = 0$. Si $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$, α est dans $\mathfrak{A}_1$. Si $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0$, α a la forme $j\varepsilon^{-1}$ (j quelconque dans $\mathfrak{S}'$). Donc $\mathfrak{N}$ est le $g_{2\pi+1}^{\pi^2+1}$ diédral $\{\mathfrak{A}_1, \varepsilon^{-1}\}$ où $\mathfrak{A}_1$ est un $g_{\pi+1}^{\pi}$ cyclique semi régulier fixant les symboles $0, \infty$ échangés par ε^{-1} (les $\pi+1$ points de $\mathfrak{q}_0$ permutés entre eux par $\mathfrak{A}_1$ sont les racines de $\varepsilon^{\pi+1} = -1$). On voit que $\mathfrak{A}^{(1)}(2, \pi)$ *n'admet qu'une division en systèmes d'imprimitivité.*

Soit $n = 3$, et désignons par r un système d'imprimitivité de degré $\delta = \pi^2 - \pi + 1$, correspondant à $\rho = \sigma = 0$, $\tau = 1$. Prenons a sous la forme h, et écrivons les variables dans l'ordre z, x, y. On peut supposer que le point fixé par $\mathfrak{A}_1$ est $x00$. Pour les autres points de r, on a $x = 0$ et $x_1 y_1 - y_1 x_1 \neq 0$ (puisque $\rho = \sigma = 0$) ce sont donc les $\pi(\pi - 1)$ points $(0, x_1, \theta x_1)$, $(x_1 \neq 0)$, θ parcourant les éléments de $\mathfrak{S}'$ qui sont hors de $\mathfrak{S}$. Pour qu'une substitution α de $\mathfrak{A}$ change $x00$ en $(0, x_1, \theta x_1)$, il faut que l'on ait $\alpha_{00} = 0$, $\alpha_{10} = x_1$, $\beta_{10} = \theta x_1$. Supposons $\pi > 2$. Alors r contient au moins 6 points autres que $x00$. Si α est dans le diviseur fixant r, elle doit remplacer 5 quelconques de ces points par 5 d'entre eux. Or α remplace le point $(0, x_1, \theta' x_1)$ (θ' étant dans $\mathfrak{S}'$ hors de $\mathfrak{S}$ et $x_1 \neq 0$) par un point dont la coordonnée x est $x_1(\alpha_{01} + \theta'\alpha_{01})$, α_{01} et α_{01} n'étant pas tous deux nuls ($\alpha_{00} = 0$). Cette quantité ne peut évidemment pas s'annuler pour 5 valeurs de θ'. Donc $\pi = 2$. $\mathfrak{A}(3, 2)$ a d'ailleurs été déjà étudié (I, **14**).

7. Considérons maintenant le constituant $\mathfrak{A}^{(0)}(n, \pi) = \mathfrak{A}^{(0)}$ de $\mathfrak{A}^0$ dans $\mathfrak{q}_0$. Tout d'abord $\mathfrak{A}^{(0)}$ *est transitif*. Cela est clair si $\mathfrak{A}^0$ est primitif, et on l'a vérifié pour $\mathfrak{A}^{(1)}(3, 2)$ (I, **14**). La question ne se pose donc plus que pour $\mathfrak{A}^{(1)}(2, \pi)$, et l'on peut supposer $p > 2$, sans quoi $\mathfrak{A}^0 = \mathfrak{A}$. Alors $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^0) = 2$, et $\mathfrak{A}^{(0)} = \mathfrak{A}^0(2)$. Si donc $\mathfrak{A}^{(0)}$ est intransitif, ses systèmes d'intransitivité, qui sont des systèmes d'imprimitivité de $\mathfrak{A}^0$, sont de degré 2. Donc $(\mathfrak{A}^0, 1)$ sera une puissance de 2, ce qui est absurde puisque $\mathfrak{A}^0 = \mathfrak{V}(2, \pi)$.

Je dis que, *si* $\mathfrak{A}^{(0)}$ *est primitif*, $\mathfrak{A}^{0(0)}$ *est primitif*. On peut omettre le cas déjà traité (I, **14**) où $\pi = 2$ avec $n = 3$ et le cas $n = 1$ où $\mathfrak{A}^0 = \mathfrak{A} = 1$. Le diviseur de $\mathfrak{A}^0$ qui fixe le même symbole que $\mathfrak{A}$ est le p. g. c. d. $\mathfrak{A}_1^0$ de $\mathfrak{A}$, avec $\mathfrak{A}^0$, normal dans $\mathfrak{A}$, et $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_1^0 = (\mathfrak{A}/\mathfrak{A}^0)$

a pour ordre le p. g. c. d. π_1 de n et de $\pi+1$ (I, **2**; *cf. S.*, **55**). Je désignerai par $\mathfrak{X}_i^{0(i)}$ le constituant de $\mathfrak{X}_i^0$ dont le champ est $\mathfrak{q}_i$.

Le diviseur $\mathfrak{T} = A_1 P I' \mid I'$ de $\mathfrak{X}$ a, d'après les n^{os} **3** et **4**, les mêmes systèmes d'intransitivité que $\mathfrak{X}$, et le diviseur $\mathfrak{T}^0 = A_1^0 P I' \mid I'$ de $\mathfrak{T}$ a, pour $n \geqq 4$, les mêmes systèmes d'intransitivité que $\mathfrak{T}$. Cela est clair pour le système $\mathfrak{q}_0^1$, et, si $n > 4$, pour le système $\mathfrak{q}_0^0$, car alors A_1^0 a les mêmes systèmes d'intransitivité que A_1 : si $n = 4$, $A^0 I' \mid I'$ a les mêmes systèmes d'intransitivité que $A_1 I' \mid I'$, et, si $n = 3$, $\mathfrak{q}_0^0$ disparaît.

Le groupe $\mathfrak{X}_1 \equiv A_1$ a un diviseur correspondant au diviseur A_1^0 de A_1, et ce diviseur est contenu dans $\mathfrak{X}_1^0$. Donc $\mathfrak{X}_1^0$ a, pour $n > 3$ (a a ici la forme ε), les mêmes systèmes d'intransitivité que $\mathfrak{X}_1$.

Soit $n = 3$. Alors $\pi_1 = 1$ ou 3. Si $\pi_1 = 1$, $A^0 = A$. Soit donc $\pi_1 = 3$ et $\pi + 1 = 3\mu$. Considérons une substitution ξ de $\mathfrak{X}_1$ ramenée à la forme où $\alpha_{11} = 1$ (avec les notations du n^o **6**). Pour que ξ, qui est alors dans A, soit dans $\mathfrak{X}_1^0$, il faut et suffit qu'il y ait dans ξ J une substitution de déterminant 1. Or $|\xi|$ a la forme j^k, en posant $\iota^{\pi-1} = j$ (I, **2**). Il faut donc et suffit qu'on puisse trouver un entier l tel que $j^{k+3l} = 1$, c'est-à-dire que k soit multiple de 3. Or soit ξ_1 la sous-matrice de ξ contenue dans A_1. Écrivons x au lieu de z_1, et faisons le changement de variables qui ramène $z_2 z_2 + z_3 z_3$ à la forme $\omega(x_1 y_1 - y_1 x_1)$ (I, **2**). On aura $A_1 = \Sigma_1^{\pi-1} A_1^0 m_{1i}^0$. Il faut et suffit que ξ_1 soit dans le diviseur $\Delta = \Sigma_1^{\pi} A_1^0 m_{1i}^0$ de A_1. Or le constituant $A_1^{0(0)}$ de A_1^0 dans le champ des solutions (autres que 00) de $x_1 y_1 - y_1 x_1 = 0$ a $\pi + 1$ systèmes d'intransitivité répondant aux éléments $\iota^0, \iota', \ldots, \iota^\pi$ de $\mathfrak{c}$: celui de ces systèmes qui répond à ι' est formé des $\pi^2 - 1$ points $(\alpha_{11}\iota', \beta_{11}\iota')$, α_{11} et β_{11} parcourant $\mathfrak{c}$ sans s'annuler à la fois (I). Mais m_{1i}^0 remplace le point $(\alpha_{11}\iota', \beta_{11}\iota')$ par $(\alpha_{11}\iota^{l+3l}, \beta_{11}\iota^{3l}\iota^{l+3l})$. Donc, dans Δ, les systèmes d'intransitivité de A_1^0 qui répondent à ι'' et à ι''^{+3l} se réunissent en un. Donc Δ n'a que trois systèmes d'intransitivité. Donc, dans $\mathfrak{X}_1^0$, le système de degré $s_{02} = (\pi^2 - 1)(\pi + 1)$ est remplacé par 3 systèmes de degré $\frac{1}{3} s_{02} = (\pi^2 - 1)\mu$, les $\pi - 2$ systèmes de degré $s_{12} = \pi(\pi^2 - 1)$ et celui de degré $\frac{s_{12}}{\pi + 1} = \pi(\pi - 1)$ étant conservés.

Si donc $A^{0(1)}$ a un système d'imprimitivité de degré $\delta > 1$, $\mathfrak{X}_1^{0(1)}$ fixe celui qui contient 100. Donc δ a la forme $1 + \rho'\mu(\pi^2 - 1) +$

$\sigma\pi(\pi^2-1)+\tau\pi(\pi-1)$, ρ' étant l'un des nombres 0, 1, 2, 3, σ l'un des nombres 0, ..., $\pi-2$, τ l'un des nombres 0, 1, et δ divise le degré $\pi^2(\pi^2-\pi+1)$ de $\mathcal{A}^{0(i)}$.

Si $\rho'=3$, comme $3\mu=\pi+1$, la discussion est la même que pour $\mathcal{A}^{(i)}$ dans le cas où $\rho=1$. *De même si* $\rho'=0$. Il reste seulement à considérer les cas $\rho'=1, 2$.

Soit $\rho'=1$. Supposons d'abord δ divisible par p. Alors p divise $1-\mu$.

Si $\mu=1$, on a $\pi=2$, et l'on rentre dans le cas déjà traité de $\mathcal{A}^0(3,2)$ (I, **14**).

Soit donc $\mu=1+kp^\beta$, *k et β étant* ≥ 1, *et k premier à p*. Comme $\pi+1=3\mu$, on a $\pi-3kp^\beta=2$, d'où $p=2$, $\pi>2$, et $\beta=1$. Alors

$$\frac{\delta}{p}=-k+\frac{\pi^2}{p}(1+kp)+\sigma\frac{\pi}{p}(\pi^2-1)+\tau\frac{\pi}{p}(\pi-1)$$

est premier à p et doit diviser $\pi^2-\pi+1$. Mais cela est impossible, $-k+\frac{\pi^2}{p}(1+kp)$ étant $>\pi^2>\pi^2-\pi+1$. Donc δ est premier à p et doit diviser $\pi^2-\pi+1$. Cela est encore impossible, $\rho'\mu(\pi^2-1)$ étant $>\pi^2-\pi+1$.

Soit $\rho'=2$. Supposons δ divisible par p. Alors p divise $1-2\mu$ qui est $\neq 0$. Soit $2\mu=1+kp^\beta$, k et β étant ≥ 1, et k premier à p. Comme $3\mu=\pi+1$, on a $2\pi-3kp^\beta=1$, ce qui est absurde. Donc δ est premier à p et doit diviser $\pi^2-\pi+1$. Or on voit comme dans le cas précédent que cela est impossible.

Il résulte de ce qui précède, en négligeant $\mathcal{A}^0(3,2)$ étudié séparément (I, **14**), que l'on peut raisonner sur $\mathcal{A}^0$ comme sur $\mathcal{A}$, et que $\mathcal{A}^{0(i)}$ est bien primitif en même temps que $\mathcal{A}^{(i)}$.

La question se pose maintenant de savoir si $\mathcal{A}^{0(i)}(2,\pi)$ *et* $\mathcal{A}^{0(i)}(3,2)$ *n'ont pas d'autres systèmes d'imprimitivité que* $\mathcal{A}^{(i)}(2,\pi)$ *et* $\mathcal{A}^{(i)}(3,2)$.

Considérons d'abord $\mathcal{A}^{(i)}(3,2)$. Avec les notations déjà employées (I, **14**), $\mathfrak{X}_1$ est ici le $g_6\{\beta,\zeta\}$ qui a les systèmes d'intransitivité *bcfgkqrst*, *del*, *hmp*, *ino*, *au*. $\mathfrak{X}_1$ est le g_9, $\{\mathfrak{X}_1^0, s_\zeta\}$ qui a les systèmes d'intransitivité *bcfgkqrst*, *dehilmnop*, *au*. Soit s un système d'imprimitivité de $\mathcal{A}^{0(i)}$ de degré δ contenant v. $\mathfrak{X}_1$ fixe s, et, $\mathcal{A}^{0(i)}$ étant de degré 12, $\delta=2, 3, 4$ ou 6. Si $\delta=2$, β montre que s contient a ou u, ce que contredit la forme de ζ. Si $\delta=3$, β montre que

s contient a et u, et V_1 et V_2 montrent que les autres systèmes de la division correspondante sont nécessairement *del*, *hmp*, *ino*; $\mathfrak{A}^{0(1)}$ admet d'ailleurs ces systèmes d'imprimitivité. Si $\delta = 4$, ζ montre que s contient l, o et p, ce que contredit la forme de β. Si $\delta = 6$, β montre que s contient a et u, puis V_1 que s contient d, e et l, puis V_2 que s contient h, m et p, ce qui ne se peut. *Ainsi* $\mathfrak{A}^{0(1)}$ *a une seule division en systèmes d'imprimitivité qui sont auv, del, hmp, ino, et* $\mathfrak{A}^{0(1)}$ *l'admet aussi.*

Considérons maintenant $\mathfrak{A}^{0(2)}$, π. Si $p = 2$, π_1 se réduit à 1, et $A^0 = A$. *Soit donc* $p > 2$, d'où $\pi_1 = 2$. Ici $\mathfrak{X}_1^1$ fixe les deux points 10 et 01 et a $\pi - 2$ constituants parallèles, semblables au $g^{\pi+1}A_1^1$, pour lesquels on a $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$, $a \neq 0$ (**6**). Déterminons les $\pi - 2$ champs de ces constituants. D'après leur définition on a, en posant $\frac{z_1}{z_2} = z$, pour chaque point z de ces $\pi - 2$ champs, $z \neq 0$, ∞ et $z^{\pi+1} \neq 1$. Donc $z^{\pi+1}$, qui est réel, prend $\pi - 2$ valeurs (autres que $0, \infty, -1$) qu'on peut représenter par $\zeta^{\pi+1}$ (ζ est déterminé à un facteur près de la forme j^k, en posant $z^{\pi+1} = j$), et, pour chacune d'elles, z prend les $\pi + 1$ valeurs ζj^k ($k = 0, \ldots, \pi$). Ce sont précisément ces $\pi + 1$ valeurs qui forment le système d'intransitivité contenant ζ.

Soit maintenant ξ une substitution de $\mathfrak{X}_1$, ramenée à la forme où $\sigma_{11} = 1$ (avec les notations du n° **6**). Pour que ξ, qui est alors dans A, soit dans A^0, il faut et suffit qu'il y ait dans ξJ une substitution de déterminant 1. Or ξ a la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & j^t \end{pmatrix}$. Il faut donc et suffit qu'on puisse trouver un entier t' tel que $j^{t+2t'} = 1$, c'est-à-dire que t soit pair. Donc le $g_{\frac{\pi+1}{2}}\mathfrak{X}_1^0$ peut être considéré comme formé des substitutions $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & j^{2t'} \end{pmatrix}$ qui transforment ζ en les $\frac{1}{2}(\pi + 1)$ points $j^{-2t'}\zeta$. *Donc* $\mathfrak{X}_1^{0(1)}$ *a* $2\pi - 4$ *systèmes d'intransitivité de degré* $\frac{1}{2}(\pi + 1)$.

Si $\mathfrak{A}^{0(1)}$ a des systèmes d'imprimitivité de degré δ (> 1), $\mathfrak{X}_1^{0(1)}$ fixe celui qui contient 10. Donc δ a la forme $1 + \sigma' \frac{\pi - 1}{2} + \tau$ [$0 \leq \sigma' \leq 2(\pi - 2)$, $\tau = 0$ ou 1].

Si $\sigma' = 0$, la discussion est la même que pour $\mathfrak{A}^{(1)}$ et conduit aux mêmes systèmes d'imprimitivité.

Soit $\sigma' > 0$. En omettant le cas déjà traité où $\tau = n = 2$ (**2**), on a $\mathcal{A}^{0(1)} \equiv \mathcal{A}^0$. Donc toute division en systèmes d'imprimitivité de $\mathcal{A}^{0(1)}$ correspond à un $g_{\delta\frac{\pi+1}{2}}$ $\mathcal{N} > \mathcal{A}^0_1$ contenu dans $\mathcal{A}^0$ (*S.*, 60).

Or δ est ici $> \sigma'\frac{\pi+1}{2}$. Donc $(\mathcal{N}, 1)$ est $> \sigma'\left(\frac{\pi+1}{2}\right)^2 > \sigma'\frac{\pi(\pi-1)}{4}$.

Mais $\mathcal{A}^0 = \mathfrak{V}(2, \pi)$ (I, **5**) est d'ordre $\frac{\pi(\pi-1)}{2}$. Donc $(\mathcal{A}^0, \mathcal{N})$ est $< \frac{2(\pi-1)}{\sigma'}$. Si donc σ' était ≥ 3, $\mathfrak{V}(2, \pi)$ serait représentable en moins de $\frac{2}{3}\pi$ symboles, ce qui ne se peut (*S.*, 90). *Donc* σ' *est* ≤ 2. D'ailleurs δ doit diviser le degré $\pi(\pi-1)$ de $\mathcal{A}^{0(1)}$.

Soient $\tau = 0$ *et* $\sigma' = 1$. Alors $\delta = \frac{\pi+3}{2}$. Si p divise, δ on a $p = 3$, et $\frac{\delta}{3} = \frac{1}{2}(3^{k-1}+1)$ $(\pi = p^k)$ divise $\pi - 1 = 3^k - 3^{k-1} - 2\frac{\delta}{3}$, donc aussi $3 + 1 = 4$, d'où $3^{k-1} \leq 7$, et $K \leq 2$. Si $K = 1$, $\mathcal{N}$ est un g_6, et $\mathcal{A}^0$, isomorphe au g^4_{12}, n'a pas de g_6. Si $K = 2$, est un g_{30}, et $\mathcal{A}^0$, isomorphe au g^6_{360}, n'a pas de g_{30} (un tel g_{30}, ne divisant pas le g_{30} métacyclique (*S.*, 73) contiendrait 6 g_5 : ne pouvant donc contenir 10 g_3, il n'en aurait qu'un : or, dans un champ de 6 symboles, aucun g_3 ne peut être permutable à une s_4). Donc δ est premier à p et divise $\pi - 1 = 2\delta - 4$, d'où $\pi = 5$ et $\delta = 4$. Donc $\mathcal{N}$ est un g_{12}. Or $\mathcal{A}^0$ est ici isomorphe au g^2_{60}, dont chaque g_3 est effectivement contenu dans un g^4_{12}. *Donc* $\mathcal{A}^{0(1)}(2, 5)$, *qui est la représentation de* $\mathfrak{V}(2, 5)$ *en* g^{20}_{60}, ***admet une division en systèmes d'imprimitivité de degré*** 4. On a déjà vu que $\mathcal{A}^{0(1)}(2, 5)$ [isomorphe au g^2_{120} (I, **5** ; *cf.* *S.*, 86)] ***n'admet pas une telle division*** : cela correspond au fait qu'aucun g_6 cyclique du g^2_{120} n'y divise un g_{24} (tout g_{24} du g^2_{120} est un g^4_{24} ; car, le g^2_{120} ayant 10 g_3, chacun de ses g_{24} en contient 4, d'après le théorème de Sylow).

Soient $\tau = 0$ *et* $\sigma' = 2$. Alors $\delta = \pi + 2$ ne peut diviser $\pi(\pi - 1)$.

Soient $\tau = 1$ *et* $\sigma' = 1$. Alors $\delta = \frac{\pi+5}{2}$. Si p divise δ, on a $p = 5$, et $\frac{\delta}{5} = \frac{1}{2}(5^{k-1}+1)$ divise $\pi - 1 = 5^k + 5^{k-1} - 2\frac{\delta}{5}$, donc aussi $5 + 1 = 6$, d'où $5^{k-1} \leq 11$, et $K \leq 2$. Si $K = 1$, $\mathcal{N}$ est un g_{15}, et $\mathcal{A}^0$, isomorphe au g^2_{60}, qui n'est pas représentable en g^4, n'a pas de g_{15}. Si $K = 2$, $\mathcal{N}$ est un $g_{15,15}$ et n'a qu'un g_{15} ; or $\mathcal{A}^0$ est isomorphe au $g^2_{\pi(\pi-1)}$ $\mathfrak{V}(2, 5^2)$ de classe 24, où un g^{15}_{15} ne peut être permutable à une s_4 (*S.*, 58).

Donc δ est premier à p et divise $\pi - 1 = 2\delta - 6$. Donc $\pi + 5$ divise 12, et $\pi = 7$. Donc $\delta = 6$, et $\mathcal{N}$ est un g_{24}. Or $\mathcal{A}^0(2, 7)$ est isomorphe au g^7_{168} (*S.*, 105), où le diviseur fixant un symbole est un g^6_{24}. Donc tout g_4 cyclique du g^7_{168}, fixant nécessairement un symbole, est effectivement contenu dans un g_{24}. *Donc* $\mathcal{A}^{0(1)}(2, 7)$, *qui est la représentation de* $\mathfrak{V}(2, 7)$ *en* g^{12}_{168}, *admet une division en systèmes d'imprimitivité, de degré* 6. On a déjà vu que $\mathcal{A}^{(1)}(2, 7)$, isomorphe au $g^8_{336}\mathcal{L}(2, 7)$ (I, **5**), *n'admet pas une telle division* : cela correspond au fait que $\mathcal{L}(2, 7)$, n'étant pas représentable en g^7 (*S.*, 86), n'a pas de g_{48}.

Soient $\tau = 1$ *et* $\sigma' = 2$. Alors $(\mathcal{A}^0, \mathcal{N})$ est $< \pi - 1$, et $\mathfrak{V}(2, \pi)$, isomorphe à $\mathcal{A}^0$, est représentable en moins de π symboles. Donc $\pi = 3^2$ (*S.*, 90), $\delta = 12$, et $(\mathcal{N}, 1) = 60$. Or, dans le g^6_{360} isomorphe à $\mathfrak{V}(2, 3^2)$, chaque g_5 est effectivement contenu dans un g_{60}. *Donc* $\mathcal{A}^{0(1)}(2, 3^2)$, *qui est la représentation de* $\mathfrak{V}(2, 3^2)$ *en* g^{72}_{360}, *admet une division en systèmes d'imprimitivité de degré* 12. On a déjà vu que $\mathcal{A}^{(1)}(2, 3^2)$, isomorphe au $g^{72}_{360}\mathcal{L}(2, 3^2)$ (I, **5**), *n'admet pas une telle division* : cela correspond au fait que $\mathcal{L}(2, 3^2)$, n'étant pas isomorphe au g^6_{360} (*S.*, 81) n'a pas de g_{120}.

8. *Équations de* $A(n, \pi)$, $A^0(n, \pi)$. Soit $a = h$. Considérons le diviseur $X^1 = \{X, m_{1\nu}\}$ de A. Son constituant $X^{1(0)}$ dans q_0 a trois systèmes d'intransitivité : l'un est formé des points $x_1 0 \ldots 0$ fixés par $X^{(0)}$; l'autre des $q_0^{(0)}$ (il contient $010\ldots0$) ; le troisième, qui disparaît pour $n \geq 3$ (**5**), est q_0^0 (il contient $0010\ldots0$). $X = A_1 P$ et P sont normaux dans X^1. On a d'ailleurs, en posant $\{A_1, m_{1\nu}\} = A_1^1$ et $\{P, m_{1\nu}\} = P^1$, $X^1 = A_1^1 P = A_1 P^1$. Enfin, comme $X \equiv X^{(0)}$ (**5**), et que $\{m_{1\nu}\}$ est isomorphe à son action sur les points $x_1 0 \ldots 0$ fixés par X (*donc premier à* X), *on a aussi* $X^1 \equiv X^{1(0)}$.

Posons maintenant, en désignant par e une racine de $e^2 = \iota$, $t_i = \tau_i m_{ie} = \begin{vmatrix} x_i & e y_i \\ y_i & e^{-1} x_i \end{vmatrix}$. On a $t_i^2 = 1$, et t_i est permutable à A_1 et à A_1^1 (I, **7**).

Soit d'abord $n \geq 4$. Comme t_1 échange les deux points $010\ldots0$, $e0\ldots0$, et T_{12} les deux points $0010\ldots0$, $10\ldots0$, on aura (*S.*, 56).

(1) $\qquad A = X^1 + X t_1 X^1 + X T_{12} X^1 = X T X^1, \qquad T = 1 + t_1 + T_{12}.$

ou, puisque $t_1 \{ m_{1\rho} \} t_1 = \{ m_{1\rho} \}$ et $T_{12} m_{1\rho} T_{12} = m_{2\rho}$,

$$(2) \qquad A = X^1 + X^1 t_1 X^1 + X^1 T_{12} X^1 = X^1 T X^1.$$

Désignons ξ par un quelconque des générateurs τ, u, V_{ik} (I, 6) *où i et k sont $\neq 1$*, par ξ' un quelconque de ceux où i et k sont $= 1, 2$, et considérons les identités

$$(3) \qquad t_1^2 = T_{12}^2 = 1, \qquad t_1 \xi t_1 = \xi, \qquad T_{12} \xi T_{12} = \xi;$$

$$(4) \qquad t_1 m_{1\rho} t_1 = m_{1,\rho}^{-1},$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} t_1 V_{1k\rho} t_1 = t_k m_{1,-\rho} m_{k\rho} T_{2k} V_{12\rho} T_{12} V_{12,-\rho} T_{12} t_k, \quad t_k = \tau(m_{1\rho}), \\ \quad e^2 = \nu \ (k > 2), \\ \text{d'où, en transformant par } t_k \text{, et en changeant } \rho \text{ en } e^{-1}\rho, \\ t_1 U_{1k\rho} t_1 = m_{1,-\rho} m_{k,-\rho} T_{2k} V_{12,-\rho} T_{12} V_{12,-\rho} T_{12} \ (k > 2) \end{array} \right.$$

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} t_1 U_{01\rho} u_{1\lambda} t_1 = m_{0\theta} m_{1k} U_{01\sigma} u_{1\alpha} t_1 U_{01\tau} u_{1\beta}, \\ \theta = \dot{r} r^{-1}, \qquad \sigma = \theta\rho, \qquad \tau = e\rho r^{-1}, \qquad \lambda = -\dot{\sigma}\dot{\tau}^{-1} = \lambda e^{-1}, \\ \alpha = \lambda - r = \dot{r}, \qquad \beta = -\alpha(r\dot{r})^{-1}, \qquad r = \lambda - \beta\rho\nu, \\ \text{(la formule vaut pour } \lambda = 0 \text{ ou } \rho = 0\text{, mais non pour } \lambda = \rho = 0). \end{array} \right.$$

$$(7) \qquad t_1 T_{12} = T_{12} t_2, \qquad \text{d'où, par inversion,} \qquad T_{12} t_1 = t_2 T_{12}.$$

$$(8) \qquad T_{12} u_{1\lambda} T_{12} = u_{2\lambda},$$

$$(9) \qquad T_{12} m_{1\rho} T_{12} = m_{2\rho}.$$

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{12} V_{12\rho} T_{12} = t_1 U_{12,-\rho} t_1, \\ \text{d'où, en transformant par } t_1 \text{, d'après (3) et (7),} \\ T_{12} U_{12\rho} T_{12} = U_{12\rho}. \end{array} \right.$$

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{12} V_{j2\rho} T_{12} = t_1 U_{j1,e\rho} t_1 \qquad (j > 2 \text{ ou } j = 0), \\ \text{d'où, en transformant par } t_1 \text{ et } t_1 t_k \text{ (pour } j = k \geq 2\text{), d'après (3) et (7),} \\ T_{12} U_{1j\rho} T_{12} = U_{2j\rho} \qquad (j > 2 \text{ ou } j = 0), \\ T_{12} V_{1k\rho} T_{12} = V_{2k\rho} \qquad (k > 2). \end{array} \right.$$

Supposons connues les équations de $A_1 = A(n-2, \pi)$. P^1 *est défini par les équations de* P (I, **15**) *jointes à celles de la forme* $m_{12}^{-1} \gamma m_{12} = \gamma'$, γ *parcourant les générateurs de* P, *et à* $m_{12}^{\alpha^{-1}} = 1$ (car P^1 vérifie ce système, et ce système définit un groupe d'ordre $\{P^1, 1\}$ (*E.*, 19)). *On connaît aussi toutes les relations de la forme* $\alpha^{-1} \beta \alpha = \beta'$, α *parcourant les générateurs de* A_1, *et* β *ceux de* P^1 (I, **7**). *L'ensemble* S *de ces trois systèmes définit* X^1 (car X^1

vérifie S, et S définit un groupe d'ordre $(X^1, 1)$ [1], *et les équations* (3)-(11), *jointes à* S, *définissent* $A(n, \pi)$ [2].

Pour l'établir, il suffit de montrer que TX^1T est, *en vertu de ces équations*, $\leqq X^1TX^1$. Car alors le groupe Z défini par ces équations sera X^1TX^1, donc A. Mais comme A les vérifie, A est Z. Donc $Z = A$ (*cf.*, *S.*, 68).

Dans ce qui suit les relations employées entre les éléments de X^1 seront employées, bien entendu, comme des conséquences des équations de X^1. On a d'abord, d'après (5) (en négligeant les derniers indices des u, m, V, U),

$$(12) \qquad T_{12}V_{12}t_1 = m_1 m_2 V_{12} t_1 U_{12}.$$

D'après (5) encore

$$X^1 t_1 U_{12} U_{1k} t_1 = X^1 T_{12} V_{12} T_{2k} V_{12} T_{12} V_{12} T_{2k} \qquad (k > 2).$$

Or $T_{2k}V_{12} = V_{1k}T_{2k}$, et $V_{12}V_{12} = V_{1k}V_{12}$. Donc, d'après (11), le dernier complexe s'écrit $X^1T_{12}V_{12}T_{2k}T_{12}V_{12}T_{2k}$, ou, en remplaçant $V_{12}T_{2k}T_{12}$ par $T_{2k}T_{12}V_{2k}$, puis T_{2k} par $m_{k-1}V_{2k1}V_{k2-1}V_{2k1}$ (1, **6**), $X^1T_{12}V_{2k}V_{k2}V_{2k}T_{12}V_{2k}V_{12}T_{2k}$, ou, employant deux fois (11) $X^1T_{12}V_{k2}T_{12}V_{1k}V_{2k}V_{12}T_{2k}$, ou, d'après (11) et (5),

$$X^1T_{12}V_{12}T_{2k}V_{12}V_{2k}V_{12}T_{2k},$$

ou, en remplaçant la parenthèse par $V_{12}V_{k2}V_{1k} = V_{12}V_{1k}V_{k2}V_{12}$ (1, **7**), en observant que V_{12} est permutable à V_{1k}, et en employant (11), $X^1T_{12}V_{k2}V_{12}$. Comme V_{12} est permutable à V_{12}, on a finalement, en transformant par T_{12},

$$(13) \qquad X^1 t_1 U_{1k} U_{1l} t_1 = X^1 T_{12} V_{12} V_{k2} T_{12} \qquad (k > 2;\ l > 2;\ k \neq l);$$

d'où, en transformant par t, t_2, $t\,t_1$,

$$(14) \qquad X^1 t_1 V_{12} U_{1l} t_1 = X^1 T_{12} V_{12} V_{l2} t_1 T_{12}$$

$$(15) \qquad X^1 t_1 V_{1k} U_{1l} t_1 = X^1 T_{12} V_{12} V_{k2} t_1 T_{12} \qquad (k > 2;\ l > 2;\ k \neq l)$$

$$(16) \qquad X^1 t_1 V_{1k} V_{1l} t_1 = X^1 T_{12} V_{12} V_{12} t_1 t_2 T_{12}$$

---

[1] On voit de même que X est défini par celles des équations de X^1 où ne figure pas m_{12}. Les équations de X^1 s'obtiennent d'une façon toute semblable.

[2] On peut évidemment éliminer les U_{1j} ou les V_{1j} ($j = 0, 2, \ldots, n$) et ne prendre qu'une équation dans chacune des formules (5), (10), (11) [mais, dans (11), l'équation prise ne peut être la troisième que si on lui adjoint une des autres équations correspondant à $j = 0$].

[3] Les seconds membres de (13) et de (16) doivent être, comme les premiers, symétriques en k et l : on le vérifie en transformant par T_{12}. Les formules (14) et (15) ne diffèrent que pour $l > 2$.

On a encore, d'après (5),

$$X^1 t_1 V_{1k} U_{1k} t_1 = X^1 T_{12} V_{12} t_2 V_{12} T_{12} V_{12} T_{12}.$$

d'où, en remplaçant $t_2 V_{12}$ par $U_{12} t_2$, puis $T_{12} V_{12} U_{12}$ par $T_{12} U_{12} V_{12} u_2 = u_2 U_{12} T_{12} V_{12}$ (I, **7**),

$$X^1 t_1 V_{1k} U_{1k} t_1 = X^1 T_{12} V_{12} t_2 T_{12} V_{12} u_2.$$

ou, en remplaçant $V_{12} t_2 T_{12}$ par $t_2 U_{12} T_{12} = t_2 T_{12} U_{12}$, puis $T_{12} t_2 T_{12}$ par t_1, et en faisant passer T_{2k} à gauche,

$$(17) \qquad X^1 t_1 V_{1k} U_{1k} t_1 = X^1 t_1 U_{1k} V_{1k} \qquad (k > 2).$$

On a, d'après (5) et (6),

$$X^1 t_1 V_{12} U_{01\rho} u_{1\lambda} t_1 = X^1 T_{12} V_{12} t_2 U_{01} u_1 t_1 U_{1\lambda} u_1.$$

λ *ou* ρ pouvant être nul (mais non λ et ρ). De là, t_2 étant permutable aux éléments suivants, et V_{12} à $U_{01} u_1$, en employant (12), en transformant par T_{2k}, et en faisant passer t_k à gauche

$$(18) \qquad X^1 t_1 V_{1k} U_{01\rho} u_{1\lambda} t_1 = X^1 t_1 V_{1k} U_{01} u_1 \qquad (\lambda \text{ ou } \rho \text{ peut être nul})$$

d'où, en transformant par t_k,

$$(19) \qquad X^1 t_1 U_{1k} U_{01\rho} u_{1\lambda} t_1 = X^1 t_1 U_{1k} U_{01} u_1 \qquad (\lambda \text{ ou } \rho \text{ peut être nul}).$$

Si, dans (18) et (19), on fait $\rho = 0$, la formule (6), qui a été employée, se simplifie, et l'on voit qu'au second membre U_{01} se réduit aussi à 1 ; d'où

$$(20) \qquad \begin{cases} X^1 t_1 V_{1\lambda} u_{1\lambda} t_1 = X^1 t_1 V_{1\lambda} u_1 \\ X^1 t_1 U_{1\lambda} u_{1\lambda} t_1 = X^1 t_1 U_{1\lambda} u_1 \end{cases} \qquad (\lambda \neq 0).$$

La formule (5) donne

$$(21) \qquad X^1 t_1 V_{1k} t_1 = X^1 T_{12} V_{12} T_{2k} t_k, \qquad X^1 t_1 U_{1k} t_1 = X^1 T_{12} V_{12} T_{2k}$$

qui remplace (20) pour $\lambda = 0$ [1].

---

[1] $X^1 t_1 V_{1k} t_1$ ne peut se ramener à $X^1 t_1 V_{1k} u_1$ ni par suite $X^1 t_1 U_{1k} t_1$ à $X^1 t_1 U_{1k} u_1$, car $t_1 V_{1k\rho} t_1 u_{1\lambda} V_{1k\sigma}$ devrait être dans $X^1 t_1$, et par suite changer le point $10 \ldots 00$ en $00 \ldots 10 \ldots 0$, ce qui n'a pas lieu.

Considérons enfin $X^1 t_1 V_{12} U_{12} U_{012} u_{17} t_1$, où U_{01}, U_{12}, V_{12} sont permutables à u_1, et entre eux mod (u_1). En écrivant ce complexe sous la forme $X^1 t_1 V_{12} U_{01} u_1 t_1 . t_1 U_{12} t_1$, on voit, d'après (18) et (5), qu'il est égal à $X^1 t_1 V_{12} U_{01} u_1 V_{12} T_{12} V_{12}$ ou, puisque V_{12} est permutable à $U_{01} u_1$, d'après (5) et (12), à $X^1 t_1 U_{01} u_1 U_{12} t_1 V_{12}$, ou, d'après (10), à $X^1 t_1 U_{12} U_{01} u_1 V_{12}$. On a donc finalement

$$(22) \qquad X^1 t_1 V_{12} U_{12} U_{012} u_{17} t_1 = X^1 t_1 V_{12} U_{12} U_{01} u_1 \qquad (\lambda \text{ ou } \varrho \text{ peut être nul}).$$

De là, comme tout à l'heure, pour $\varrho = 0$,

$$(23) \qquad X^1 t_1 V_{12} U_{12} u_{17} t_1 = X^1 t_1 V_{12} U_{12} u_1 \qquad (\lambda = 0).$$

La formule (17) remplace (23) pour $\lambda = 0$.

Réduisons maintenant $X^1 t_1 V_{1k_1} \ldots V_{1k_r} U_{1l_1} \ldots U_{1l_s} U_{01}^{\theta} u_1 t_1 X^1$, les k_i, l_i étant $\neq 0$, et θ étant égal à 0 ou à 1. Si r ou s est > 1, ou si $k_i \neq l_i$, on ramène cette expression, en introduisant t_1^2, d'après (21), à $X^1 T_{12} V_{12} t_1 V_{1k_1} \ldots V_{1k_r} U_{1l_1} \ldots U_{1l_s} U_{01}^{\theta} u_1 t_1 X^1$ qui, d'après (12), se ramène à la forme primitive où $r + s$ est diminué de 1. On arrive finalement à des cas déjà traités, et l'on voit, d'après les résultats obtenus, que $t_1 X^1 t_1$ est dans $X^1 t_1 X^1 + X^1 T_{12} X^1$.

Passons au complexe $T_{12} X^1 T_{12} = T_{12} A_1^1 P T_{12}$. T_{12} transforme : 1° les générateurs de P autres que V_{12}, U_{12} en éléments de A_1, V_{12} en $t_1 U_{12} t_1$, et U_{12} en U_{12} ; 2° V_{1j} $(j > 2$ ou $j = 0)$ en $t_1 U_{1j} t_1$, V_{2j} en V_{1j}, m_1, τ_1, t_1 en m_2, τ_2, t_2, et chacun des autres générateurs de A_1^1 en lui-même. Donc, t_1 étant permutable à A_1^1, et P normal dans X^1, $T_{12} X^1 T_{12}$ est $X^1 (t_1 P)^m$, m étant un certain entier. Or, ϖ désignant un élément arbitraire de P, $X^1 t_1 \varpi t_1 P (t_1 P)^{m-2} X^1$ se ramène, d'après les formules (13)-(23), V_{12}, T_{2j}, t_2 sont permutables à $t_1 P$ pour $k > 2$ ou $k = 0$ et $l > 2$, ou à $X^1 (t_1 P)^{m-1} X^1$, ou à $X^1 T_{12} P (t_1 P)^{m-2} X^1$. De même $X^1 T_{12} \varpi t_1$ se ramène, d'après (5)-(11), à $X^1 T_{12} V_{12}^{\theta} t_1$ $(\theta = 0$ ou $1)$, donc, d'après (7), (12), ou à $X^1 T_{12}$, ou à $X^1 t_1 U_{12}$. On a donc

$$X^1 T_{12} P (t_1 P)^{m-2} X^1 = X^1 T_{12} P (t_1 P)^{m-3} X^1 = X^1 (t_1 P)^{m-2} X^1.$$

En continuant ainsi on voit que $X^1 T_{12} X^1 T_{12} X^1$ est dans $X^1 T_{12} X^1 + X^1 t_1 X^1$, donc $T_{12} X^1 T_{12}$ dans $X^1 T X^1$.

Chacun des deux complexes $X^1 t_1 X^1 T_{12} X^1$, $X^1 T_{12} X^1 t_1 X^1$ étant

formé des inverses des éléments de l'autre, il suffit de considérer le premier, qui se réduit à $X^1 t_1 P T_{12} X^1$. Or $X^1 t_1 \varpi T_{12} X^1$ se ramène, d'après (5)-(11), à $X^1 t_1 V_{12}^{\theta} T_{12} X^1$ ($\theta = 0$ ou 1), donc, d'après (7), (12), ou à $X^1 T_{12} X^1$, ou à $X^1 t_1 X^1$. Donc $t_1 X^1 T_{12}$ et de même $T_{12} X^1 t_1$ sont dans $X^1 T X^1$. Donc enfin $T X^1 T$ est dans $X^1 T X^1$.

Soit maintenant $n = 3$. Alors T_{12} n'existe pas. Mais le système d'intransitivité de $X^{1(0)}$ qui, pour $n \geqq 4$, contient $0010\ldots0$ n'existe pas non plus (**5**). Donc $A = X^1 + X^1 t_1 X^1$ [1]. L'analyse précédente subsiste en supprimant tout ce qui concerne les générateurs dont un indice est > 1. *Les équations de* A *sont alors fournies par* (3) (*où l'on remplace* T_{12} *par* 1), (4), (6) *jointes aux équations de* X^1.

Pour $n = 2$, *ces mêmes équations* [*où l'on fait, dans* (6), $\rho = 0$, *donc* $m_{0\theta} = 1$] *fournissent les équations de* $\{U(2, \pi), m_{1\theta}\}$. En éliminant t_1 à l'aide de $t_1 = \tau_1 m_{1e}$, e disparaît aussi, et l'on en déduit aisément les équations de $U(2, \pi)$ [*cf.* **10** et *S.*, 85, 92 où c est mis pour τ_1, et a pour $m_{1\theta}$, si $\pi \equiv 1 \bmod 4$ ou si $p = 2$, et pour $m_{1\theta}\tau_1^2$ si $\pi \equiv 3 \bmod 4$].

9. *Il reste à former les équations de* $A^0(n, \pi)$ *pour* $n \geqq 3$. Désignons par m le générateur $m_{2\theta}$ si $n \geqq 4$, le générateur $m_{0\theta}$ (I, **2**) si $n = 3$. Adjoignons aux équations de A les équations (19)-(21) de (I, **7**) qui en résultent ou qui définissent des générateurs auxiliaires (elles fournissent en particulier l'expression de chaque m_i par m et les générateurs de A^0 conformément à la relation plus générale $A = \Sigma_0^{\pi} A^0 m^k$). Après avoir remplacé t_i par $\tau_i m_{ie}$, réunissons dans chaque équation de A, les différents m_i en une seule puissance de m : cette puissance, étant dans A^0 (d'après l'équation elle-même), est de la forme $m^{k(\pi+1)}$. On peut maintenant négliger les équations où figurent les m_i autres que m, puisque ces équations ne servent qu'à définir ces m_i comme générateurs supplémentaires. On peut de plus, à l'aide de la formule (21) de (I, **7**), si $n \geqq 4$, éliminer $m^{\pi+1}$ des autres équations où il figure ; si $n = 3$, $m^{\pi+1} = 1$. Les équations de A se composent alors : 1° d'un système E formé des

[1] La représentation de A relative à X^1 est alors de ix fois l'analyse [illegible]

équations où ne figure pas m : 2° des équations de la forme $m^{-1}\varphi m = \varphi'$, $m^{\pi+1} = \varphi''$, φ parcourant les générateurs de A^0, et φ', φ'' étant connus. *Le système* E′ *obtenu en adjoignant à* E *les conditions d'automorphisme, de fermeture et de permutabilité fournies par les autres équations définit* $A^0(n, \pi)$ (*E.*, 19).

II. — Groupe gauche.

10. On a vu (I, **18**) que $G(n, \pi)$ remplace le point $10\ldots0$ par un point quelconque (autre que $0\ldots0$). $G(n, \pi)$ *est donc un* $g^{\pi^{n-1}}$ *transitif*.

Soit X le diviseur de G qui fixe $10\ldots0$. Les substitutions de X ont des matrices de la forme M du n° **5** où les éléments dont les deux indices sont $\neq 1$ forment une matrice quelconque M_1 du groupe G_1 de $a_1 = \Sigma_2^n (x_i y_i - y_i x_i)$ [je désignerai par G_1, G_1', $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_1'$, les groupes déduits de G_1 comme G', G'', $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{G}$ (G_1 ne divise pas G')], et où l'on peut prendre arbitrairement dans $\mathfrak{S}$ ou bien les éléments autres que β'_{11} ($=1$) de la seconde colonne [alors les formules (1) et (2) de I, **17** déterminent les α_{i1}, α_{1i} où $i \neq 1$ par les autres éléments de M_1, ou bien les éléments autres que α_{11} ($=1$) de la première ligne (alors les formules (3) et (4) de I, **17** déterminent les α_{j1}, β_{jj} où $j \neq 1$). Donc $(X, G_1) = \pi^{n-1}$. *Les matrices du* $g_{\pi^{n-1}}$ P *déjà considéré* (I, **25**) *sont celles des* M *où* $M_1 = 1$. P *est premier à* G_1 *et permutable à chaque substitution de* G_1, *donc normal dans* $X = G_1 P$. Comme $m_{11}^{-1}\gamma$ et $\tau_1^{-1}\gamma\tau_1$ fixent $10\ldots0$ et sont d'ordre $\pi - 1$ mod G (γ est permutable à m_{11}), les diviseurs de G', G'' qui fixent $10\ldots0$ sont respectivement $X' \equiv (X, m_{11}^{-1}\gamma) = (X, \tau_1^{-1}\gamma\tau_1)$ et $X'' = (X, m_{11}^{-1}\gamma^2) = (X, \tau_1^{-1}\gamma^2\tau_1)$ (si $p = 2$, $X'' = X'$). $m_{11}^{-1}\gamma$ et $\tau_1^{-1}\gamma\tau_1$ sont permutables à G_1 et à P ; $(X', X) = \pi - 1$ et $(X'', X) \equiv (G'', G)$.

11. X (ou P) remplace les points $0y_1 0\ldots0$ ($y_1 \neq 0$) par les π^{n-1} points $(\alpha_{11}y_1, y_1, \alpha_{21}y_1, \ldots)$, d'où $\pi - 1$ systèmes d'intransitivité q^ν de degré π^{n-1} et, dans X′, un seul constituant tran-

sitif de degré $\pi^n - \pi^{n-1}$, dans X'', si $p > 2$, deux systèmes de degré $\frac{1}{2}(\pi^n - \pi^{n-1})$]. On voit, comme au n° **5** que les constituants correspondants sont parallèles. *Si* $n = 2$, $G = L(2, \pi)$ et les $\pi^2 - \pi$ points de $q^{(2)}$, joints aux $\pi - 1$ points $x_1 0 \ldots 0$ $(x_1 \neq 0)$ fixés par X, X' et X'' épuisent le champ de G (*cf. S.*, 78). *Soit* $n > 2$. X remplace $0010\ldots0$ par $\alpha_{12}\, 0\, \alpha_{22} \ldots \alpha_{n2}$ étant arbitraires et $\alpha_{22}, \ldots$ prenant $\pi^{n-2} - 1$ systèmes de valeurs, d'où, pour X, X' et X'', un $\pi^{\text{ième}}$ système q^n de degré $\pi^{n-1} - \pi$ (ce nombre est nul pour $n = 2$), et il ne reste plus que les $\pi - 1$ points $x_1 0 \ldots 0$ $(x_1 \neq 0)$. Donc X, X' et X'' n'en fixent pas d'autres [1]. On voit que, si $\pi > 2$, $G'(n, \pi)$, *donc aussi* $G(n, \pi)$ *et* $G''(n, \pi)$ *sont imprimitifs* [d'ailleurs ils divisent $L(n, \pi)$ qui est imprimtif (*S.*, 78)].

Si $\pi = 2$, $G' = G$. *Alors* $G(2, 2) = L(2, 2)$ *est deux fois transitif* (*S.*, 78). *Pour* $n > 2$, $G(n, 2)$ *n'est qu'une fois transitif*, car X est intransitif. *Mais* $G(n, 2)$ *est primitif*. Car X n'ayant que deux constituants transitifs des degrés 2^{n-1} et $2^{n-1} - 2$; le degré d'un système d'imprimitivité fixé par X devrait être $2^{n-1} + 1$ ou $2^{n-1} - 1$. Or aucun de ces nombres ne divise, pour $n > 2$, le degré $2^n - 1$ de $G(n, 2)$ [$2^n - 1 = 2(2^{n-1} - 1) + 1 = 2(2^{n-1} + 1) - 3$].

12. Il est utile pour la suite (*cf.* **29**) d'étudier X d'un peu plus près quand $p = 2$. *Alors* P *est abélien, et* $\{u_1\}$ *est le central de* X (on le voit directement en cherchant les substitutions de P permutables à u_β et à v_β même si $\pi = 2$ et $\nu = 1, 2$ alors G est isomorphe au g_6^1 ou au g_{720}^2).

Soient $X^{(1)}$, $P^{(1)}$, $G^{(1)}$, les actions respectives de X, P, G, sur q qui est formé des points $x_1 y_1 \ldots x_\nu y_\nu$ où x_1 est arbitraire et où le point de coordonnées $x_2, y_2, \ldots, x_\nu, y_\nu$ prend toutes les déterminations autres que $0, \ldots, 0$. $P^{(1)}$, étant régulier, est premier à $G^{(1)}$ dont le degré est $\pi^{n-1} - \pi$ (G_1 est formé de π constituants parallèles semblables à G_1, chacun étant caractérisé par la valeur de x_1).

---

[1] On vérifie directement que si une substitution σ de X fixe tous les points de q, son seul coefficient non diagonal $\neq 0$ est α_{12}, les coefficients diagonaux étant égaux à 1. Le p.g.c.d. de X et du constituant de X ayant pour champ les q est donc dans $\{u_1\}$.

Donc $X^{\gamma} \equiv X$. D'ailleurs X^{γ_1}, ayant un central $\neq 1$, est imprimitif (*S.*, 62).

Soient, *en supposant* $n > 2$, X^0, P^0, G_1^0 les actions de X, P, G_1 sur q^0 qui est formé des $\pi^{n-1} - \pi$ points $x_1 o x_2 y_2 \ldots x_\nu y_\nu$ où x_1 est arbitraire, et où le point φ de coordonnées $x_2, y_2, \ldots, x_\nu, y_\nu$ prend toutes les déterminations autres que o, ..., o. Comme P laisse φ inaltéré, le système $q^{0\varphi}$ des π points $x_1 o x_2 y_2 \ldots x_\nu y_\nu$ où x_1 varie seul est évidemment un système d'intransitivité de P^0, et les $\pi^{n-2} - 1$ systèmes $q^{0\varphi}$ épuisent q^0. La substitution $V_{1k}(U_{1k})$ de P agit sur tous les $q^{0\varphi}$ où, dans φ, x_k (y_k) est $\neq 0$ (et sur ceux-là seulement). Donc (u_1) est le diviseur de P qui laisse q^0 inaltéré. Donc P^0 est d'ordre π^{n-2}. Comme G_1^0 laisse x_1 inaltéré, le système $q^{x_1\varphi}$ des $\pi^{n-2} - 1$ points $x_1 o x_2 y_2 \ldots x_\nu y_\nu$ où x_1 reste constant est un système d'intransitivité de G_1^0, et les π systèmes $q^{x_1\varphi}$ épuisent q^0 (G_1^0 est donc formé de π constituants parallèles semblables à G_1 dont chacun a pour champ un $q^{x_1\varphi}$). *Donc* $X^0 = G_1^0 P^0$ *est transitif d'ordre* (X, 1) : π *et admet une division en* $\pi^{n-2} - 1$ *systèmes d'imprimitivité de degré* π *qui sont les systèmes d'intransitivité de son diviseur normal* P^0.

15. Considérons maintenant $\mathcal{G}$ (*cf.*, **4**). Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'$ les diviseurs de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ qui fixent 10...0, et Ξ', Ξ'' les groupes déduits de X', X'' en y regardant les variables comme homogènes. Ξ' est $\mathcal{X}'$, et Ξ'' $\mathcal{X}$. I étant premier à X' et à X'', Ξ' a l'ordre de X', et Ξ'' celui de X''. D'ailleurs $\mathcal{G}$ permute transitivement les $\frac{\pi^n - 1}{\pi - 1}$ droites issues de l'origine. Donc $(\mathcal{X}, 1) = (\mathcal{G}, 1) : \frac{\pi^n - 1}{\pi - 1} = \frac{(G, 1)}{\pi^n - 1}$, et $\mathcal{X} = \Xi''$. De même $\mathcal{X}' = \Xi'$.

La matrice générale de $\mathcal{X}$ a la forme $\mathfrak{M}$ du n° **4**, $\mathfrak{M}$ n'étant déterminée qu'à une matrice près de I comme facteur. Fixons ce facteur de manière que $\mathfrak{M}$ soit dans G. Alors la matrice $\mathfrak{M}_1$ formée des éléments de $\mathfrak{M}$ dont les deux indices sont $\neq 1$ est la matrice générale de G_1 et $\alpha_{11}\beta'_{11} = 1$. En multipliant par une m, on peut ramener α_{11} et β_{11} à 1. Les α_{ij}, β_{ij} où $j \neq 1$ (ou les α_{ij}, α_{ij} où $i \neq 1$) et α'_{11} sont arbitraires, et les coefficients restants de $\mathfrak{M}$ sont déterminés par le choix de ceux-là et de ceux de $\mathfrak{M}_1$. Mais on devra

regarder comme indistinctes les $\mathfrak{M}$ dont les coefficients sont proportionnels. *Donc* $\mathfrak{X} = (G_1 P, m_{11} | 1 | 1 = (G_1 P, m_{11} | D$. Si l'on remplace, dans le raisonnement précédent, $\mathfrak{X}, G_1, G_{11}$ par $\mathfrak{X}', G', G_{11}$, l'égalité $\alpha_{11}\beta_{11} = 1$ sera remplacée par $\alpha_{11}\beta_{11} = \rho$, et l'on aura à multiplier par une puissance de $\gamma = \begin{vmatrix} x_i & \iota x_j \\ y_i & y_i \end{vmatrix}$ $(i = 1, \ldots, \nu)$ (*cf.* I, **16**) pour la ramener à $\alpha_{11}\beta_{11} = 1$. On obtient alors de même $\mathfrak{X}' = (G_1 P, \gamma, m_{11} | 1 | 1$, et, comme $\gamma^2 \mu_i^{-1} = 1 : \left| \mu_i = \begin{vmatrix} x_i & \iota x_j \\ y_i & \iota^{-1} y_i \end{vmatrix} \right.$ $(i = 1, \ldots, \nu)$: *cf.* I, **16**$\Big|$, $\mathfrak{X}' = (G_1 P, \gamma, m_{11} | 1$. De là encore $\mathfrak{X} = \Xi''$, $\mathfrak{X}' = \Xi'$.

Au lieu des $\pi - 1$, q^0 de X, on obtient de même dans $\mathfrak{X}$ (ou $\mathfrak{X}'$) un seul système, q^1 du même degré π^{n-1}. Au lieu de q^0 (qui disparaît si $n = 2$), on obtient de même un système q^0 de degré $\frac{\pi^{n-1} - \pi}{\pi - 1}$. Et il ne reste plus que le point 10...0 fixé par $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{X}'$ (1).

Si $\mathfrak{G}$ a des systèmes d'imprimitivité de degré δ (> 1), $\mathfrak{X}$ fixe celui qui contient 10...0. Donc δ est égal à $\pi^{n-1} + 1$, ou à $\frac{\pi^{n+1} - 1}{\pi - 1}$, et divise le degré $\frac{\pi^n - 1}{\pi - 1}$ de $\mathfrak{G}$. Supposons d'abord $n > 2$. Si $\delta = \pi^{n-1} + 1$, $\pi^{n-1} + 1$, divisant $\frac{\pi^n - 1}{\pi - 1} = \sum_0^{n-1} \pi^i$, divise aussi $\sum_1^{n-1} \pi^i = \pi \frac{\pi^{n-1} - 1}{\pi - 1}$, donc aussi $\frac{\pi^{n-2} - 1}{\pi - 1}$. Donc $\pi^{n-1} + 1$ est $\pi^{n-2} + 1$, ce qui est absurde. Si $\delta = \frac{\pi^{n-1} - 1}{\pi - 1}$, $\pi^{n-1} - 1$ doit diviser $\pi - 1 = \pi(\pi^{n-1} - 1) + \pi - 1$, ce qui est impossible pour $n > 2$. *Donc* $\mathfrak{G}$ *et, a fortiori,* $\mathfrak{G}'$ *sont primitifs pour* $n > 2$. $\mathfrak{G}(2, \pi) = \mathfrak{O}(2, \pi)$ est deux fois transitif et $\mathfrak{G}'(2, \pi) = \mathfrak{C}(2, \pi)$ *trois fois* (*S.*, 78, 79).

14. *Équations de* $G(n, \pi)$. Posons $\zeta_t = \begin{vmatrix} \alpha_t & \beta_t \\ \gamma_t & \delta_t \end{vmatrix}$ $(t = 1, \ldots, n)$: si $p > 2$, $\zeta_t = \gamma^{\frac{\pi - 1}{2}}$ (*cf.* **15**) ; si $p = 2$, $\zeta_t = 1$ $\Big|$, $\zeta_t \eta_t = \eta_t$ $(\eta_t$ échange α_t

(1) Comme tout à l'heure $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$ $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ de X et de son équivalent de Galois $\mathfrak{G}^*$ est $(u_1 \ldots u_n)$ où l'on regarde les variables comme homogènes.

et y_i et opère sur les autres variables comme ζ; si $p = 2$, $t_i = \tau_i$), $\zeta\tau_i = t_i\tau_i = \zeta_i$ (ζ_i opère sur x_i, y_i la substitution $|x_i, -y_i|$ et sur les autres variables comme ζ). On a

$$
(1)\quad \left\{
\begin{array}{l}
t_i^2 = \zeta_i^2 = 1 \quad (\text{si } p = 2,\ \zeta_i = 1), \qquad t_i t_k = m_{i-1}\tau_i\tau_k, \qquad \zeta_i\zeta_k = m_{i-1}m_{k-1}, \\
t_k t_i t_k = m_{i-1}m_{k-1}, \qquad t_k\zeta_i t_k = \zeta_i, \qquad t_i\zeta_i t_i = m_{i-1}\zeta_i, \\
t_i u_{ik} t_k = u_{i-1,k} \quad (i \neq k), \qquad t_i u_{ik} t_i = v_{ik}, \qquad t_i m_{ik} t_i = m_{i-1,k}, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad t_i m_{ik} t_i = m_{ik} \quad (k \neq i), \\
t_i V_{ikl} t_i = W_{ik-1,l}, \qquad t_k V_{ikl} t_k = U_{ik-1,l}, \\
T_{ik} t_l T_{ik} = t_l \quad (l \neq i, k), \qquad T_{ik} t_i T_{ik} = t_i, \\
\zeta u_{ij}\zeta = u_{i-1,j}, \qquad \zeta m_{ij}\zeta = m_{ij} \quad (i = j \text{ ou } i = j), \\
\zeta_i V_{ikl}\zeta_i = \zeta_k V_{ikl}\zeta_k = V_{ik-1,l}, \qquad \zeta U_{ikl}\zeta = U_{ikl}, \\
\zeta_i V_{ikl}\zeta = V_{ikl}, \qquad \zeta U_{ikl}\zeta_i = U_{ik-1,l} \quad (l \neq i, k).
\end{array}
\right.
$$

Considérons, au lieu de G, le groupe $\overline{G}(n, \pi) = G = \{G, \zeta\}$ (pour $p = 2$, $\overline{G} = G$). Dans G le diviseur X fixant $10\ldots0$ est d'ordre 2 $\{X, 1\}$. Donc $\overline{X} = \{X, \zeta_1\}$.

Soit d'abord $n = 4$. Le diviseur $\overline{X}^1 = \{\overline{X}, m_{11}\}$ [où $\overline{X}$ est normal d'indice $\pi - 1$ (*cf.* **8**)] a, dans le champ de $\overline{G}$, trois systèmes d'intransitivité formés, le premier des $\pi - 1$ points $x\ 0\ldots0$ fixés par X, le second des $\pi - 1$ q^{x_1}, le troisième étant q^0. D'où (*S.*, 56)

$$\overline{G} = \overline{X}^1 = \overline{X}^1 t_1 \overline{X}^1 = \overline{X}^1 t_{12} \overline{X}^1.$$

En posant $\{G_1, \zeta_1\} = \overline{G}_1$ [1], $\{\overline{G}_1, m_{11}\} = \overline{G}_1^1$, $\{P, m_{11}\} = P^1$ (ζ_1 et m_{11} sont permutables à G_1 et à P), on a $\overline{X} = P\overline{G}_1$, $\overline{X}^1 = P\overline{G}_1^1 = P^1\overline{G}_1$.

On remarquera que *celles des équations* (1) *où les indices des* t *et des* T *et le second indice des* V *sont* > 1 *résultent de celles de* $\overline{X}$ (X contient $t_i = \zeta\tau_i$ pour $i > 1$).

Désignons par ξ un quelconque des générateurs τ_i, u_i, V_{ik} où i et k sont $\neq 1$, par ξ' un quelconque de ceux où i et k sont $\neq 1, 2$, et

[1]) Pour rendre la correspondance parfaite entre $\overline{G}_1$ et $\overline{G}$, il faudrait introduire dans G les variables fictives *inaltérées* x_0, y_0 sur lesquelles l'action de ζ serait $|-x_0, y_0|$. Mais il suffit pour la suite que l'action de ζ sur x_1, y_1 soit négligeable dans la structure de $\overline{G}_1$.

considérons les identités

$$(2)\qquad t_1^{-1}\,T_{12}^{-1}\,t_1 = 1, \qquad t_1\xi_1 t_1 = \xi_1\xi_2, \qquad t_1 = T_{12}\,t_2 \ldots$$

$$(3)\qquad t_1 u_{1j} t_1 = m_{1j}\, u_{1j}\,\xi_1\, t_j u$$

$$(4)\qquad t_1 m_{1j}\, t_1 = m_{1j}\,\ldots \qquad t_1\xi_1 t_1 = m_{1\ldots}\,\xi_1$$

$$(5)\qquad \begin{cases} t_1 V_{1kj}\, t_1 = t_k\, m_{1\ldots j}\, m_{kj}\, T_{2k} V_{12j} T_{12} V_{1\ldots j}\, t_k, \quad t_1 = m_{1\ldots}\,\xi_1\, T_{12}\,(k=2), \\ \text{d'où en transformant par } t_2, \text{ d'après } (1), \\ t_1 U_{1kj}\, t_1 = m_{1j}\, m_{k\ldots j}\, T_{2k} V_{1\ldots j}\, T_{12} V_{1\ldots j}\, T_{1\ldots}\, t_k\, (j \ldots 2). \end{cases}$$

$$(6)\qquad t_1 T_{12} = T_{12} t_2, \qquad \text{d'où} \qquad T_{12} t_1 = t_2 T_{12}.$$

$$(7)\qquad T_{12}\, u_{1j}\, T_{12} = u_{2j}.$$

$$(8)\qquad T_{12}\, m_{1j}\, T_{12} = m_{2j}, \qquad T_{12}\,\xi_1\, T_{12} = m_{1\ldots}\, m_{2\ldots}\,\xi_2.$$

$$(9)\qquad \begin{cases} T_{12} V_{1kj}\, T_{12} = t_1 U_{1\ldots j}\, t_1, \\ \text{d'où, par } (1), (2) \text{ et } (6), \\ T_{12} U_{1kj}\, T_{12} = U_{1\ldots j}. \end{cases}$$

$$(10)\qquad \begin{cases} T_{12} V_{1kj}\, T_{12} = t_1 U_{1\ldots j}\, t_1, \\ \text{d'où, par } (1), (2) \text{ et } (6), \\ T_{12} U_{1kj}\, T_{12} = U_{1\ldots j}, \\ \text{d'où, en transformant par } \tau_1^{-1}, \\ T_{12} V_{1kj}\, T_{12} = V_{2\ldots j}. \end{cases}$$

Supposons connues les équations de $\overline{G}_1 \equiv \overline{G}(n-2, \pi)$. P^1 *est défini par les équations de* P (I, **23**) *jointes à celles de la forme* $m_{1i}^{-1}\,\varpi\, m_{1i} = \varpi$, ϖ *parcourant les générateurs de* P, *et à* $m_{1i}^{\pi-1} = 1$ (*cf.*, **8**). *On connaît aussi toutes les relations de la forme* $\alpha^{-1}\beta\alpha = \beta'$, α *parcourant les générateurs de* G_1, *et* β *ceux de* P^1 (I, **7**). *L'ensemble* S *de ces trois systèmes d'équations définit* $\overline{X}^1$ (*cf.* **8**)[1], *et les équations* (2)–(10), *jointes à* S, *définissent* $G(n, \pi)$ (*en remplaçant* t_1 *par* 1 *si* $p = 2$)[2]. On le voit par les mêmes équations qu'au n° **8** où l'on remplacera partout X^1 par $\overline{X}^1$ et, aux trois seconds membres de (20) et (23), u_1 par $u_1 \overline{\xi}_{11}$, en négligeant les équations où figure U_{11}.

Pour $n = 2$, on voit, comme au n° **8** que *les équations de* $U(2, \pi, \overline{\xi})$ *sont fournies par* (2) *et* (3) *jointes aux équations de* $\overline{X}^1$.

---

[1] On obtient de même les équations de $\overline{X}$ et de X.

[2] On peut évidemment éliminer les U_{1j} ou les V_{1j} et ne garder que quelques équations dans chacune des formules (5), (9), (10).

Les équations déjà obtenues pour $U(2, \pi)$ (*S.*, 85, 92) s'en déduisent en éliminant t_1 à l'aide de $t_1 \zeta_1 = \tau_1$, ζ_1 disparaissant en même temps (*cf.* 8).

Des équations obtenues pour $\overline{G}$ *on déduit facilement les équations de* G. Soit E_1 un système d'équations de G_1 supposé connu, E'_1 le système des équations $\zeta_1^2 = 1$, $\zeta_1 \varsigma \zeta_1 = \varsigma'$, ς parcourant les générateurs de G_1. On peut supposer $\overline{G}_1$ défini par E_1 et E'_1. Introduisons maintenant, dans les équations de $\overline{G}$, τ_1 au lieu de ζ_1, à l'aide de la relation $t_1 \tau_1 = \zeta_1$. L'élimination de ζ_1 se fait comme il suit.

Tout d'abord on peut remplacer $\zeta_1 \varsigma \zeta_1 = \varsigma'$ par $t_1 \varsigma t_1 = \varsigma'$. La seconde équation (4) sera remplacée (d'après la première) par $t_1 \tau_1 t_1 = \tau_1^3$, donc $\zeta_1^2 = 1$ et $\zeta_1 m_{12} \zeta_1 = m_{12}$ par $t_1^2 = 1$ et $\tau_1 m_{12} \tau_1 = m_{12}$, et, dans (1), $\zeta_1 t_1$ par τ_1^3. Les équations $\zeta_1 u_{12} \zeta_1 = u_{12}$, $\zeta_1 V_{(12)} \zeta_1 = V_{(12)}$, $\zeta_1 U_{(12)} \zeta_1 = U_{(12)}$ deviendront $\tau_1 u_{12} \tau_1^3 = t_1 u_{12} t_1$, $\tau_1 V_{(12)} \tau_1^3 = t_1 V_{(12)} t_1$, $\tau_1 U_{(12)} \tau_1^3 = t_1 U_{(12)} t_1$, d'où l'on éliminera t_1 par (3), (5). L'équation (6) deviendra $t_1 T_{12} t_1 = T_{12} \tau_1 \tau_2^3$ qui permet de remplacer la troisième équation (7) par $T_{12} \tau_1 T_{12} = \tau_2$.

Éliminons enfin t_1 des équations (9) et (10) à l'aide de (5).

Soit $\overline{E}$ le système des équations de G ainsi obtenu ($\overline{E}$ équivaut évidemment au système obtenu d'abord). Le système E formé des équations de $\overline{E}$ où ne figure pas t_1 et des conditions d'automorphisme, de fermeture et de permutabilité fournies par les autres définit G (*E.*, 19)[1].

III. — Groupes quadratiques.

13. Le groupe A, conservant a, permute entre eux les points de chacune des π quadriques $a = \lambda$, λ parcourant ε. Je désignerai par $q_{\lambda na} = q_{\lambda a} = q_\lambda$ la quadrique $a = \lambda$, *en convenant que le sommet* $0 \ldots 0$ *du cône* $a = 0$ *sera exclu de* q_0 *et que, si* $p = 2$ *avec* $n = 2\nu + 1$, *le point*

[1] *Voir*, pour un autre système d'équations de G, Dickson, *Q. J.*, t. 38, 1906, p. 145-158.

$(0, \ldots, 0, \sqrt{\lambda c^{-1}}) = \varpi_\lambda$ *fixé par* A (I. **26**) *sera écrit de* q_0 : par $s_{\lambda n a} = s_{\lambda n} = s_\lambda$ le nombre des points de q_λ ; par $A^{(\lambda)}(n, \pi, a)$, $A^{\prime(\lambda)}(n, \pi, a)$, $B^{(\lambda)}(n, \pi, a)$ les constituants respectifs de A, $A^{\prime}$, B dans le champ q_λ.

s_0 *est égal à* $\pi^{2\nu} - 1$ *pour* $n = 2\nu + 1$ ($p > 2$), *et à* $\pi^{2\nu} - \theta_{\frac{1}{2}}(-1)^{\nu}$ *pour* $n = 2\nu'$ ($\theta = +1$ *ou* -1 *selon que* $\frac{1}{2}$ *est réductible ou non dans* ζ). s_λ ($\lambda \neq 0$) *est égal à* $\pi^{2\nu} + \theta_{\lambda c}\pi^{\nu}$ (θ_z *désignant le caractère quadratique de* z) *si* $n = 2\nu + 1$ *et* $p > 2$, *à* $\pi^{2\nu} - 1$ *si* $n = 2\nu + 1$ *et* $p = 2$ *ou* $\pi^{2\nu} - \theta_{\pi}(-1)^{\nu}$ *si* $n = 2\nu'$ (*E.*, 44, 45). Les systèmes de degré minimum sont dans : 1° pour $\frac{1}{2} = cx^2$ ($p \neq 2$), les q_λ où $\lambda = Nc$ (N étant toujours un non carré quelconque de ζ) ; 2° pour $\delta \neq 0$, les q_λ où $\lambda = 0$ si $\theta = +1$, et q_0 si $\theta = -1$.

$A^{\prime}$ *est transitif pour* $\lambda = 0$. En effet, *soit d'abord* $n > 3$. D'après (I, **27**) A transforme le point $10\ldots0$ de q_0 en un point arbitraire de q_0. De même A transforme le point $\lambda 10\ldots0$ de q_λ en tout point de coordonnées $x_j = \lambda\xi_j + \xi_{1j}$, $y_j = \lambda\eta_{1j} + \eta_{1j}$, le point $\xi_1 \eta_1 \ldots$ étant arbitraire sur q_0, et $\xi_1 \eta_1 \ldots$ étant un point de q_0, tel que la polaire (I, **1**) $a(\xi_1, \eta_1, \ldots ; \xi_1, \eta_1, \ldots)$ soit égale à 1 [1]. Or si $x_1, y_1 \ldots$ est un point arbitraire de q_λ, et $\xi_1 \eta_1 \ldots$ un point de q_0 tel que $a(x_1, \ldots ; \xi_1, \ldots) = 1$ (si $p = 2$ et $n = 2\nu + 1$, le premier nombre est homogène en $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$: l'égalité serait donc impossible si $x_1, \ldots, y_n$ était le point ϖ_λ) [2] le point de coordonnées $\xi'_j = x_j - \lambda\xi_j$, $\eta'_j = y_j - \lambda\eta_j$

---

[1] Il y a toujours de tels points. Cela résulte de (I, **27**) et aussi de la Note qui suit.

[2] *Si* $n > 3$, *il y a toujours dans* ζ *des solutions communes à une équation quadratique* $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ *et à une équation linéaire* $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ (*les coefficients de ces deux équations étant dans* ζ). En effet, en prenant φ pour une des variables, on peut supposer que la seconde équation se réduit à $x_n = 0$. On est ramené à montrer qu'une équation quadratique $f_2 + f_1 + f_0 = 0$ (f_i étant homogène de degré i) à $n - 1$ (> 3) variables $x_1, \ldots, x_{n-1}$ a toujours des solutions. Il suffit d'établir que $f_2 + f_1 + f_0 = 0$ a toujours des solutions où $x_1 = 0$. Or le nombre α des solutions de cette équation est toujours supérieur au nombre α' des solutions où $x_1 = 0$ qui sont celles de $f_2 = 0$ (*E.*, 44, 45). En regardant comme identiques celles des $\alpha - \alpha'$ solutions où $x_1 \neq 0$ qui sont formées de valeurs proportionnelles, et que l'on peut se faire $x_1 = 1$, on voit que $f_2 + f_1 + f_0 = 0$ a $\frac{\alpha - \alpha'}{q - 1}$ solutions.

vérifie les conditions

$$[\xi_1, \ldots, \xi_\nu, \ldots] = a(x_1, y_1, \ldots) - \lambda a(x_1, \ldots; \xi_1, \ldots) - \lambda^2 a(\xi_1, \eta_1, \ldots) = 0,$$
$$a(\xi_1, \ldots; \xi_\nu, \ldots) = a(x_1, \ldots; \xi_1, \ldots) - \lambda a(\xi_1, \eta_1, \ldots) = 1.$$

Donc A transforme $\lambda 10\ldots0$ en un point quelconque de q_λ.

Pour $p = 2$ *et* $n = 2\nu + 1$, les $\pi^{2\nu} - 1$ points de q_λ répondent biunivoquement aux $\pi^{2\nu} - 1$ points $x_1 \ldots y_\nu$ autres que $0 \ldots 0$, le point $x_1 \ldots y_\nu$ répondant au point de q_λ où $ex^2 \equiv \lambda - \Sigma_1^\nu x_i y_i$. D'ailleurs A permute les points de q_λ comme $G(2\nu, \pi)$ permute les points $x_1 \ldots y$ (I, **26**). *Ainsi* A *fixe les* π *points* ϖ_λ, *et chacun de ses* π *constituants parallèles* $A^{(\lambda)}$ *est semblable à* $G(2\nu, \pi)$. On peut donc négliger ce cas.

Soit maintenant $n = 2$, et $a = x_1 y_1$, x_1 et y_1 étant, si a est irréductible dans $\mathfrak{S}$, des fonctions linéaires conjuguées, à coefficients dans $\mathfrak{S}'$, des variables primitives x, y. Alors (I, **23**) $A = (m_{1\lambda}, t_1)$, r étant d'ordre $\pi - \theta$ ($\theta = 1$ ou -1 selon que a est réductible ou non dans $\mathfrak{S}$), $m_{1\lambda}$ a toujours au moins $\pi - 1$ cycles formés chacun des $\pi - \theta$ points d'un q_λ où $\lambda \neq 0$, et t_1 transforme chacun d'eux en son inverse. Si $\theta = 1$, les $2(\pi - 1)$ points de q_0 se partagent en deux cycles de $m_{1\lambda}$ formés, l'un des points $x_1 0$, où $x_1 \neq 0$, l'autre des points $0 y_1$ où $y_1 \neq 0$, et t_1 transforme chaque cycle en l'inverse de l'autre. Si $\theta = -1$, q_0 n'existe pas (*E.*, 44, 45). *Ainsi* $A^{(\lambda)}$ *est régulier diédral d'ordre* $2(\pi - 1)$ *si* $\theta = 1$ *et disparaît si* $\theta = -1$. $A^{(\lambda)}$ ($\lambda \neq 0$) *est un* g^{π}_{π} *transitif diédral : il est primitif toujours et seulement si* $\pi - \theta$ *est premier* [pour chaque diviseur e de $\pi - \theta = ee'$ où $e' > 1$, $A^{(\lambda)}$ a un g^{π}_{π} normal intransitif], *ce qui ne peut arriver que si* $p = 2$, *et encore faut-il alors que* K ($\pi = p^k$) *soit premier, si* $\theta = 1$, *et que* K *soit une puissance de* 2 *si* $\theta = -1$ (*cf. S.*, 36, 139)[1].

---

[1] Si a est réductible dans $\mathfrak{S}$, t_1 fixe les points $(h, h, \ldots, h, \ldots, h)$ de q_0 et ne fixe aucun point de q_N. Si a est irréductible dans $\mathfrak{S}$, $t_1, m_{1\lambda} = \begin{vmatrix} x_1 & qx_1 \\ y_1 & q^{-1}y \end{vmatrix}$ (*cf.* I, **25**), qu'il est plus commode de substituter à t_1, et dont la forme réelle est t_0, fixe les points $(x_1 = \lambda h, y_1 = \lambda h)$, $(x_1 = -\lambda h, y_1 = -\lambda h)$ et t_0 les points $(x = \pm h, y = \pm h)$ de q_0 et ne fixe aucun point de $q_{\lambda N}$. On voit donc que, *si* $p > 2$ (*alors* $\pi - \theta$ *est pair*), *les* $A^{(\lambda)}$ *où* $\lambda \neq 0$ *bien que semblables* (on va le voir) *ne fournissent pas tous la même représentation de* A (*cf. S.*, 54).

On sait d'ailleurs que, dans un diédral défini par des équations de la forme

Quel que soit n, si $p \neq 2$, D déplace tous les symboles. Donc, *pour* $p \neq 2$, *chaque* $A^{(\lambda)}$ *admet comme systèmes d'imprimitivité les systèmes d'intransitivité* (*de degré* 2) *de D dans* q_λ (*cf.* **17**, **21**, **22**).

La substitution γ de I, **24** fixe q_0 et permute circulairement : 1° pour n pair ou $p = 2$, les $\pi - 1$ q_λ où $\lambda \neq 0$; 2° pour n impair avec $p \neq 2$, d'une part les $\frac{1}{2}(\pi - 1)$ q_λ où λ est un carré ($\neq 0$), d'autre part les $\frac{1}{2}(\pi - 1)$ q_λ où λ est non carré. *Donc* : 1° *les* $A^{(\lambda)}$ *de même degré où* $\lambda \neq 0$ *sont semblables* ; 2° A' *et* A'' *ont des constituants transitifs de champ* q_0 (*qui disparaissent pour* $n = 2$, $\theta = -1$) ; 3° *pour* $p \neq 2$, A'' (*si n est impair* $A'' = A'_*$) *a deux autres constituants transitifs, l'une de degré* $\frac{1}{2}(\pi - 1)s_1$ *ayant pour champ l'ensemble des* q_λ *où* λ *est carré* ($\neq 0$), *l'autre de degré* $\frac{1}{2}(\pi - 1)s_2$ *ayant pour champ l'ensemble des* q_λ *où* λ *est non carré* : *pour* $p = 2$ *alors* $A'' = A'$, *ou pour* $p \neq 2$ *et n pair*, A' *a un constituant transitif de degré* $(\pi - 1)s$, *ayant pour champ l'ensemble des* q_λ *où* $\lambda \neq 0$.

Je désignerai par $A'^{(\lambda)}(n, \pi, a)$, $A''^{(\lambda)}(n, \pi, q)$ les constituants respectifs de A', A'' dont le champ contient q_λ. $A''^{(\lambda)}$ ne dépend que du caractère quadratique de λ ; si n est pair et $\lambda \neq 0$, $A'^{(\lambda)} = A'^{(1)}$. *Pour* $p \neq 2$, $A''^{(\lambda)}$ *est semblable à* $A'^{(\lambda)}$ *si n est pair* (on le voit comme pour les $A^{(\lambda)}$ où $\lambda \neq 0$), *mais non si n est impair* (leurs degrés sont alors différents).

Pour $p = 2$ *et* $n = 2\nu + 1$, $A'^{(0)}$ *est semblable à* $G'(2\nu, \pi)$. Considérons $A'^{(\lambda)}$ ($\lambda \neq 0$). Soit **G** l'action de A sur les q_λ où $\lambda \neq 0$, et g une $s_{\pi-1}^{(\pi-1)(\nu)}$ remplaçant chaque symbole $x_1, \ldots, y_\nu, t'$ de $A^{(\lambda)}$ par le symbole $t x_1, \ldots, t y_\nu, t'^{(-1)}$ de $A^{(\lambda^{-1})}$ (si une substitution de A remplace $x_1, \ldots, y_\nu x$ par $X_1, \ldots, Y_\nu X$, elle remplace $t x_1, \ldots, t y_\nu, t'^{(-1)}$ par $t' X_1, \ldots, t' Y_\nu, t' X$). Alors $A'^{(\lambda)}$ ($\lambda \neq 0$) *est semblable au produit direct de* **G** *par* $\{g\}$ (*cf. S.*, 58). On peut donc négliger ce cas.

Soit par exemple $n = 2$, et conservons les notations de I, **24**, **25**. Si $\theta = 1$, γ a dans q_0 un cycle commun avec m_0 et fixe les points $m y_\lambda$;

$a^m = b^2 = 1$, $bab = a^{-1}$, les g_λ non normaux, qui sont les $(ba)^\lambda$, forment deux systèmes conjugués si m est pair et un seul si m est impair (*cf.* 20). Donc (a, b) a au plus deux représentations distinctes relatives à ses g_λ. Elles sont semblables par l'automorphisme qui conserve a et remplace b par ba (et transforme l'une dans l'autre (*S.*, 54). *Les* $A^{(\lambda)}$ *où* $\lambda \neq 0$ *sont donc semblables*. On y le retrouvera ultérieurement au texte pour $n = 2$.

dans le champ des q_λ où $\lambda \neq 0$, γ et $m_{1\lambda}$ sont des $s_{\pi-1}^{\pi-1}$ régulières permutables, engendrant un $g_{(\pi-1)^2}$ régulier; d'ailleurs t_1 déplace les points de q_0 et ceux des q_λ. Donc $A'^{(0)} = A'^{(1)} = A'$, et $A''^{(1)} = A''^{(2)} = A''^{(N)} = A''$. Si $\theta = -1$, q_0 n'existe pas, et l'on peut supposer $\{\gamma\}$ cyclique d'ordre $\pi^2 - 1$ (I, **23**). Donc $A'^{(1)}$ coïncide alors avec A', et $A''^{(1)} = A''^{(N)} = A''$.

Quel que soit n, si $p \neq 2$, D déplace tous les symboles. Donc, *pour* $p \neq 2$, *chaque* $A_\lambda^{(\lambda)}$ *admet comme systèmes d'imprimitivité les systèmes d'intransitivité* (*de degré* 2) *de* D *dans son champ.*

Si $n \geq 4$, B *et par suite* A^0 *ont les mêmes systèmes d'intransitivité que* A. En effet, si $n > 4$, ou si $\psi = 0$, $m_{2\lambda}$ et t_2 fixent le point $1\lambda 0 \ldots 0$; donc $A = \{m_{2\lambda}, t_2\}B$ (si $p = 2$, $m_{2\lambda}$ est dans B) et B remplacent ce point par les mêmes points de q_λ. Si $n = 4$ et $\psi \neq 0$, on raisonne de même en remplaçant $m_{2\lambda}$ par un générateur du groupe Ψ de ψ. Je désignerai par $A^{0(\lambda)}$, $B^{(\lambda)}$, les constituants respectifs de A^0, B dans q_λ.

Si $n = 3$ (*donc* $p \neq 2$), $A^{0(\lambda)}$ *et* $B^{(\lambda)}$, *pour* $\lambda \neq 0$, *sont transitifs.* On le voit de même, car $A = \{t_\alpha, A^0\} = \{t_\alpha, m_{1\lambda} t_1\}B$ (t_α et $m_{1\lambda} t_1$ fixent $1\lambda 0$, et $m_{1\lambda} t_1$ est hors de B même si λ est non carré, puisque $m_{1\lambda} t_1$ est un des restes de A mod B). Considérons $A^{0(0)}$. D'après la forme générale des substitutions de A^0 indiquée précédemment (I, p. 366) [1], A^0 transforme 100 en tous les points $\left(\frac{\alpha^2}{\Delta}, -\frac{\alpha\gamma}{\Delta}, -\frac{\gamma^2}{\Delta}\right)$ où $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$ est $\neq 0$, α, β, γ, δ, Δ étant d'ailleurs quelconques. Les points de q_0 où $x = 0$ (donc $x_1 y_1 = 0$) s'obtiennent en faisant α ou γ nul. Ceux où $x \neq 0$ (donc $x_1 y_1 \neq 0$) sont $\left(x_1, -\frac{x_1^2}{y_1}, x\right)$ et s'obtiennent en faisant par exemple $\alpha = 1$, $\Delta = \frac{1}{x_1}$, $\gamma = -\frac{x}{x_1}$. *Donc* $A^{0(0)}$ *est un* g^{π^2-1} *transitif. Mais* $B^{(0)}$ *est intransitif.* Car les substitutions de B sont celles où $\Delta = 1$ et transforment par suite 100 en les points $(\alpha^2, -c\gamma^2,$

---

[1] Dans cette substitution générale, qui correspond à $\frac{\alpha\delta - \beta}{\gamma\delta - \delta}$, il faut changer partout les signes de δ et de γ : elle est égale à $t_{\alpha\ldots\alpha} V_{\alpha\ldots\alpha} \frac{\gamma}{\Delta} m_{1\frac{\gamma}{\Delta}}$ si $\gamma \neq 0$, et à $t_{\alpha\ldots\alpha} m_{1\frac{\Delta}{\alpha}} V_{\alpha\ldots\alpha} \frac{\alpha}{\Delta}$ si $\gamma = 0$. Il faut de même, à la page 366, changer le signe de λ dans les substitutions qui correspondent à $DV_{\alpha\ldots}$ et à $DU_{\alpha\ldots}$.

$-\alpha\gamma)$ au nombre de $\frac{\pi^2-1}{2}$ [il y en a $2\frac{\pi-1}{2}$ où $x=0$ et $2\left(\frac{\pi-1}{2}\right)^2$ où $x\neq 0$]. *Donc* $B^{(0)}$ *a un constituant transitif* $B'^{(0)}$ *de degré* $\frac{\pi^2-1}{2}$ *dont le champ* q'_0 *contient* 100; et comme B est normal dans A^0, $B^{(0)}$ *a un second constituant transitif* $B''^{(0)}$ *semblable au premier dont le champ* q''_0 *contient* N00. q'_0 *et* q''_0 *sont des systèmes d'imprimitivité de* $A^{0(0)}$ *de* $A^{0(0)}$ *et de* $A'^{(0)}$. Il est clair que $A^{0(0)}$ *et* $B^{(0)}$, *étant d'ordre* >2 sont respectivement isomorphes à A^0 (π, π) et B $(0, 2, \pi)$ (I, **40**) (¹).

Si $n=2$, A^0 *est le* g_π, *cyclique normal de* A. *Donc, si* $\theta=1$, $A^{0(0)}$ *est un* $g_{\pi-1}^{2(\pi-1)}$ *cyclique ayant deux cycles d'ordre* $\pi-1$, *et si* $\theta=-1$, $A^{0(0)}$ *disparaît.* $A^{0(\lambda)}$ $(\lambda\neq 0)$ *est un* $g_\pi^{-\theta}$ *cyclique régulier. Si* $p>2$, B *étant le diviseur d'indice* 2 *du* $g_{\pi-\theta}$ *cyclique* A^0, *chaque système d'intransitivité de* A^0 *se partage, dans* B, *en deux systèmes de degré moitié moindre. Si* $p=2$, $B=A^0$.

$A'^{(\lambda)}$, $A''^{(\lambda)}$, $A^{(\lambda)}$, $A^{0(\lambda)}$, $B^{(\lambda)}$ *sont respectivement isomorphes à* A', A'', A, A^0, B. On l'a vérifié pour $n\leqq 3$. Soit donc $n\geqq 4$. Il suffit de considérer A'. Or supposons que le p.g.c.d. $D^{(\lambda)}$ de $A'^{(\lambda)}$, A' soit >1. $D^{(\lambda)}$ est premier à I (I est semirégulier) et normal dans A'. D'ailleurs le p.g.c.d. $\Delta^{(\lambda)}$ de $D^{(\lambda)}$, A est >1, sans quoi $AD^{(\lambda)}$ serait produit direct, et $D^{(\lambda)}$ diviserait I (I, **39**). Donc, en exceptant le cas où $n=4$ avec $\pi=2$ et ψ réductible et le cas $n=\pi=3$, $\Delta^{(\lambda)}$ est $\geqq B$ (I, **40**, **47**) et B ne déplacerait pas tous les symboles. On verra au numéro sui-

(¹) Voici une autre démonstration. Il est aisé de vérifier directement que $A^{0(0)}$ et $B^{(0)}$ sont d'ordre >2. Ils sont donc respectivement isomorphes à $A^{0(0)}$ (π, π) et à B $(0, 2, \pi)$ (I, **40**). Soit Γ le constituant *transitif* de $A^{0(0)}$ dont le champ q_0 contient 100. On vérifie de même que Γ est d'ordre >2, donc isomorphe à A. On verra d'ailleurs (**18**) que le diviseur N de A qui fixe 100 est d'ordre π. Comme il contient $t_0=(x, -x)$ qui est hors de A^0, le diviseur N^0 de A^0 qui fixe 100 est d'ordre π ; N^0 est donc le p.p.c.m. des $U_{\alpha,\gamma}$. Le diviseur $N^{(0)}$ de Γ qui fixe 100 est donc d'ordre $\geqq\pi$. Donc Γ est de degré $\geqq\pi^2-1=s_0$. Donc $\Gamma=A^{0(0)}$ et $A^{0(0)}$ est *transitif*. *Mais* $B^{(0)}$, qui n'est pas représentable en $p^{\pi-\theta}$ (un ordre est $\frac{1}{2}\pi(\pi^2-1)$), *est intransitif*. D'ailleurs N^0, p.p.c.m. des $U_{\alpha,\gamma}$, divise $B=\sum N^0\beta_i$ (où $\frac{1}{2}(\pi^2-1)$) β_i remplaçant 100 par autant de points distincts. Donc $B^{(0)}$ a un système d'intransitivité de degré $\frac{1}{2}(\pi^2-1)$ contenant 100.

vant que, dans les cas exceptés, A'^{λ} est encore isomorphe à A'.

16. *Soit par exemple* $\pi = 2$, $n = 4$, *et d'abord* $\psi = 0$. $A = A'$ est ici un g_{72}^{1}, $B = A''$ un g_{36}^{1}, A'' un g_{72}^{2}, $A^{(1)}$ un g_{72}^{3}. L'ordre des variables étant x_1, y_1, x_2, y_2, rangeons les points $x_1 y_1 x_2 y_2$ de chaque q_i dans l'ordre lexicographique [1] en attribuant aux coordonnées les valeurs 0, 1 considérées comme appartenant au champ des nombres réels. Désignons dans cet ordre les points de q_0 par $a, b, c, d, e, f, g, h, i$, et ceux de q_1 par 0, 1, 2, 3, 4, 5. On aura, en introduisant quelques notations,

$$t_1 = cf.dg.eh.12, \qquad t_2 = ab.de.gh.45,$$
$$s_1 = V_{12} = bh.cd.ci.02.15.34, \qquad s_2 = V_{21} = ai.fh.ge.01.24.35,$$
$$s'_1 = t_1 s_1 t_1 = be.fg.hi.01.25.34, \qquad s'_2 = t_2 s_2 t_2 = ag.ce.di.02.14.35,$$
$$u = s_1 s_2 = ade.bfh.egi.045.132, \qquad u = t_2 s_1 s_2 t_2 = agf.bei.hdi.045.123.$$

B est (*cf.* I, **40**) le produit direct des $g_6(u, s_1) = (u, s_2)$, $(u', s'_1) = (u', s'_2)$, qui sont définis par $u^3 = s_1^2 = 1$, $s_1 u s_1 = u^2$; $u'^4 = s_2'^2 = 1$, $s_2' u s_2' = u'^2$. Chacun d'eux étant intransitif dans q_0, B'' *est imprimitif. Mais* $A^{(0)}$ *est primitif*, sans quoi, tout système d'imprimitivité étant de degré 3, le g_3^1 qui fixe a, fourni par l'action de (t_1, s_1, s_2) sur q_0 devrait avoir un système d'intransitivité de degré 2, tandis qu'il a les deux systèmes *behi*, *cdfg* (*cf.* **18**). $A^{(1)}$ *est imprimitif*, car il a le diviseur normal intransitif $(045, 123)$, action de (u, u') sur q_0. Il est clair que A'' *et* $A^{(1)}$ *sont isomorphes à* A.

Soit $\psi = x^2 + xy + y^2$ (*irréductible dans* Σ). Alors $A = A'$ est un g_{12}^{1}, isomorphe au g^1 symétrique. $B = A''$ un g_{6}^{1} isomorphe au g^2 alterné ou à $v(2, 4)$ (I, **40**), A'' un g_{12}, $A^{(1)}$ un g_{12}^{2}. En désignant par a, b, c, d, e et par 0, 1, ..., 9 respectivement les points de q_0 et q_1 rangés comme tout à l'heure dans l'ordre lexicographique, l'ordre

---

[1] Si k variables $x_1, \ldots, x_k$ (rangées dans cet ordre) prennent, dans le champ des nombres réels, des systèmes de valeurs $\xi_1^{\alpha}, \ldots, \xi_k^{\alpha}$; $\xi_1^{\beta}, \ldots, \xi_k^{\beta}$; ..., ces systèmes sont dits *rangés* dans l'ordre lexicographique si, le $\alpha^{\text{ième}}$ système étant $\xi_1^{\alpha}, \ldots, \xi_k^{\alpha}$, la première des différences $\xi_1^{\beta} - \xi_1^{\alpha}, \ldots, \xi_k^{\beta} - \xi_k^{\alpha}$ qui [illegible] a le signe de $\beta - \alpha$.

des variables étant x_1, y_1, x, y, et en introduisant encore quelques notations, on a

$$s_1 = t_1 = ab.36.47.58, \qquad s_2 = t_2 = cd.01.34.67,$$
$$V_{01} = bd.ce.03.25.68.79, \qquad V_{10} = ac.de.17.28.39.45,$$
$$s_2 = V_{10}t_1V_{10} = bc.15.24.69, \qquad s_4 = (V_{10}t_1)^2 = de.12.45.78$$

et $A = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ (car $V_{011} = t_1t_2V_{10}t_1t_2$. Les équations qui définissent A par les s_i ont été données ailleurs (*S.*, 69). A chaque substitution σ_0 de $A^{(0)}$ faisons correspondre la substitution σ_1 de $A^{(1)}$ telle que $\sigma_0\sigma_1$ soit dans A. Aux s_2^2 de $A^{(0)}$ répondent alors des s_2^2 de $A^{(1)}$. *Donc* $A^{(1)}$ *est la représentation primitive du* g^5 *symétrique en* g^{10} (*S.*, 53). $B^{(0)}$ *est le* g^5 *alterné, et* $B^{(1)}$ *la représentation du* g^5 *alterné en* g^{10} (*S.*, 53).

Soit encore $\pi = n = 3$ *avec* $\psi = x^2$. Alors $A' = A$ (I, **24**) est un g_{18}^{26} produit direct de A^0 par D (I, **39**); $A^0 = \zeta(2, 3)$ est un g_{24}^{26} et $B = \upsilon(2, 3)$ un g_{12}^{26} (I, **40**); $s_0 = 8$, $s_1 = 12$, $s_2 = 6$; $A^\lambda = A$, et $B^\lambda = B$ pour $\lambda \geq 0$. L'ordre des variables étant x_1, y_1, x, rangeons les points de chaque q_λ dans l'ordre lexicographique, en attribuant aux coordonnées les valeurs 0, 1, 2 considérées comme appartenant au champ des nombres réels, et désignons dans cet ordre ceux de q_0 par 0, 1, ..., 7, ceux de q_1 par a, b, ..., j, k, l, ceux de q_2 par α, β, γ, δ, ε, ζ. On a alors

$$d = \gamma = 01.25.37.46.ab.cf.de.gk.hj.il.\alpha\zeta.\beta\varepsilon.\gamma\delta,$$
$$t_1 = 02.15.36.47.cg.dh.ej.fk.\gamma\delta,$$
$$t_2 = 34.67.ab.cd.ef.gh.jk.\alpha\beta.\varepsilon\zeta,$$
$$m_{1,-1} = 01.25.36.47.ce.df.gj.hk.il.\alpha\varepsilon.\beta\zeta.\gamma\delta,$$
$$V_{012} = 243.567.aec.bdf.gih.jk.\alpha\gamma\delta.\beta\varepsilon\zeta,$$
$$t_{01}m_{1,-1} = 05.12.34.67.ab.ck.dj.eh.fg.il.\alpha\zeta.\beta\varepsilon.$$

On sait que $t_{01}m_{1,-1}$ est ici dans B (I, **39**). Le groupe $B^1 = \{B, t_1\}$ de I **48**, est ici le p.p.c.m. des substitutions paires de A. On vérifie que les $A^{(\lambda)}$ sont imprimitifs, et les systèmes d'intransitivité de B de degré 4.

17. Les symboles de $\mathfrak{A}$ et de $\mathfrak{A}'$ sont les $\frac{\pi^n - 1}{\pi - 1}$ droites de $\mathfrak{S}$ issues de $0 \ldots 0$, chacune de ces droites pouvant être remplacée par un quelconque de ses points dont on regardera les coordonnées comme homogènes.

Si donc $p > 2$, $\mathfrak{A}$ a trois systèmes d'intransitivité, le premier de degré $\frac{s_0}{\pi - 1}$ répondant à $a = 0$, le second de degré $\frac{s_1}{2}$ répondant à $a = \lambda^2$, le troisième de degré $\frac{s_N}{2}$ répondant à $a = N\lambda^2$.

Si $p = 2$, $\mathfrak{A}$ a deux systèmes d'intransitivité, le premier de degré $\frac{s_0}{\pi - 1}$ répondant à $a = 0$, le second de degré s_1 répondant à $a \neq 0$.

Je désignerai par $\mathfrak{A}^{(\lambda)}$ le constituant transitif de $\mathfrak{A}$ répondant à $a = \lambda$, et le champ de $\mathfrak{A}^{(\lambda)}$ par $\mathfrak{q}_{\lambda}$: pour une forme a donnée, $\mathfrak{A}^{(\lambda)}$ et $\mathfrak{q}_{\lambda}$ ne dépendent que du caractère quadratique de λ.

Pour $p > 2$, $\mathfrak{A}^{(\lambda)}$ est semblable à $\mathfrak{A}^{(\lambda')}$ si n est pair (on le voit comme pour les $\mathfrak{A}^{(\lambda)}$ où $\lambda \neq 0$), *mais non si n est impair* (leurs degrés sont alors différents).

Je désignerai par $\mathfrak{A}^{0(\lambda)}$ et $\mathfrak{B}^{(\lambda)}$ les constituants respectifs de $\mathfrak{A}^0$ et $\mathfrak{B}$ de champ $\mathfrak{q}_{\lambda}$.

Si n est impair $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$. Si alors $p = 2$, $\mathfrak{A}^0$ est semblable à $\mathfrak{G}(2\nu, \pi)$, et $\mathfrak{A}^1$ à $\mathfrak{G}(2\nu, \pi)$ (**I, 26**). On peut donc négliger ce cas.

Si n est pair, $\mathfrak{A}'$ a le système d'intransitivité $\mathfrak{q}_0$ et un seul autre système formé de $\mathfrak{q}_1$ et $\mathfrak{q}_N$.

Je désignerai de même par $\mathfrak{A}'^{(\lambda)}$ le constituant transitif de $\mathfrak{A}'$ répondant à $a = \lambda$.

Pour $n = 2$, en conservant les notations du n° **15**, et en posant $\frac{x_1}{x_2} = z_1$, on a (**I, 24**) $\mathfrak{A}' = (rz_1, z_1^{\pi})$, r étant d'ordre $\pi - \delta$, où (si $\delta = 1$, $z_1 = x_1^{\pi}$) est une puissance de r.

$$rz_1 = (1, r, \ldots, r^{\pi-2}) \mod (x_1),$$

$$z_1^{\pi} = (1, r, r^{\pi-1}) \mod (x_1^{\frac{\pi-\delta}{2}}),$$

(i parcourt les entiers ≥ 1 et $\frac{\pi - \delta}{2}$),

z_1^{π} transformant rz_1 en $r^{\pi-1}z_1$, $\mathfrak{A}^0 = (r^2 z_1, z_1^{\pi})$, $\mathfrak{A}^0 = (r^2 z_1)$, $\mathfrak{B} = (r^{\pi-1} z_1)$.

Si $p > 2$, $\pi - \theta$ est pair $= 2\mu$, et l'on a

$$r^2 z_1 = (1, r^2, \ldots, r^{2\mu-2})(r, r^3, \ldots, r^{2\mu-1})(0\infty),$$

$$z_1^{-1} = (1)(r^{\mu})(r^i, r^{-i})(0\infty)^{\frac{1+\theta}{2}} \qquad (i = 1, \ldots, \mu - 1).$$

Donc $\mathcal{A}'^{(0)} = \mathcal{A}^{(0)} = \left\{(0\infty)^{\frac{1+\theta}{2}}\right\}$, et $\mathcal{A}^{0(0)} = \mathcal{B}^{(0)} = 1$. $\mathcal{A}'^{(1)}$ est l'action de $\mathcal{A}'$ sur les r^k. $\mathcal{A}^{(1)}$, $\mathcal{A}^{0(1)}$, $\mathcal{B}^{(1)}$ sont les actions de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^0$, $\mathcal{B}$ sur les r^{2k}, et $\mathcal{A}^{(N)}$, $\mathcal{A}^{0(N)}$, $\mathcal{B}^{(N)}$ [semblables à $\mathcal{A}^{(1)}$, $\mathcal{A}^{0(1)}$, $\mathcal{B}^{(1)}$ (1)] leurs actions sur les r^{2k+1}. $\mathcal{A}'^{(1)}$ *est un* $g_{4\mu}^{2\mu}$ *diédral isomorphe à* $\mathcal{A}'$, *transitif et imprimitif* (son diviseur normal $\{r^2 z_1\}$ est intransitif). $\mathcal{A}^{(\lambda)}$ $(\lambda \neq 0)$ *est un* $g_{2\mu}^{\mu}$ *diédral isomorphe à* $\mathcal{A}$ *et transitif.* $\mathcal{A}^{(\lambda)}$, *évidemment primitif si* μ *est premier, est imprimitif si* μ *est composé* (son g_{μ}^{μ} cyclique normal a alors au moins un diviseur intransitif). $\mathcal{A}^{0(\lambda)}$ $(\lambda \neq 0)$ *est un* g_{μ}^{μ} *cyclique régulier isomorphe à* $\mathcal{A}^0$. $\mathcal{B}^{(\lambda)}$ $(\lambda \neq 0)$ *est isomorphe à* $\mathcal{B}$. *Si* μ *est impair,* $\mathcal{B}^{(\lambda)} = \mathcal{A}^{0(\lambda)}$. *Si* μ *est pair,* $\mathcal{B}^{(\lambda)}$ *est un* g_{μ}^{μ} *cyclique ayant deux cycles de degré* $\frac{\mu}{2}$.

Si $p = 2$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$, *et* $\mathcal{B} = \mathcal{A}^0$. $\mathcal{A}^{(0)} = \left\{(0\infty)^{\frac{1+\theta}{2}}\right\}$, $\mathcal{B}^{(0)} = 1$. $\mathcal{A}^{(\lambda)}$ $(\lambda \neq 0)$ *est l'action de* $\mathcal{A}$ *sur les* r^k ; *c'est un* $g_{\pi-\theta}^{\pi-\theta}$ *diédral transitif semblable à* $A^{(\lambda)}$ (*cf.* **15**). $\mathcal{B}^{(\lambda)}$ $(\lambda \neq 0)$ *est, comme* $A^{0(\lambda)}$, *un* $g_{\pi-\theta}$ *cyclique régulier.*

Pour $n > 2$, $\mathcal{B}$ *a les mêmes systèmes d'intransitivité que* $\mathcal{A}$. On le démontre pour $n > 3$ comme le théorème analogue relatif à B et à A (**15**). Pour $n = 3$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}^0 = \{m_{1N}\}\mathcal{B} = \{m_{1\lambda} t_1\}\mathcal{B}$ (**15** ; I, **40**). Or, m_{1N} fixe 100 (les variables sont ici homogènes), et $m_{1\lambda} t_1$ fixe $1\lambda 0$. Donc $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ remplacent 100 et $1\lambda 0$ par les mêmes points de $\mathfrak{q}_0$ et $\mathfrak{q}_\lambda$ respectivement. Donc $\mathcal{B}$ a un constituant transitif de chacun des degrés $\frac{1}{2}(\pi^2 \pm \pi)$.

Pour $n > 2$, *en exceptant le cas* $n = \pi = 3$, $\mathcal{A}'^{(\lambda)}$, $\mathcal{A}^{(\lambda)}$, $\mathcal{A}^{0(\lambda)}$, $\mathcal{B}^{(\lambda)}$ *sont respectivement isomorphes à* $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^0$, $\mathcal{B}$. Il suffit de considérer $\mathcal{A}'$. Or, supposons que le p.g.c.d. $\mathfrak{D}^{\lambda}$ de $\mathcal{A}'^{(\lambda)}$, $\mathcal{A}'$ soit > 1. Le diviseur correspondant D^{λ} de A' n'est pas $\geqq 1$. D'ailleurs, le p.g.c.d. Δ^{λ}

(1) D'après ce qui a été observé au sujet de $A^{(\lambda)}$ $(\lambda, \pi - \lambda)$, $\mathcal{A}^{(1)}$ et $\mathcal{A}^{(N)}$ fournissent la même représentation de $\mathcal{A}$ toujours et seulement si μ est impair [alors $(r^2 z_1)(z_1^{-1})$ fixe $r^{\mu-1}$ et $r^{2\mu-1}$].

de D^{λ}, A est > 1, sans quoi AD^{λ} serait produit direct, et D^{λ} serait $\leqq I$ (I, **40**). Donc Δ^{λ} est $\leqq B$, sauf peut-être si $n = 4$ avec $\pi = 3$, ψ étant irréductible, ou si $n = \pi = 3$. Le cas où $n = 4$ et $\pi = 2$ (alors $\mathcal{A}' = \mathcal{A} = A$) a été étudié (**16**). Dans le cas où $n = 4$ et $\pi = 3$, si $\Delta^{(\lambda)}$ ne contient pas B, il contient F (I, **40**). Donc $\mathfrak{D}^{(\lambda)}$ contient $\mathfrak{F}$ dont la substitution R_{121} (I, **28**) déplace tous les symboles.

Soit $n = \pi = 3$ et $\psi = x^2$. Alors $\mathcal{A}' = \mathcal{A} = A^0$ est un g_{24}^{13} isomorphe à $\mathfrak{L}(2, 3)$ et $\mathfrak{B}$ un g_{12}^{13} isomorphe à $\mathfrak{O}(2, \pi)$ (I, **40**). Les degrés respectifs de $\mathcal{A}^{(0)}$, $\mathcal{A}^{(1)}$, $\mathcal{A}^{(2)}$ ou de $\mathfrak{B}^{(0)}$, $\mathfrak{B}^{(1)}$, $\mathfrak{B}^{(2)}$ sont 4, 6 et 3. Les droites issues de 000 peuvent être identifiées chacune avec le premier des points de A (rangés dans l'ordre adopté au n° **16**) situés sur elle. Avec les notations du n° **16**, les symboles de $\mathfrak{q}_0$ sont alors 0, 2, 3, 4, ceux de $\mathfrak{q}_1$ a, c, d, g, h, i, ceux de $\mathfrak{q}_2$ α, β, γ, et l'on a

$$d = \gamma = 1, \qquad t_1 = 02.34.cg.dh, \qquad t_0 = 34.cd.gh.\alpha\beta,$$
$$m_{1,-1} = t_1 d = \mathfrak{C}, \qquad V_{1,2} = 243.adc.gih.\alpha\gamma\beta.$$

Donc $\mathcal{A}^{(0)}$ est un g_{24}^{3}, $\mathcal{A}^{(1)}$ un g_{24}^{3} imprimitif, $\mathcal{A}^{(2)}$ un g_{6}^{3}, $\mathfrak{B}^{(0)}$ un g_{12}^{3} [B contient $t_{01} m_{1,-1} = t_1 d$ (I, **52**)], $\mathfrak{B}^{(1)}$ un g_{12}^{6}, $\mathfrak{B}^{(2)}$ un g_{3}^{3}.

Dans la désignation des constituants de A, A′, A″, A^0, B, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}^0$, $\mathfrak{B}$, je continuerai à remplacer les lettres A, B, $\mathcal{A}$, $\mathfrak{B}$ par Q, R, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{R}$, pour préciser que a a la forme $\Sigma_1^n x_i y_i + \psi$.

18. Excluons désormais les cas $n = 2$ et $n = \pi = 3$, déjà traités.

Soit $X_0 = X$ le diviseur de A, d'ordre $(A, 1) : s_0$ qui fixe 10...0, et $X_0^{(\lambda)} = X^{(\lambda)}$ son constituant de champ q_λ. Les substitutions de X ont, d'après les formules (4) et (5) de I, **26**, des matrices de la forme M indiquée au n° **3**, où les éléments dont les deux indices sont $\neq 1$ forment une matrice quelconque M_1 du groupe A_1 de $a - x_1 y_1$ [je désignerai par A_1, A_1'', A_1^0, B_1, A_1^{λ}, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_1^{\lambda}$, $\mathcal{A}_1^{0(\lambda)}$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_1^{\lambda}$ les groupes déduits de A_1 comme A′, A″, A^0, B, $A^{(\lambda)}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^{(\lambda)}$, $\mathcal{A}^{0(\lambda)}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}^{(\lambda)}$ de A (A_1 ne divise pas A'_1)], et où l'on peut prendre arbitrairement, ou bien les α_{j1}, β_{j1}, où $j \neq 1$ [alors les formules (8), (4), (6) de I, **26** déterminent explicitement α'_{11} et les α_{1j}, α'_{1j} où $j \neq 1$ par les autres coefficients de α], ou bien les α_{1j}, α_{1j} où $j \neq 1$ [alors les formules (18), (16), (15) de I, **26** déterminent explicitement α'_{11} et les α'_{j1}, β'_{j1} par les autres coefficients de α]. Donc $(X, A_1) = \pi^{n-2}$.

Les matrices de P (I, **42**) *sont celles des matrices* M *ou* $M_1 = 1$. P *est premier à* A_1 *et normal dans* $X = A_1 P = P A_1$ (*cf.*, **5**). P *est même caractéristique* (*E.*, 117) *dans* X, car les g_{p^2} sylowiens de A_1 n'ont aucun diviseur commun (I, **47**, **40**).

Comme $m_{11}^{\frac{1}{2}}\gamma$ fixe $10\ldots0$ et est d'ordre (A', A) mod A (γ est permutable à m_{11}, les diviseurs de A', A'' qui fixent $10\ldots0$ sont respectivement $X' = (X, m_{11}^{\frac{1}{2}}\gamma)$ et, si n est pair, $X'' = (X, m_{11}^{\frac{1}{2}}\gamma^2)$ (si n est impair, $A' = A''$, et $X' = X''$) : $m_{11}^{\frac{1}{2}}\gamma$ est permutable à A, et à P, et $(X', X) = (A', A)$, $(X'', X) = (A'', A)$.

X remplace le point $0y_1 0\ldots0$ ($y_1 \neq 0$) de q_0 par les π^{n-1} points $(\alpha'_{11}y_1, y_1, \alpha'_{21}y_1, \beta'_{21}y_1, \ldots)$ ($\alpha_{21}, \beta_{21}, \ldots$ étant arbitraires), *d'où* $\pi - 1$ *systèmes d'intransitivité* q_0^{ν} *de* X (*ou de* P) *de degré* π^{n-2} [*et, dans* X', *un seul système de degré* $\pi^{n-2}(\pi - 1)$]. *Les constituants de* X *dans les champs* q_0^{ν} *sont parallèles* (*cf.*, **5**). En exceptant les deux cas $n = 4$ avec $\theta = -1$ et $n = 3$, X remplace le point $00 1 0\ldots0$ de q_0 par les points $(\alpha_{12}, 0, \alpha_{22}, \beta_{22}, \ldots)$ (α_{12} pouvant être pris arbitrairement, et $\alpha_{22}, \beta_{22}, \ldots$ pouvant prendre $s_{0,n-2}$ systèmes de valeurs) *d'où un* $\pi^{\text{ième}}$ *système* q_0^{ν} *de degré* $\pi s_{0,n-2}$: comme $s_{0,n-2}$ s'annule dans les deux cas exceptés, on peut, dans ces deux cas, introduire un $\pi^{\text{ième}}$ système fictif q_0^{ν} de degré $\pi s_{0,n-2}$. *Donc* X (*ou* X') *qui fixe évidemment les* $\pi - 1$ *points* $x_1 0\ldots0$ ($x_1 \neq 0$) *de* q_0, *n'en fixe pas d'autres.* Chaque substitution de P déplaçant les points $0y_1 0\ldots0$ fixés par A_1^{ν}, l'action de P sur q_0 est isomorphe à P et première à $A_1^{(0)} = A_1$. *Donc* $X^{(0)} = X$.

On voit que A^{ν} *et* A'^{ν} *sont imprimitifs si* $\pi > 1$ (*des deux cas* $n = 2$ *et* $n = \pi = 3$, *ici exclus et déjà traités, le premier seul présente quelques exceptions*). Alors X a, dans A, un normalisant $> X$, car toute substitution de A qui transforme un des points $x_1 0\ldots0$ en un autre est évidemment permutable à X.

Si $\pi = 2$ (*alors n est pair*), A^{ν} *n'est qu'une fois transitif* (*sauf si* $n = 4$ *avec* $\theta = -1$ *auquel cas* A^{ν} *est le* g_{128} (**16**), car X est intransitif. *Mais* $A^{\nu}(n, 2)$ *est toujours primitif.* En effet, soit $\pi' > 1$ le degré d'un système d'imprimitivité de A^{ν}, et $s_m = m^{\frac{n}{2}}$ ($m > 1$) X, fixant un symbole, doit fixer le système d'imprimitivité dont fait partie ce symbole. Ce système étant donc formé de certains systèmes d'intransitivité de X, π' a la forme $2s_1 + 2s_2 + \ldots + 2s_k$ ($k \geq 1$

$(\alpha, \beta \geqq 0)$. On a donc, en posant $2^{\nu-1} = z \geqq 2$,

$$m[(\alpha+\beta)z^2 + \theta\beta z - 2\beta - 1] = 2z^2 + \theta z - 1.$$

Donc m est impair et, par suite, $\geqq 3$. Or, pour $\alpha = 0$ (et *a fortiori* pour $\alpha > 0$), cela entraîne $\beta = 0$; et pour $\beta = 0$, $\alpha = 1$ (donc *a fortiori* pour $\alpha > 1$) cela entraîne $z^2 \leqq \theta z - 4$, donc $z^2 < \theta z$, ce qui ne se peut.

Si $\pi = 2$, $B^{(0)}$ *est primitif sauf si* $n = 4$ *avec* $\theta = -1$ [*il est alors imprimitif* (**16**)]. En effet, pour $n = 4$ avec $\theta = -1$, $B^{(0)}$ est le g^2_{66} (**16**). Soit donc $n \geqq 6$, et désignons par Y le diviseur de B qui fixe 10...0. Comme la substitution $t = t_3$ ou t_0 fixe les points $0y_1 0 \ldots 0$ et $0010\ldots0$, Y et $X = \{t\}$ Y remplacent ces points par les mêmes points de q_0. Ils ont donc les mêmes systèmes d'intransitivité, et le raisonnement fait pour $A^{(0)}$ (s'applique à $B^{(0)}$.

19. Supposons $\pi = 2$. Alors, pour $\theta = \pm 1$, $Q(n, 2)$ divise $G(n, 2)$ (I, **26**), et $(G, Q) = s_0 - 1$. Pour $\theta = -1$ (alors $\frac{1}{2} = x^2 + xy + y^2$), on a $\nu' = \nu + 1$, $n = 2\nu'$, et l'on assimile ici $x_{\nu'}$, $y_{\nu'}$, de $G(n, 2)$ à x, y de $Q_2(n, 2)$ dont on ne considère que la forme réelle. Il sera donc commode de modifier un peu les notations relatives à $Q_0(n, 2)$ et de poser aussi pour $\theta = 1$, $\nu' = \nu + 1$, $x_{\nu'} = x$, $y_{\nu'} = y$.

$G(n, 2)$ $(n > 2)$ [1], *admet une représentation transitive* **G** *en* $g^{\nu+1}$ *relative à* $Q(n, 2)$ $(\theta = \pm 1)$. Pour $n > 4$ cela résulte de ce que G est simple (I, **21**). Pour $n = 4$, cela résulte de ce que ni Q_2 ni R_2 n'est normal dans G ($v_1 V_{10} v_1$ altère a), en sorte que G est alors représentable en g^6_{720} relativement à Q_2 (*cf.* I, **22**), et par suite en g^{10}_{720} relativement à Q_0 (*cf.* S., 81). *Pour* $n = 2$, $G = Q_2$ *est un* g^2_6, *et* $Q_0 = \{t_1\}$ *un* g^2_2.

Le diviseur **Q** *de* **G** *qui correspond à* Q *de* G *est semblable à* $Q^{(0)}$ (**G** *est donc deux fois transitif*). En effet, soit $G = \Sigma^{\alpha} Q\alpha$ $(\alpha_0 = 1)$, et désignons par C_i le transformé du couple C_0 des quadriques q_0, q_1 par α_i. Le groupe conservant C_i est $\alpha_i^{-1} Q \alpha_i$, et les C_i sont tous distincts, sans quoi $\alpha_i \alpha_k^{-1}$ serait dans Q pour deux valeurs différentes

---

[1] Pour $n = 2$, $G = Q_2 = \{m_{0,1}^{-1} u_1 v_1, t_0 = u_1\}$ est un g^2_2, $Q_0 = \{t_1\}$ un g^2_2, et $G = Q_0 R_2 = Q_2 R_0$, Q_0 étant premier à R_2, et Q_0 à $R_2 = 1$.

de i, k. Il suffit de montrer qu'on peut déterminer les α de manière que les C_i où $i \neq 0$ soient, en désignant par $\varpi = (\xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_{\nu'}, \eta_{\nu'})$ $(\xi_\nu = \xi, \eta_{\nu'} = \eta)$ un point paramétrique et en posant

$$b^{(\varpi)} = \Sigma_0^\nu (\xi_i x_i + \eta_i y_i) = \Sigma_0^\nu (\xi_i x_i^2 + \eta_i y_i^2),$$

les s_0 couples $C^{(\varpi)}$ définis par $a^{(\varpi)} = a + b^{(\varpi)} = \lambda$ $(\lambda = 0, 1)$ *où* ϖ *parcourt* q_0. Car toute substitution α *de* Q, opérant sur $\xi, \ldots$ [*quand on l'applique à* $x_1, \ldots$ $(x_{\nu'} = x, y_{\nu'} = y)$ *de* $a^{(\varpi)}$ *ou, ce qui revient au même, de* $b^{(\varpi)}$] comme sa transposée α sur $x_1, \ldots$, permute les $C^{(\varpi)}$ comme $\bar{\alpha}$ permute les ϖ, et $\bar{\alpha}$ parcourt Q en même temps que α (I, **26**). Or donnons à $V_{i\nu'}$, $V_{\nu i}$, $U_{i\nu}$, $W_{i\nu}$, u_ν, $v_{\nu 1}$, $t_{\nu 1}$ leur sens relatif à G ou Q_0, à V_{0k}, V_{k0}, U_{0k}, W_{0k}, u_0, t_0 leur sens relatif à Q_2 (donc $u_0 = v_\nu$, $t_0 = u_{\nu'}$), et désignons par ϖ_0, ϖ_1, ϖ_2 les déterminations $0\ldots0$, $0\ldots010$, $0\ldots01$ de ϖ.

Soit d'abord $\theta = 1$. V_{0k}, V_{k0}, U_{0k}, W_{0k} opèrent sur ϖ les substitutions respectives $\begin{vmatrix} \xi_k, & \xi_k + \eta_k + \xi + 1 \\ \eta_k, & \eta + \eta_k \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \eta_k, & \xi_k + \eta_k + \eta + 1 \\ \xi, & \xi + \xi_k \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \eta_k, & \xi_k + \eta_k + \xi + 1 \\ \eta, & \eta + \xi_k \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \xi_k & \xi_k + \eta_k + \eta + 1 \\ \xi & \xi + \eta_k \end{vmatrix}$. On voit directement que ces substitutions permutent entre eux les points du système formé de q_0 et de ϖ_0. Il reste à vérifier que leur p. p. c. m. les permute transitivement. Or les substitutions du p. p. c. m. des V_{0k}, U_{0k}, qui laissent ξ inaltéré, transforment ϖ_0 et ϖ_1 en des points ϖ où $\xi_1, \ldots, \eta_\nu$ sont arbitraires. De même les substitutions du p. p. c. m. des V_{k0}, W_{0k}, qui laissent η inaltéré, transforment ϖ_0 et ϖ_2 en des points ϖ où $\xi_\nu, \ldots, \eta_\nu$ sont arbitraires. D'ailleurs $V_{01} U_{01} V_{01} = t_{01}$ et $V_{10} W_{01} V_{10} = u_0 t_1$ (*cf.* I, (**26**)) transforment ϖ_0 en ϖ_1 et ϖ_2 respectivement, et si l'une des coordonnées ξ, η d'un point ϖ de q_0 est $\neq 0$, la seconde est déterminée par l'autre et $\xi_1, \ldots, \eta_\nu$. Les points ϖ de q_0 où $\xi = \eta = 0$ sont les transformés de ϖ_0 par $V_{01} Q_0$ (2v, 2).

Soit maintenant $\theta = -1$. $V_{\nu k}$, $V_{k\nu}$, $U_{k\nu}$, $W_{k\nu}$ opèrent sur ϖ les substitutions respectives $\begin{vmatrix} \xi_k, & \xi_k + \xi + 1 \\ \eta_k, & \eta + \eta_k \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \eta_k, & \eta_k + \eta + 1 \\ \xi, & \xi + \xi_k \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \eta_k, & \eta_k + \xi + 1 \\ \eta, & \eta + \xi_k \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \xi_k, & \xi_k + \eta + 1 \\ \xi, & \xi + \eta_k \end{vmatrix}$ qui permutent entre eux les points de q_0 et ϖ_0. Le p. p. c. m. des $V_{\nu k}$, $U_{k\nu}$, qui laissent ξ inaltéré, transforme ϖ_0 en des points ϖ où $\xi_1, \ldots, \eta_\nu$ sont arbitraires, la

coordonnée η_i étant déterminée par les autres. A l'aide des $V_{k\nu}$, $W_{k\nu}$ on obtient de même tous les points ϖ de q_0 où $\eta_i = 0$. Les points ϖ de q_0 où $\xi = \eta_i = 1$ s'obtiennent par $V_{\nu 1} V_{1\nu} t_{01} Q_1 (2\nu, 2)$.

Il résulte de la démonstration précédente que $G = Q_0 R_2 = Q_2 R_0$ (*S.*, 28, 55). *Je dis que le p. g. c. d.* Δ *de* Q_0, R_2 *et celui* Δ' *de* Q_2, R_0 *coïncident* (¹). Tout d'abord Δ et Δ' contiennent évidemment $R_0(2\nu, 2)$ et les substitutions (*cf.* I, **31**).

$$P_k = V_{k1} U_{1k} \ldots V_{k0} U_{0k} \quad \left| \begin{array}{l} \eta_k \quad \eta_k + y_k - x - y \\ x \quad x + y_k \\ y \quad y - y_k \end{array} \right| .$$

$$Q_k = t_k P_k t_k = V_{1k} W_{1k} \ldots V_{0k} W_{0k} = \left| \begin{array}{l} y_k \quad \eta_k + y_k - x - y \\ x \quad x + \eta_k \\ y \quad y + \eta_k \end{array} \right| .$$

D'après les formules (7-8) et (15-19) de I, **26**, toute substitution α de Δ ou Δ', donc commune à Q_0 et Q_2 et appartenant à R_0 ou R_2 vérifie les relations

$$(E) \quad \begin{cases} \alpha_{i0} = \beta_{0i}, & \alpha'_{0i} = \beta'_{i0} \ (i \neq 0), & \alpha'^2_{i0} + \beta'^2_{i0} = 1, \\ \alpha_{i0} = \alpha'_{i0}, & \beta_{i0} = \beta'_{i0} \ (i \neq 0), & \alpha'^2_{i0} + \alpha'_{i0} - \beta'^2_{i0} + \beta'_{i0} = 1. \end{cases}$$

D'après (7) de I, **26**, le nombre des couples α_{i0}, β_{i0} $(i \neq 0)$ où $\alpha_{i0} = \beta_{i0} = 1$ est pair. S'il est > 0, on peut, en multipliant α à

(¹) D'après les relations $V_{k0} V_{0k} = 1$, $U_{k1} U_{1k} = u_k$, $t_k = v_k u_k v_k$, $G = (R_0, R_2)$. Mais $R_0 R_2$ n'est pas un groupe. Car ce groupe serait G (*E.*, 67), et le p. g. c. d. de R_0, R_2 serait d'indice 2 dans Δ; or on va voir qu'il coïncide avec Δ. De même, en désignant par P le p. p. c. m. de (u_k, v_k) $(k = 1, \ldots, \nu)$ qui est leur produit direct, d'ordre 6^ν (u_k, v_k $= 1$ $(\nu \geq 0)$ (*S.*, 83), $G = (R_0, P)$ $(\nu = 0, 2)$. Mais $R_0 P$ n'est pas un groupe. Car le p. g. c. d. X_i de R_0, P devrait être d'ordre $\frac{3^\nu}{2^{\nu'} + 6} > 1$. Or aucune substitution de (u_k, v_k) ne conserve η_i. Donc X_i ne peut être > 1 que si $i = 0$, $\delta = 1$, et alors il serait (u_k, v_k), dont l'ordre 6 ne divise pas 3^ν.

(²) On remarque les relations $(P_k O_k)^3 = 1$, $O_k P_k = P_k O_k^2$, $P_k t_k = t_k P_k$, $Q_k t_k = t_k Q_k$ et $P_k O_k P_k = t_k t_k$.

droite par des V_{ik} où i et k sont $\neq 0$, annuler tous les α_{i0} sauf un tel que α_{h0}. Donc $\beta_{h0} = 0$, et en multipliant α à droite par des P_k, O_k, on peut annuler tous les $\alpha_{i0} = \alpha_{i0}$, $\beta_{i0} = \beta'_{i0}$ où $i \neq 0$. Alors, d'après (4)-(8) de I, **26**, α est dans $R(2\nu, 2)$ ou dans $R(2\nu, 2)t_{\nu'}$, donc dans $R(2\nu, 2)$ (elle est dans R_0 ou R_2). *Donc* $\Delta = \Delta'$ *est le p. p. c. m. de* $R_0(2\nu, 2)$ *et des* P_k, O_k, *et le p. g. c. d. de* R_0, R_2. Comme $G = Q_0 Q_2$, *le p. g. c. d. de* Q_0, Q_2 *est* $\Gamma = \{\Delta, t_1\} = \{\Delta, t_\nu\}$ (puisque Δ contient $t_{k\nu'} = P_k O_k P_k$), *produit direct de* Δ *par* $\{t_{\nu'}\}$.

Δ est isomorphe à $G(2\nu, 2)$. En effet, ils sont du même ordre, et $R_0(2\nu, 2)$ divise $G(2\nu, 2)$. De plus P_k et O_k se réduisent à u_k, v_k quand on y néglige x et y, et, d'après (E), toutes les fois qu'on multiplie à gauche une α de Δ par P_k ou O_k, l'effet sur la matrice des α_{ik}, α'_{ik}, β_{ik}, β'_{ik} où i, k sont $\neq 0$ est le même qu'en multipliant par u_k ou v_k [1]. *On retrouve donc ainsi que* $G = Q_0 R_2 = Q_2 R_0$ (*E.*, 67).

Désignons par $q'_{in} = q'_i$, $s'_{in} = s'_i$, $\mathbf{G}_i$, $\mathbf{Q}_i$, $\mathbf{R}_i$, ce que deviennent q_i, s_i, $\mathbf{G}$, $\mathbf{Q}$, pour $Q = Q_i$. Comme $G = Q_i R_i$ ($i \neq k$), *les diviseurs* $\mathbf{Q}_{ki}$, $\mathbf{R}_{ki}$ *de* $\mathbf{G}_i$ *qui correspondent à* Q_k, R_k *de* G *sont des représentations de ces groupes en* g^{q_i+1} *transitifs relativement à* Γ, Δ *respectivement* (*S.*, 28, 55). *On vient de voir que* Q_i *est semblable à* Q_i^*. *De même* $\mathbf{Q}_{ki}$ *et* $\mathbf{R}_{ki}$ *sont respectivement semblables à* Q_k^1, R_k^1 ($s_n = 1 = s_i$). Car on verra (**22**) que les diviseurs X_k, Y_k de Q_k, R_k qui fixent un symbole de q_1^k sont Δ et $\Delta\{t_\nu\}$ si $k = 0$ (il faut ici transformer la forme ψ du n° **22** par u_ν, $u_\nu \Delta u_\nu$ et son produit direct par $v_\nu = u_\nu t_\nu t_\nu u_{\nu'}$), si $k = 2$ (*cf. S.*, 54).

Soient Γ_k, Δ_k *les diviseurs de* $\mathbf{Q}_{ki}$ *qui correspondent à* Γ, Δ *de* Q_k (*ce sont les diviseurs fixant un symbole dans* $\mathbf{G}_{ki}$, $\mathbf{R}_{ki}$ *respectivement*). *On verra* (**22**) *que* Γ_k, Δ_k *ne fixent qu'un point du champ, et que* Δ_k *a deux constituants transitifs, l'un de degré* $2^{\nu} - 1$, *semblable*

---

[1] Plus directement Δ contient toujours une α et une seule où la matrice M des coefficients dont les deux indices sont $\neq 0$ est une matrice donnée de $G(2\nu, 2)$. En effet les α_{00}, α_{0i}, β_{0i}, β_{i0}, α_{i0}, α_{i0}, β_{i0}, β'_{i0} où $i \neq 0$ sont complètement déterminés par M et (E) d'après les formules (4)-(8) et (13)-(19) de I, **26**. D'ailleurs, α étant dans R_0, on a $I_\alpha = \nu + 1$ (I, **37**) ce qui détermine $\alpha_{00}\beta_{00}$ et par suite α_{00}, β_{00}, α_{00}, et β'_{00} d'après (E).

à $G(2\nu, 2)$, *qui lui est commun avec* Γ_i, *l'autre de degré* $2(s_{0,2\nu}+1) = 2s_{1,2\nu}^{k,1}$ *semblable à la représentation de* $G(2\nu, 2)$ *relative à* $R_i(2\nu, 2)$.

Ainsi pour $n=6$, $\pi=2$, $\mathbf{G}_0$ est un $g_{1440\,1520}^{36}$ deux fois transitif, $\mathbf{Q}_0$, semblable à Q_0^0, un g_8^{35} isomorphe au g_8^8 (I, **45**), $\mathbf{R}_0$, semblable à R_0^0, un g_{20160}^{35} isomorphe à $L(4,2)$ et au g^8 alterné (I, **45**), $\mathbf{Q}_{20}$ un g_{51840}^{36} semblable à Q_2^1, $\mathbf{R}_{20}$ un g_{25920}^{36} semblable à R_2^1 (*cf.* **25-26**). $\mathbf{G}_2$ est un $g_{1440\,1520}^{28}$ deux fois transitif, $\mathbf{Q}_2$ un g_{51840}^{27} semblable à Q_2^0, $\mathbf{R}_2$ un g_{25920}^{27} semblable à R_2^0 [1], $\mathbf{Q}_{02}$ un g_8^{28} semblable à Q_0^1, $\mathbf{R}_{02}$ un g_{20160}^{28} semblable à R_0^1.

Le $g_{720}^{27}\Delta_0$ et le $g_{720}^{35}\Delta_2$ qui fixent un symbole dans R_0^1 et R_2^1 respectivement sont isomorphes au g_{720}^6 [2]. Δ_0 et Δ_2 ont chacun deux constituants dont l'un est semblable au $g_{720}^{15}G(4,2)$ (I, **22**). L'autre constituant de Δ_0 est un g_{720}^{12} semblable à la représentation de $G(4,2)$ relative au g_{60}, $R_2(4,2)$ (**16**). L'autre constituant de Δ_2 est un g_{720}^{20} semblable à la représentation de $G(4,2)$ relative au g_{36} $R_0(4,2)$ (**16**).

20. *Considérons maintenant* $\mathcal{A}^{(n)}$. — Soient $\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}$ et $\mathcal{X}_0' = \mathcal{X}'$ les diviseurs de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{A}'$ qui fixent $10\ldots0$; $\mathcal{X}_0^{(1)} = \mathcal{X}^{(1)}$ et $\mathcal{X}_0'^{(1)} = \mathcal{X}'^{(1)}$ leurs constituants de champ φ_λ, et Ξ', Ξ'' les groupes déduits de X', X'' en y supposant les variables homogènes. Ξ' est évi-

---

[1]) On sait que $G(6,2)$ est le groupe de l'équation qui détermine les 28 tangentes d'une quartique, et $\mathbf{Q}(6,2)$ celui de l'équation qui détermine les 27 droites d'une surface cubique (Jordan, *Traité*, n° 441-456; Maillet, *A. T.*, 1904). $\mathbf{Q}(6,2)$ est aussi le groupe de l'équation qui détermine les tiers de périodes des fonctions hyperelliptiques à quatre périodes (Jordan, *Traité*, n°s 499-504) et de celle dont dépend la réduction d'une forme sextique binaire à la forme canonique $u^3 - v^2$, u étant quadratique et v cubique (Clebsch, *Gött. Abh.*, t. 14; 1869).

[2]) Il en résulte que Q_0^1 *est semblable à l'action du* g_8^8 *sur les 28 combinaisons des huit symboles 2 à 2* (*et par suite* R_0^1 *à celle du* g^3 *alterné sur ces mêmes combinaisons*). Il suffit de montrer que si un g_{5720}^{8} X est le produit direct d'un g_{720} X_1 par un g_8 X_2, X_1 est un g_{720}^{6}, et X_2 un g_8^2 fixant les symboles de X_1 (S., 48). Or, 2.720 ne divisant pas 7!, X déplace 8 symboles. X n'est pas transitif. Car le diviseur Y fixant un symbole serait un g_{180} et aurait 1 ou 6 g_5^5 dont chacun figurerait dans 3 des 8 conjugués de Y. Or, X ayant 36 g_5, cela est impossible. Donc X est intransitif, et son ordre exige qu'un des constituants soit un g_{720}^6 et l'autre un g_1^2.

demment $\leqq \mathfrak{X}'$, et $\Xi'' \leqq \mathfrak{X}$. Comme I est premier à X′ et à X″, Ξ' a l'ordre de X′ et Ξ'' celui de X″. D'ailleurs $\mathfrak{X}^{(0)} \equiv \mathfrak{X}$ (**17**). Donc, $\mathfrak{X}^{(0)} \equiv \mathfrak{X}$, et $(\mathfrak{X}^{(0)}, 1) = (\mathfrak{X}, 1) : \frac{s_0}{\pi - 1} = \frac{(\mathrm{A}', 1)}{s_0}$. Donc $\mathfrak{X} = \Xi$. De même $\mathfrak{X}' = \Xi'$.

La matrice générale de $\mathfrak{X}$ a la forme générale $\mathfrak{R}$ du n° **4**, et l'on voit, comme aux n^{os} **4** et **6** que $\mathfrak{X} = \{\mathrm{A}_1\mathrm{P}, m_{1;}\}\mathrm{I} \mid \mathrm{I} = \{\mathrm{A}_1\mathrm{P}, m_{1;}\}\mathrm{D}$, $\mathfrak{X}' = \{\mathrm{A}_1\mathrm{P}, m_{1;}, \gamma\}\mathrm{I} \mid \mathrm{I}$, ou, puisque $\gamma^2\mu^{-1} = \mathfrak{p}\}$ (I, **24**), $\mathfrak{X}' = \{\mathrm{A}_1\mathrm{P}, m_{1;}, \gamma\}\mathrm{I}$ ($\mathfrak{X}$ est normal dans $\mathfrak{X}'$). De là encore $\mathfrak{X} = \Xi$, $\mathfrak{X}' = \Xi'$.

Au lieu des $\pi - 1$ $q_0^{\gamma_1}$ de X, on obtient de même, dans $\mathfrak{X}$ ou $\mathfrak{X}'$ un seul système $\mathfrak{q}_0^{\gamma_1}$ du même degré π^{n-2}. Au lieu de q_0^0, on obtient de même un système $\mathfrak{q}_0^0$ de degré $\frac{\pi s_{0,n-2}}{\pi - 1}$ (qui est fictif de degré 0 si $n = 4$ avec $\theta = -1$ ou si $n = 3$). Et il ne reste plus que le point 10...0 fixé par $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{X}'$.

Si $\mathfrak{X}^{(0)}$ a des systèmes d'imprimitivité de degré $\zeta\,(>1)$, $\mathfrak{X}_0^0$ fixe celui qui contient 10...0. Donc $\zeta = 1 + \pi\frac{s_{0,n-2}}{\pi - 1}$, $s_{0,n-2}$ étant $\neq 0$, ou $\zeta = 1 + \pi^{n-2}$. Si $\zeta = 1 + \pi\frac{s_{0,n-2}}{\pi - 1}$, ζ divise le degré π^{n-2} de l'autre système d'intransitivité de $\mathfrak{X}$, ce qui est absurde. Si $\zeta = 1 + \pi^{n-2}$, ζ divise $\pi\frac{s_{0,n-2}}{\pi - 1}$, donc aussi $\frac{s_{0,n-2}}{\pi - 1}$, d'où $(\pi - 1)\zeta \leqq s_{0,n-2}$. Si $n = 2\nu$ on a donc

$$\pi^{n-1} - \pi^{n-2} + \pi - 1 \mid \pi^{n-2} - 1 \mid \theta\,(\pi^{\nu-1} - \pi^{\nu-2}),$$

d'où *a fortiori*, en faisant $\theta = 1$, en supprimant $\pi - 1$ au premier membre, et en divisant par $\pi^{\nu-2}$,

$$\pi^{\nu-1} < \pi^{\nu} + \pi^{\nu-1} + \pi - 1,$$

et, encore *a fortiori*, $\pi^{\nu-1} < 2\pi^{\nu}$, ou $\pi < 2$, ce qui est absurde. Si $n = 2\nu + 1$, on a

$$\pi^{n-1} - \pi^{n-2} + \pi - 1 \mid \pi^{2\nu-1} - 1$$

d'où, *a fortiori*, $\pi^{n-1} < 2\pi^{n-2}$, ou $\pi < 2$. *Donc pour $n > 4$, ou pour $n = 4$ et $\theta = 1$, $\mathfrak{X}^0(n, \pi)$ ($\pi > 2$) est primitif, simplement transitif.*

Pour $n = 4$ et $\theta = -1$, $\mathfrak{q}_0^0$ disparaît, et $\mathfrak{X}^{(0)}$ est un g^{ce} transitif

qui est le normalisant dans $\mathcal{A}^0$ du g_{π^2} transitif correspondant à PD | D (I, 42). *Donc* $\mathcal{A}^0$ *est ici un* g^{π^2+1} *deux fois transitif*, isomorphe à $\{\mathfrak{V}(2, \pi^2), z^\pi\}$ (I, **40**), et $\mathfrak{B}^0$ un g^{π^2-1} isomorphe à $\mathfrak{V}(2, \pi^2)$. $\mathfrak{B}^0$ *est semblable à* $\mathfrak{V}(2, \pi^2)$ *qui est deux fois transitif*; car les deux groupes sont des représentations d'un même groupe abstrait relatives au normalisant d'un g_{π^2} sylowien (*S.*, 55, 64). *De même* $\mathcal{A}^0$ *est semblable à* $\{\mathfrak{V}(2, \pi^2), z^\pi\}$.

Pour $n = 3$, on voit de même que $\mathfrak{B}^0$ *est semblable à* $\mathfrak{V}(2, \pi)$, *et* $\mathcal{A}^0$ *à* $\mathcal{L}(2, \pi)$ (I, **40**).

$\mathfrak{B}^0$ *est primitif*. En effet, d'après ce qu'on vient de voir, on peut supposer $n > 4$ ou $n = 4$ et $\psi = 0$. Le p. g. c. d. $\mathcal{F}$ de $\mathcal{X}$, $\mathfrak{B}$ est, en regardant les variables comme homogènes, $\{B_1 P, m_{1t} m_{2t}\}$. Or m_{2t} fixe 010...0 et 0010...0. Donc $\mathcal{F}$ et $\mathcal{X} = \{m_{2t}\}\mathcal{F}$ remplacent ces points par les mêmes points de $\mathfrak{q}_0^0$. Ils ont donc les mêmes systèmes d'intransitivité, et le raisonnement fait pour $\mathcal{A}^0$ s'applique à $\mathfrak{B}^0$.

Pour $p > 2$, $\mathfrak{B}^0(5, \pi)$, *isomorphe à* $B(5, \pi)$ (**17**; I, **39**), *est isomorphe à* $\mathcal{G}(4, \pi)$, (I, **43**) *et de même degré* $\frac{\pi^4-1}{\pi-1}$. Mais le diviseur $\mathcal{X}$, d'ordre $\pi^4(\pi-1)(\pi^2-1)$, qui fixe un symbole dans $\mathcal{G}(4, \pi)$ est isomorphe à $\{G(2, \pi) P_{G+\pi}, m_{1t}\}$ D où le $g_{\pi^2} P_G D$ D, p. g. c. d. des g_{π^2}, a un central d'ordre π (I, **25**), tandis que le diviseur $\mathcal{F}$ fixant un symbole de $\mathfrak{B}^0(5, \pi)$ est, on vient de le voir, isomorphe à $\{R(3, \pi) P_{R+\pi}, m_{1t} m_{2t}\}$ où le $g_{\pi^2} P_R$, p. g. c. d. des g_{π^2}, est abélien (I, **42**). *Les deux représentations* $\mathfrak{B}^0(5, \pi)$ *et* $\mathcal{G}(4, \pi)$, *de même degré* $\frac{\pi^4-1}{\pi-1}$, *du même groupe abstrait ne sont donc pas semblables* (1).

---

(1) D'après I, **43**, le diviseur $\mathcal{F}_1$ de $G(4, \pi)$ qui correspond à $\mathcal{F}$ fixe la droite dont les coordonnées Z_{ik} vérifient $Z_{12} = Z_{13} = Z_{23} = 0$, $Z_{12} + Z_{34} = 0$, $Z_{14} = 0$. D'après la relation qui lie les Z_{ik} (*S.*, 76) on a aussi $Z_{12} Z_{34} = 0$; donc $Z_{12} = Z_{34} = 0$. Les équations $Z_{12} = 0$, $Z_{24} = 0$ en η_1, η_2, dont le déterminant est Z_{12}, donnent $\eta_1 = \eta_2 = 0$. Les équations $Z_{13} = 0$, $Z_{34} = 0$ donnent de même $\xi_1 = \xi_2 = 0$. Donc $\mathcal{F}_1$ *fixe la droite* $\eta_1 = \xi_2 = 0$, et comme $\mathcal{F}_1$ est maximum dans $\mathcal{G}$ (*S.*, 60), $\mathcal{F}_1$ *est le diviseur de* $\mathcal{G}$ *qui fixe cette droite*. $\mathcal{X}$ *est le diviseur de* $\mathcal{G}(4, \pi)$ *qui fixe le point* 1000 *ou le plan* $\eta_1 = 0$ *qui est son plan focal relativement au complexe* $\Sigma(\xi_i \eta_i - \eta_i \xi_i) = 0$ *conservé par* $\mathcal{G}$. (*Cf.* MITCHELL, *Transact. of the Am. Math. Soc.*, 1914, p. 384, 388, 395.

21. *Considérons maintenant les* $A^{(\lambda)}$, $A'^{(\lambda)}$ *où* $\lambda \neq 0$, *et soit d'abord* $n = 2\nu + 1$ $(p > 2)$.

Pour étudier le diviseur de A qui fixe un point de $q_{\lambda a}$, il est ici commode de remplacer y_1 par $y_1 + \lambda x_1$, a est alors remplacée par $a + \lambda x_1^2 = a_\lambda$, et aux premiers membres des conditions (4), (5), (6), (7), (8) de I, **26**, il faut ajouter respectivement les termes $2\lambda\alpha_{1j}\alpha'_{1k}$, $2\lambda\alpha_{1j}\alpha_{1k}$, $2\lambda\alpha'_{1j}\alpha'_{1k}$, $\lambda\alpha_{1j}^2$, $\lambda\alpha'^2_{1j}$, tandis qu'au second membre de (7) il faut faire $c_1 = \lambda$. Les deux points $\pm 1, 0, \ldots, 0$ appartiennent à $q_{\lambda a_\lambda}$, et le diviseur X_λ de A [ou de A', puisque le degré de $A'^{(\lambda)}$ est ici $\frac{1}{2}(\pi - 1) = (A', A)$ fois celui de $A^{(\lambda)}$] qui fixe l'un d'eux fixe l'autre. La matrice générale de X_λ a la forme.

$$M = \left\{ \begin{array}{c|cccc} 1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{12} & \ldots \\ \hline 0 & \beta'_{11} & \beta_{12} & \beta_{12} & \ldots \\ 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{22} & \ldots \\ 0 & \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{22} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \right\}.$$

Les relations entre les éléments de M qui correspondent aux combinaisons de la première colonne avec chacune des autres (*cf.* I, **1**) donnent le système

$$S \qquad 2\lambda\alpha'_{11} + \beta_{11} = 1, \qquad 2\lambda\alpha'_{1l} + \beta'_{1l} = 0, \qquad 2\lambda\alpha_{1l} + \beta_{1l} = 0 \quad (l = 1).$$

Le système S′ des autres relations entre les éléments de M (correspondant aux autres combinaisons de colonnes) peut se remplacer par le système S″ résultant de l'élimination de α_{1k}, α_{1k} à l'aide de S.

Soit maintenant M_1 la matrice déduite de M en supprimant la première ligne et la première colonne. Les matrices M_1 forment évidemment un groupe $X_{\lambda 1}$ homomorphe à X_λ, et comme, d'après S, M est complètement déterminée par M_1, $X_{\lambda 1} = X_\lambda$.

Or M_1 est la matrice d'une substitution du groupe de la forme $\Sigma_2^\nu x_i y_i + cx^2 - \frac{\nu^2}{4\lambda} = a_{\lambda 1}$: on le voit nettement en diminuant d'une unité tous les indices *non nuls* des x_i, y_i $(x = x_0)$ et des éléments de M_1 ; car S″ devient alors le système des relations qui lient les coefficients de la substitution générale du groupe de $a_{\lambda 0} = \Sigma_2^{\nu-1} x_i y_i + cx^2 - \frac{\nu^2}{4\lambda}$.

Comme les éléments de M_1 ne sont liés que par S^2, on peut prendre pour M_1 une matrice quelconque de $A(2\nu, \pi, a_{\lambda 1})$. *Donc* $X_{\lambda 1}$ *coïncide avec* $A(2\nu, \pi, a_{\lambda 1})$ *à la notation près des variables, et* $X_\lambda = X_{\lambda 1} = A(2\nu, \pi, a_{\lambda 0})$ [1].

X_λ *a* π^2 *systèmes d'intransitivité représentés par les* π^2 *points* $p_{\sigma\mu} = \left(\sigma - \frac{y_1^\mu}{2\lambda}, y_1^\mu, x_2^\mu, y_2^\mu, \ldots, x^\mu\right)$, σ *et* μ *parcourant* $\mathfrak{S}_1$ *et* $y_1^\mu, x_2^\mu, y_2^\mu, \ldots, x^\mu$ *étant un point quelconque du système* $q_{\mu a_{\lambda 1}}$ *de* $X_{\lambda 1}$ *(si* $q_{0a_{\lambda 1}}$ *disparaît, ce qui a lieu pour* $\nu = 1$ *avec* $\theta_{c\lambda} = 1$, θ_z *désignant le caractère quadratique de* z, *on remplacera* $q_{0a_{\lambda 1}}$ *par* $0 \ldots 0$) : *les points* $x_1 y_1 \ldots x_\nu y_\nu x$ *du système* (σ, μ) *de* $p_{\sigma\mu}$ *sont ceux où* $x_1 = \sigma - \frac{y_1^\mu}{2\lambda}$ *et*

---

[1] Des générateurs de $A(2\nu, \pi, a_{\lambda 0})$ indiqués précédemment (I, **30**), on déduit par S un système de générateurs correspondants de X_λ. Les générateurs de X_λ ainsi obtenus sont, en remplaçant y_1 par $y_1 - \lambda x_1$ pour revenir à la forme $a = \sum_1^\nu x_i y_i + cx^2$ [les deux points fixés par X_λ sont alors $1\ \lambda\ 0 \ldots 0$ et $(-1, -\lambda, 0, \ldots, 0)$], ceux de $A(n, \pi, a)$ avec les modifications et restrictions suivantes :

1° On remplacera t_1 par $m_{1\lambda} t_1$ qui correspond à t_1 de $A(2\nu, \pi, a_{\lambda 0})$;

2° On remplacera t_1 par $m_{1\lambda} t_{01}$ qui correspond à $m_{0,-1}$ de $A(2\nu, \pi, a_{\lambda 0})$;

3° On supprimera les $m_{1\mu}$;

4° On remplacera le couple $V_{1k\mu}$, $V_{01\mu}$ $(k \neq 0)$ par l'unique substitution $V_{k1\mu} U_{1k,\frac{\mu}{\lambda}}$ qui correspond à $V_{k1\mu}$ de $A(2\nu, \pi, a_{\lambda 0})$;

5° On remplacera $V_{01\mu}$ par la substitution qui correspond à

$$m_{0s_0s_1} = \begin{vmatrix} x & s_0 x + \frac{s_1}{4c\lambda} y \\ y & -s_1 x + s_0 y \end{vmatrix} \qquad \left(s_0^2 - \frac{s_1^2}{4c\lambda} = 1\right)$$

de $A(2\nu, \pi, a_{\lambda 0})$ (*cf.* I, **24**, **25**) pour $s_1 \neq 0$; si $s_1 = 0$, $m_{0s_0s_1}$ se réduit à 1 où à $m_{0,-1}$ qui a déjà été considérée. Cette substitution est $m_{1\mu} V_{01\mu} U_{01\mu}$ où $\mu = \frac{s_1}{4c}$, $\mu' = 2\frac{1 - s_0}{s_1}$, $\mu'' = \frac{2}{1 + s_0}$ $\left[\text{d'où } s_1 = 4c\mu,\ s_0 = \frac{2}{\mu''} - 1,\ \mu' = \frac{\mu'' - 1}{c\mu\mu'}\right.$, et, d'après la relation entre s_0 et s_1, $c\mu'(\lambda\mu + \mu'') = 0\Big]$.

A priori $m_{1\lambda} t_{01}$ et $m_{1\mu}$ sont dans B toujours et seulement si $m_{0,-1}$ et $m_{0s_0s_1}$ respectivement sont dans $B(2\nu, \pi, a_{\lambda 0})$. Il est aisé de le vérifier directement. Pour que $m_{0,-1}$ soit dans $B(2\nu, \pi, a_{\lambda 0})$, il faut et suffit que $\pi \equiv \theta_{\lambda z} \bmod 4$ (θ_z désignant le caractère quadratique de z) (I, **39**); mais alors précisément $m_{1,-\lambda c}$, donc aussi $m_{1\lambda} t_{01}$, est dans B (*loc. cit.*). Pour que $m_{0s_0s_1}$ soit dans $B(2\nu, \pi, a_{\lambda 0})$, il faut et suffit que $2(1 + s_0)$ soit carré (I, **25**, **39**) ; mais alors μ'' l'est aussi.

où $y_1 x_2 \ldots x$ parcourt le système $q_{\mu' \lambda_1}$ de X_{λ_1} (en remplaçant $q_{0 a_{\lambda_1}}$, s'il disparait, par $0 \ldots 0$).

En effet, si M transforme $p_{\sigma\mu}$ en $p_{\sigma'\mu'}$, on a

$$\sigma - \frac{y_1^\mu}{2\lambda} + \alpha_{11} y_1^\mu + \alpha_{12} x_2^\mu + \ldots + \alpha_{1\nu} x^\mu = \sigma - \frac{y_1^{\mu'}}{2\lambda},$$
$$\beta_{11} y_1^\mu + \beta_{12} x_2^\mu + \ldots + \beta_{1\nu} x^\mu = y_1^{\mu'},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

D'après S, les deux premières équations donnent $\sigma' = \sigma$. Alors la première résulte de la seconde qui, jointe aux suivantes, montre que M_1 transforme le point qui représente $q_{\mu a_{\lambda_1}}$ en celui qui représente $q_{\mu' a_{\lambda_1}}$. Donc $\mu' = \mu$. Si $\mu = 0$, les π systèmes obtenus en faisant varier σ sont de degré $(\pi^\nu - \theta_{c\lambda})(\pi^{\nu-1} + \theta_{c\lambda})$, car X_λ transforme les 2ν dernières coordonnées de $p_{\sigma\mu}$ comme X_{λ_1}, et, d'après S, l'action de chaque substitution de X_λ sur la première coordonnée est déterminée par son action sur les autres. Si $\mu \neq 0$, ils sont de degré $\pi^{2\nu-1} - \theta_{c\lambda}\pi^{\nu-1}$.

Les π^2 systèmes contiennent donc $\pi^n - \pi$ points. Or X_λ fixe les π points $x_1 0 \ldots 0$. *Donc les seuls points de $q_{\mu\nu}$ fixés par X_λ sont $\pm 1, 0, \ldots, 0$. Donc $A^{(\lambda)}(n, \pi)$ et $A'^{(\lambda)}(n, \pi)$ sont imprimitifs pour $\lambda \neq 0$ et $n = 2\nu + 1 > 1$ $(p > 2)$.*

22. *Soit maintenant n pair $= 2\nu'$.*

Supposons, ce qui est toujours permis, $\psi \neq 0$, *réductible ou irréductible, $bc' \neq 0$ et $\lambda = c'$* [les $A^{(\lambda)}$ où $\lambda \neq 0$ sont semblables (**15**)]. Écrivons les variables dans l'ordre $x, y, x_1, y_1, \ldots, x_\nu, y_\nu$. Le système q_c contient les points $0, \pm 1, 0, \ldots, 0$ (confondus si $p = 2$), et le diviseur X_c de A [ou de A', puisque le degré de $A^{(\lambda)}$ est ici $\pi - 1 = (A', A)$ fois celui de $A^{(\lambda)}$ (**15**)], qui fixe l'un d'eux fixe l'autre. La matrice générale de X_c a la forme

$$M = \left(\begin{array}{c|c|cccc} \alpha_{00} & 0 & \alpha_{01} & \alpha_{01} & \alpha_{02} & \alpha_{02} \\ \hline \beta_{00} & 1 & \beta_{01} & \beta_{01} & \beta_{02} & \beta_{02} \\ \alpha_{10} & 0 & \alpha_{11} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{12} \\ \beta_{10} & 0 & \beta_{11} & \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{12} \\ \alpha_{20} & 0 & \alpha_{21} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{22} \\ \beta_{20} & 0 & \beta_{21} & \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{22} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right).$$

Les relations entre les éléments de M qui correspondent aux combinaisons de la deuxième colonne avec chacune des autres donnent le système

$$\Sigma \qquad b\alpha_{0k} + 2c\beta_{0k} = b, \quad b\alpha_{0k} + 2c\beta_{0k} = 0, \quad b\alpha_{0k} + 2c\beta_{0k} = 0 \quad (k \geq 0).$$

Le système Σ' des autres relations (correspondant aux autres combinaisons de colonnes) peut se remplacer par le système Σ'' résultant de l'élimination de α_{0k}, α'_{0k} à l'aide de Σ.

Soit d'abord $p > 2$. Appelons M_1 la matrice déduite de M en supprimant la deuxième ligne et la deuxième colonne. Les matrices M_1 forment évidemment un groupe $X_{c'1}$ homomorphe à $X_{c'}$, et comme, d'après Σ, M est complètement déterminée par M_1, $X_{c'1} = X_{c'}$.

Or M est une matrice du groupe de Σ_1 $\beta_1 y_1 - c_1 \beta^2 = a_1$, en posant $\frac{-b}{4c'} = c_1$, car Σ'' est précisément le système des relations qui lient les coefficients de la substitution générale de $A(2\nu+1, \pi, a_1)$ et comme les coefficients de M_1 ne sont liés que par Σ'', on peut prendre pour M_1 une matrice quelconque de $A(2\nu+1, \pi, a_1)$. Donc $X_{c'1}$ coïncide avec $A(2\nu+1, \pi, a_1)$, et $X_{c'} = X_{c'1}$ [1].

$X_{c'}$ *a* π^2 *systèmes d'intransitivité représentés par les* π^2 *points* $p_{\sigma\mu} = 0\,\sigma\,1\,\mu\,0 \ldots 0$, σ *et* μ *parcourant* $\mathfrak{Z}$: *les points* $xyx_1y_1 \ldots x_\nu y_\nu$ *du système* (σ, μ) *de* $p_{\sigma\mu}$ *sont ceux où* $x_1, y_1 \ldots x_\nu, y_\nu$ *parcourt* $q_{\mu\mu}$ *et où* $y = \sigma - \frac{bx}{2c}$.

En effet, si M transforme $p_{\sigma\mu}$ en $p_{\sigma'\mu'}$, on a

$$\alpha_{01} - \alpha_{11}\mu = 0, \qquad \sigma - \beta_{01} - \beta_{11}\mu = \sigma'$$
$$\alpha_{11} - \alpha_{11}\mu = 1 \qquad \beta_{11} - \beta_{11}\mu = \mu' \ldots$$

---

[1] Des générateurs de $A(2\nu+1, \pi, a_1)$ indiqués précédemment (I, **30**), on déduit par Σ un système de générateurs correspondants de $X_{c'}$: les générateurs de $X_{c'}$ ainsi obtenus sont ceux de $A(n, \pi, a)$ avec les modifications et restrictions suivantes :

1° On remplacera W par le $\mathfrak{U}_{\mu\mu}$ qui répond à W_{μ} de $A(2\nu+1, \pi, a_1)$;

2° On remplacera $V_{\mu\mu\nu}$ par $V_{\mu\mu} W_{\mu\mu}$ qui correspond à $V_{\mu\mu}$ de $A(2\nu+1, \pi, a_1)$;

3° On supprimera les $V_{\mu\mu\mu}$.

D'après Σ, les deux premières équations donnent $\tau' = \tau$. Alors la seconde résulte de la première, et le système obtenu en négligeant la seconde montre que M_1 transforme le point p_μ de $q_{\mu a}$, dont les coordonnées $x, x_1, y_1, x_2, \ldots,$ sont $0, 1, \mu, 0, \ldots,$ en $p_{\mu'}$ de $q_{\mu' a}$. Donc $\mu' = \mu$. Comme $X_{c'}$ conserve la coordonnée τ de $p_{\tau\nu}$ et transforme p_μ comme $X_{c_1} = A(2\nu + 1, \tau, a_1)$, les τ systèmes obtenus en faisant varier σ seul sont, pour $\mu = 0$, de degré $\tau^{2\nu} - 1$, pour $\mu \neq 0$, de degré $\tau^{2\nu} + \theta_{c_1}\tau^\nu$.

Les τ^2 systèmes contiennent $\tau^n - \tau$ points, et $X_{c'}$ fixe les τ points $0y0\ldots0$. *Donc les seuls points de $q_{c'}$ fixés par $X_{c'}$ sont* $0, \pm 1, 0, \ldots, 0$. *Donc $A^\nu(n, \tau)$ et $A^{c'}(n, \tau)$ sont imprimitifs pour $\lambda \neq 0$, n pair > 2 et $p > 2$.*

Soit maintenant $p = 2$. Alors Σ se réduit à $\alpha_{00} = 1$, $\alpha_{0k} = \alpha_{0k} = 0$ $(k \neq 0)$, et il suffit de porter ces valeurs dans Σ' pour former Σ'' qui se compose : 1° du système Σ''_1 correspondant aux combinaisons de la première colonne avec chacune des $n - 2$ dernières; 2° du système Σ''_2 correspondant aux combinaisons deux à deux *sans répétition* des $n - 2$ dernières colonnes; 3° du système Σ''_3 correspondant aux combinaisons de chacune des $n - 2$ dernières colonnes avec elle-même; 4° de l'équation E qui répond à la combinaison de la première colonne avec elle-même. Or soit M_2 la matrice déduite de M en supprimant les deux premières lignes et les deux premières colonnes. D'après Σ''_2 (qui ne contient ici que des éléments de M_2), M_2 est une matrice de $G(2\nu, \tau)$, et l'on peut prendre pour M_2 une matrice quelconque de $G(2\nu, \tau)$, car, quand on s'est donné M_2, Σ''_1 détermine les β_{0k}, β'_{0k} où $k \neq 0$, Σ''_3 les α_{ik}, β_{ik} où $i \neq 0$ [1], tandis que E, qui s'écrit ici

$$c'\beta^2_{00} - b\beta_{00} = \Sigma''_1 \alpha_{i0}\beta_{i0},$$

ne détermine β_{00} qu'à la constante additive $\frac{b}{c'}$ près.

---

[1] Σ''_1 est formé des 2ν équations (4) et (5) de I, **26** qui répondent à $j = 0$, $k \neq 0$. Leur déterminant, qui est le produit de celui de M_2 par b, est $\neq 0$. On remarquera que les 2ν équations (15) et (17) de I, **26** qui répondent à $j = 0$, $k \neq 0$ représentent précisément la résolution de Σ''_1, et que les 2ν équations (18) (19) de I, **26** qui répondent à $i = 0$ fournissent les α_{ik}, β_{ik}, indépendamment des β_{0k}, β'_{0k} (comme le système analogue Σ''_3 a fourni les β_{ik}, β'_{ik}).

Ainsi M_2 détermine $M\{u_0\}$ ($Mu_0 = u_0 M$, $u_0^2 = 1$; *cf.* I, **25**). Comme u_0 est dans $X_{c'}$, et qu'une seule des deux matrices M, Mu_0 est dans $A^0 = B$ (M est dans A^0 ou dans $A^0 t_0$; u_0 est dans $A^0 t_0$), on voit que $X_{c'} = Y_{c'}\{u_0\}$, $Y_{c'}$ étant le p. g. c. d. de $X_{c'}$, B, et que M_2 détermine complètement celle M′ des deux matrices M, Mu_0 qui est dans $Y_{c'}$. Disons que M_2 et M′ se correspondent. On voit directement que la matrice M′ de $Y_{c'}$ qui correspond au produit de deux matrices M_2 de $G(2\nu, \pi)$ est le produit des matrices M′ correspondant à ces deux matrices M_2. Donc $Y_{c'} \equiv G(2\nu, \pi)$, et $X_{c'}$ est le produit direct de $Y_{c'}$ par $\{u_0\}$ [1].

Désignons par $\mathbf{A}(2\nu, \pi)$, $\mathbf{B}(2\nu, \pi)$ les diviseurs de $Y_{c'}$ qui répondent aux diviseurs $A(2\nu, \pi)$, $B(2\nu, \pi)$ de $G(2\nu, \pi)$. $Y_{c'}$ divisant $B(n, \pi)$, la condition (32) de I, **37** exige que, dans $\mathbf{B}(2\nu, 2)$, β_{00} reste nul.

Comme $X_{c'}$ conserve x, *chaque valeur* ξ *de* x *caractérise* $n_\xi (\geqq 1)$ *systèmes d'intransitivité* (*de degré* $\geqq 1$) *formés des points de* $q_{c'}$ *autres que le point* 010...0 *fixé par* $X_{c'}$ *qui vérifient* $\Sigma_1' x_i y_i + \psi(\xi, y) = c'$. *Je dis que* $n_\xi = 1$, *et que* $X_{c'}$ *ne fixe, dans* $q_{c'}$, *que le point* 010...0.

Considérons en effet le système d'intransitivité σ_ξ de degré ζ_ξ dont fait partie le point $\xi 0 x_1 10\ldots0$ ($x_1 = c\xi^2 + c'$) de $q_{c'}$. $V_{10\eta}$ (qui est dans $Y_{c'}$) transforme ce point en $\xi\eta x_1 10\ldots0$ où $x_1' = b\xi\eta + x_1 + c'\eta^2 = \psi(\xi, \eta) + c'$.

Soit d'abord $\xi \neq 0$. *Si* $\psi(\xi, \eta) + c' \neq 0$ [si $\pi = 2$, ce cas ne se présente que pour $\psi = xy + y^2$; $A(2\nu, 2)$ est alors, à la notation près, le transformé de $Q_0(2\nu, 2)$ par u_0], le point $x_1' 10\ldots0$ du champ de $A(2\nu, \pi)$ appartient dans ce champ à un système d'intransitivité autre que q_0. Donc $\mathbf{A}(2\nu, \pi)$ [ou $\mathbf{B}(2\nu, \pi)$, puisque $B(2\nu, \pi)$ a les mêmes systèmes d'intransitivité que $A(2\nu, \pi)$] le

---

[1] Aux générateurs τ_i, $u_{i\mu\rho}$, $V_{i\lambda\mu}$, $m_{i\mu}$ de $G(2\nu, \pi)$ répondent respectivement, dans $Y_{c'}$, les générateurs t_i, $V_{i0\mu}$, $V_{i\lambda\mu}$, $m_{i\mu}$. On obtient donc un système de générateurs de $X_{c'}$ en prenant les générateurs de $A(n, \pi)$ avec les modifications et restrictions suivantes :

1° On remplacera Ψ par $\{u_0\}$;

2° On supprimera les générateurs $V_{0i\mu}$.

En supprimant le générateur u_0 de $X_{c'}$ on obtient $Y_{c'}$.

remplace et remplace de même $\xi_1 \eta_1 x'_1 10\ldots0$ par $\pi^{2\nu-1} - \pi^{\nu-1}$ points. *Si* $\psi(\xi, \eta_1) + c' = 0$ [si $\pi = 2$, ce cas ne se présente que pour $\psi = x^2 + xy + y^2$; $A(2\nu, 2)$ est alors $Q_2(2\nu, 2)$], le point $x'_1 10\ldots0$ appartient dans le champ de $A(2\nu, 2)$ à q_0. Donc $\mathbf{A}(2\nu, \pi)$ remplace $\xi\eta_1 x'_1 10\ldots0$ par $\pi^{2\nu-1} - \pi^{\nu-1} + \pi^{\nu} - 1$ points, et $W_{\xi\eta_1 x'_1}$ (qui est dans $Y_{c'}$) le remplace par $\xi\eta_1 0\ldots0$. On a donc, pour $\xi \neq 0$, si $\psi(\xi, \eta_1) + c'$ est réductible en η_1 (ses racines sont alors distinctes, car leur différence est $\frac{b\xi}{c'} \neq 0$),

$$\zeta_\xi = (\pi - 2)(\pi^{2\nu-1} - \pi^{\nu-1}) + 2(\pi^{2\nu-1} - \pi^{\nu-1} + \pi^{\nu}) = \pi^{2\nu} + \pi^{\nu},$$

et si $\psi(\xi, \eta_1) + c'$ est irréductible en η_1,

$$\zeta_\xi = \pi(\pi^{2\nu-1} - \pi^{\nu-1}) = \pi^{2\nu} - \pi^{\nu}.$$

Si $\xi = 0$, $\psi(0, \eta_1) + c' = c'(\eta_1^2 + 1)$ n'ayant que la racine $\eta_1 = 1$, on a de même (en ne comptant pas le point $010\ldots0$ fixé par X_1)

$$\zeta_0 = (\pi - 1)(\pi^{2\nu-1} - \pi^{\nu-1}) + \pi^{2\nu-1} - \pi^{\nu-1} + \pi^{\nu} - 1 = \pi^{2\nu} - 1.$$

Or soit μ le nombre des $\xi \neq 0$, tels que $\psi(\xi, \eta_1) + c'$ soit réductible en η_1. $\psi(\xi, \eta_1) + c'$ ayant alors deux racines distinctes si $\xi \neq 0$, et la seule racine $\eta_1 = 1$ si $\xi = 0$, il y a $2\mu + 1$ points $\xi\eta_1$ annulant $\psi(\xi, \eta_1) + c'$. Donc $2\mu + 1 = \pi - \theta$ (*E.*, 45), et $\mu = \frac{\pi - \theta - 1}{2}$. Ainsi $\psi(\xi, \eta_1) + c'$ est irréductible pour $\pi - 1 - \mu = \frac{\pi + \theta - 1}{2}$ valeurs $\neq 0$ de ξ, réductible pour les $\frac{\pi - \theta - 1}{2}$ autres valeurs $\neq 0$ de ξ et aussi pour $\xi = 0$.

Revenons maintenant à l'équation $\Sigma_1^\nu x_i y_i = \psi(\xi, y) + c'$. Pour chacune des $\frac{\pi - 1 - \theta}{2}$ valeurs $\neq 0$ de ξ rendant $\psi(\xi, y) + c'$ réductible en y, l'équation a

$$(\pi - 2)(\pi^{2\nu-1} - \pi^{\nu-1}) + 2(\pi^{2\nu-1} - \pi^{\nu-1} + \pi^{\nu}) = \pi^{2\nu} + \pi^{\nu}$$

solutions en $y, x_1, y_1, \ldots, x_\nu, y_\nu$. Donc ζ_ξ est alors $\pi^{2\nu} + \pi^{\nu}$. Pour chacune des $\frac{\pi - 1 + \theta}{2}$ valeurs $\neq 0$ de ξ rendant $\psi(\xi, y) + c'$ irré-

ductible en y, l'équation a $\pi^{2\nu}-\pi^{\nu}$ solutions, et ζ_ξ est $\leqq \pi^{2\nu}-\pi^{\nu}$. Pour $\xi=0$, $\psi(\xi, y)+c'$ n'ayant que la racine $y=1$, l'équation a $\pi^{2\nu}-1$ solutions (en ne comptant pas la solution $10\ldots0$ correspondant au point $010\ldots0$ fixe par $X_{c'}$). Donc ζ_0 est $\leqq \pi^{2\nu}-\pi^{\nu}$. *En comparant ces inégalités avec les précédentes, on voit que leurs seconds membres fournissent, pour chaque ξ, la valeur exacte de ζ_ξ*, et que les σ_ξ contiennent $s_{c'}-1$ points exactement. Donc $n_\xi=1$, et $X_{c'}$ ne fixe dans $q_{c'}$ que le point $010\ldots0$.

On remarquera que $\mathbf{B}(2\nu, \pi)$ *fixe les points* $\xi\eta 0\ldots0$ (puisque β_{00} y est nul). Or, si $\pi=2$, $A(2\nu, 2)$, conjugué de $Q_0(2\nu, 2)$ si $\psi=xy+y^2$, et identique à $Q_2(2\nu, 2)$ si $\psi=x^2+xy+y^2$, a dans $G(2\nu, 2)$ l'indice $\frac{\zeta_1}{2}$. Donc $\mathbf{B}(2\nu, 2)$, qui fixe les deux points $1\eta_1 0\ldots0$ ($\eta_1=0, 1$), a dans $Y_{c'}$ l'indice ζ_1 et est par suite le diviseur fixant un symbole du constituant de $Y_{c'}$ de champ σ_1. *Donc, si $\pi=2$, le constituant de champ σ_1 de $Y_{c'}$ est semblable à la représentation de $G(2\nu, 2)$ relative à $R(2\nu, 2)$ (nécessairement imprimitive puisque Q est $>R$). De même, si $\pi=2$, le constituant de champ σ_0 de $Y_{c'}$ est semblable à $G(2\nu, 2)$* : car à tout point $x_1y_1\ldots x_\nu y_\nu$ répond un seul point $0yx_1y_1\ldots x_\nu y_\nu$ de q et l'action de M et de M_2 sur $x_1y_1\ldots x_\nu y_\nu$ est la même. On remarquera que u_0 fixe tous les points de σ_0. *Donc, si $\pi=2$, les constituants de $X_{c'}$ et de $Y_{c'}$ dans σ_0 coïncident.*

Si $A^{(c')}$ est imprimitif, le constituant $X_{c'}^{(c')}$ de $X_{c'}$ dans $q_{c'}$ fixe au moins un système d'imprimitivité dont le degré, d'après les degrés des systèmes d'intransitivité de $X_{c'}$ a la forme

$$\zeta=r(\pi^{2\nu}-\pi^{\nu})+s(\pi^{2\nu}-\pi^{\nu})+t(\pi^{2\nu}-1)+1,$$

r, s, t étant entiers $\geqq 0$, et $r\leqq\frac{\pi-1+\theta}{2}$, $s\leqq\frac{\pi-1-\theta}{2}$, $t\leqq 1$.

Si $t=0$, ζ est impair, et comme il divise le degré $\pi^{2\nu+1}-\theta\pi^{\nu}$ de $A^{(c')}$, il divise $\pi^{\nu+1}-\theta$. On a donc, q désignant un entier $\geqq 1$,

$$q[r(\pi^{2\nu}-\pi^{\nu})+s(\pi^{2\nu}-\pi^{\nu})+1]=\pi^{\nu+1}-\theta.$$

Donc $q+\theta=k\pi^{\nu}$, k étant un entier >0. Donc

$$q[r(\pi^{\nu}-1)+s(\pi^{\nu}-1)]=\pi-1.$$

d'où $s = 0$, $\nu = r = q = k = \theta = 1$, $\pi = 2$. *Alors* $A^{(c')}$ *est résoluble* (I, **40**) *et par suite imprimitif*, puisque son degré 6 n'est pas une puissance de nombre premier (*S.*, 63).

Si $t = 1$, ζ est pair et divise π^ν. On a donc

$$q[r(\pi^{2\nu} - \pi^\nu) + s(\pi^{2\nu} - \pi^\nu) + \pi^{2\nu}] = \pi^\nu \qquad (q \text{ entier } > 0)$$

ce qui est manifestement impossible pour $\nu > 0$. *Donc, pour* $p = 2$ *et* n *pair* > 2, $A^{(c')}$ *est primitif simplement transitif, sauf si* $\pi = 2$ *avec* $n = 4$ *et* $\theta = 1$, *auquel cas il a des systèmes d'imprimitivité de degré* 2.

Le même théorème s'applique à $B^{(c')}$. En effet, X_λ a π systèmes d'intransitivité, chacun étant caractérisé par la valeur ξ que x y conserve et formé des points $\xi y x_1 y_1 \ldots x_\nu y_\nu$ tels que $\Sigma_1^\nu x_i \eta_i + \psi(\xi, y) = c'$. Or, pour $n = 4$, il y a toujours de ces points pour lesquels $x_1 = y_1$ (**15**). Comme t_1 les fixe, $X_\lambda = (t_1)$ Y_λ et Y_λ les remplacent par les mêmes points de q_λ. Donc X_λ et Y_λ ont les mêmes systèmes d'intransitivité, et le raisonnement fait pour $A^{(c')}$ s'applique à $B^{(c')}$.

23. *Considérons maintenant* $\mathcal{A}^\lambda$ *et* $\mathfrak{B}^\lambda$ *pour* $\lambda \neq 0$, *et soit d'abord* $n = 2\nu + 1$ $(p > 2)$.

Revenons aux variables du n° **21**. Soient $\mathcal{X}_\lambda$ le diviseur de $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$ qui fixe $10\ldots0$, $\mathcal{X}_\lambda^\mu$ le constituant de $\mathcal{X}_\lambda$ dans le champ $\mathfrak{g}_{\mu\nu}$ ($\mathcal{X}_\lambda^\mu$ ne dépend que des caractères quadratiques de λ, μ) ; Ξ_λ, Ξ_λ les groupes déduits des diviseurs respectifs X_λ, X_λ de A, A' qui fixent $10\ldots0$ en y regardant les variables comme homogènes. Ξ_λ et Ξ_λ sont évidemment $\leqq \mathcal{X}_\lambda$. Or on voit comme au n° **4** que Ξ_λ et Ξ_λ ont les ordres respectifs de X_λ, X_λ, et que $\mathcal{X}_\lambda = \mathcal{X}_\lambda^\mu$. Donc $(\mathcal{X}_\lambda, 1) = (\mathcal{X}_\lambda, 1) = (\mathcal{A}, 1) : \frac{s_\lambda}{2} = \frac{(A, 1)}{s_\lambda} = \frac{2(A', 1)}{(\pi - 1)s_\lambda}$. Donc $\mathcal{X}_\lambda = \mathcal{X}_\lambda = \Xi_\lambda = \Xi_\lambda$.

La matrice générale de $\mathcal{X}_\lambda$ est

$$\mathfrak{M} = \left\{\begin{array}{c|cccc} \alpha_{11} & \alpha'_{11} & \alpha_{12} & \alpha'_{12} & \ldots \\ \hline 0 & \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \ldots \\ 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \ldots \\ 0 & \beta'_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right\} \qquad (\alpha_{11} \neq 0)$$

$\mathfrak{M}$ n'étant déterminée qu'à une matrice près de I comme facteur. Fixons ce facteur de manière que $\mathfrak{M}$ soit dans A. Alors, d'après S et l'équation (4) de I, **26** modifiée comme il a été dit (**21**), $\alpha_{11} = 1$, et la matrice $\mathfrak{M}_1$, déduite de $\mathfrak{M}$ en supprimant la première ligne et la première colonne est la matrice générale de $A(2\nu, \pi, a_{\lambda 1})$ (**21**). Mais on devra regarder comme indistinctes les $\mathfrak{M}$ dont les éléments sont proportionnels. Donc $\mathfrak{X}_\lambda^{(1)} = A(2\nu, \pi, a_{\lambda 0})$, et, de nouveau $\mathfrak{X}_\lambda = \Xi_\lambda$.

Désignons par (σ, μ) le système d'intransitivité de $\mathfrak{X}_\lambda$ dont fait partie $[\sigma, \mu]$ (**21**) quand on y suppose les coordonnées homogènes. *Les* π *systèmes* $[0, \mu]$ *fournissent évidemment les trois systèmes* $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, N)$ (*correspondant aux trois* $q_{\beta a_{\lambda 0}}$), *le premier de degré* $\frac{s_{0, n-1, a_{\lambda 0}}}{\pi - 1}$, *les deux autres de degré* $\frac{1}{2} s_{1, n-1, a_{\lambda 0}}$. *D'ailleurs les* π *systèmes* $(1, \mu)$ *sont distincts.* Si en effet le produit de M et d'une similitude de I transformait $(1, \mu)$ en $(1, \mu')$, on aurait des équations de la forme

$$1 - \frac{x_1^2}{x_0^2} + \alpha_{11} x_1^2 + \alpha_{12} x_2^2 + \alpha_{13} x_3^2 + \ldots = k\left(1 - \frac{x_1^2}{x_0^2}\right),$$

$$\alpha_{21} x_1^2 + \alpha_{22} x_2^2 + \alpha_{23} x_3^2 + \ldots = k x_1^2,$$

$$\alpha_{31} x_1^2 + \alpha_{32} x_2^2 + \alpha_{33} x_3^2 + \ldots = k x_2^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les deux premières donnent, d'après S, $k = 1$. Alors la première résulte de la seconde, et $\mathfrak{M}_1$ transforme $q_{\mu a_{\lambda 1}}$ en $q_{\mu' a_{\lambda 1}}$. Donc $\mu' = \mu$ (**21**). Il est clair d'ailleurs que $(1, \mu)$ est du même degré que $[1, \mu]$ ou $q_{\mu a_{\lambda 1}}$.

La somme des degrés des $\pi + 3$ *systèmes ainsi obtenus étant le degré* $\frac{\pi^{\nu} - 1}{\pi - 1} + 1$ *de* $\mathfrak{X}_\lambda$, $\mathfrak{X}_\lambda$ *n'en a pas d'autres.*

Dans (σ, μ), $a_\lambda = \lambda\sigma^2 + \mu$. Donc *ceux des* (σ, μ) *qui appartiennent à* $\mathfrak{X}_\lambda^{(\lambda)}$ *sont*, en réduisant σ à 0 ou à 1, $(0, \lambda)$ *de degré* $\frac{1}{2}(\pi^{2\nu-1} - \theta_\lambda \pi^{\nu-1})$, $(1, 0)$ *de degré* $(\pi^{\nu} - \theta_\lambda)(\pi^{\nu-1} + \theta_\lambda)$ *et les* $\frac{1}{2}(\pi - 3)$ $(1, \mu)$ *où* $\lambda + \mu = k^2\lambda$ $(k^2 \neq 0, 1)$, *chacun de degré* $\pi^{2\nu-1} - \theta_\lambda \pi^{\nu-1}$: la somme des degrés de ces $\frac{1}{2}(\pi + 1)$ systèmes d'intransitivité étant $\frac{1}{2} s_{\lambda n} - 1$, $\mathfrak{X}_\lambda^{(\lambda)}$ ne fixe qu'un point de q_{c}.

Si $\mathfrak{X}^{(\lambda)}$ a un système d'imprimitivité de degré ζ contenant $10\ldots0$,

$\mathfrak{X}_\lambda^{(\theta)}$ fixe ce système, et ζ a la forme

$$\zeta = \frac{r}{2}(\pi^{2\nu-1} - \theta_{\lambda\theta}\pi^{\nu-1}) + s(\pi^{\nu} - \theta_{\lambda\theta})(\pi^{\nu-1} + \theta_{\lambda\theta}) + t(\pi^{\nu-1} - \theta_{\lambda\theta}\pi^{\nu-2}) + 1$$

$$\left(r, s, t \text{ entiers} \geq 0;\ r, s \leq 1;\ t \leq \frac{\pi-3}{2}\right);$$

de plus ζ divise le degré $\frac{1}{2}(\pi^{2\nu} + \theta_{\lambda\theta}\pi^{\nu})$ de $\mathfrak{X}^{(\theta)}$.

Si $s = 0$, ζ est premier à π. Donc ζ divise $\frac{1}{2}(\pi^{\nu} + \theta_{\lambda\theta}) = \zeta q$ $(q \geq 1)$, d'où

$$q(2t + r)(\pi^{2\nu-1} - \theta_{\lambda\theta}\pi^{\nu-1}) = \pi^{\nu} + \theta_{\lambda\theta} - 2 < \pi^{\nu},$$

d'où $q(2t + r) = \nu = \theta_{\lambda\theta} = 1$. Mais alors $\mathfrak{B} = \mathfrak{V}(2, \pi)$ (1, **40**), et le $g_{\pi-1}$ diédral (**15**) qui fixe un symbole dans $\mathfrak{B}'$ y est maximum pour $\pi > 3$, d'après la détermination connue des diviseurs de $\mathfrak{V}$.

Si $s = 1$, la relation $\frac{1}{2}(\pi^{2\nu} + \theta_{\lambda\theta}\pi^{\nu}) = \zeta q(q + 2)$ donne

$$q(r + 2t + 2)(\pi^{\nu} - \theta_{\lambda\theta}) + 2q\theta_{\lambda\theta} = \pi(\pi^{\nu} - \theta_{\lambda\theta}).$$

Donc π divise $q(r + 2t) = l\pi(l \geq 1)$, et l'on a, en divisant par π,

$$\pi^{\nu-1}(l\pi + 2q - 1) = \theta_{\lambda\theta}(l - 1),$$

d'où $\theta_{\lambda\theta} = \nu = 1$, et $l(\pi - 1) + 2q = 1$, ce qui ne se peut. *Donc* $\mathfrak{X}^{(\theta)}$ $(\lambda \neq 0$, *n impair*) *est primitif hors du cas* $n = \pi = 3$ (**17**).

$\mathfrak{B}^{\lambda}(2\nu + 1, \pi)$ $(\lambda \neq 0)$ *est aussi primitif hors du cas* $n = \pi = 3$. En effet, on vient de le voir pour $\nu = 1$. Soit donc $n \geq 5$. Le p.g.c.d. $\mathfrak{F}_\lambda$ de $\mathfrak{B}$ avec $\mathfrak{X}_\lambda \equiv A(2\nu, \pi, a_{\lambda 0})$ est formé des $\mathfrak{M}$ (réduites comme au n° **21** à être dans A) où $\mathfrak{M}_1$ est dans $B(2\nu, \pi, a_{\lambda 0})$, seul diviseur d'indice 2 dans $A(2\nu, \pi, a_{\lambda 0})$. On a alors $\mathfrak{X}_\lambda = \{m_{2t}\}\mathfrak{F}_\lambda$ (les variables de m_{2t} étant supposées homogènes). Or chacun des systèmes (σ, μ) de $\mathfrak{X}_\lambda^{(\theta)}$ contient un point dont les coordonnées ont la forme $\sigma - \frac{y_1}{2t}, y_1, 0, \ldots, 0, x$, car on peut toujours résoudre $ex^2 - \frac{y_1^2}{4t} = \mu$ [*cf.* **21**; si $\mu = 0$ et $\theta_{\lambda\theta} = -1$, x et y_1 seront nuls; mais alors, dans $\mathfrak{X}_\lambda'$, σ est $\neq 0$, puisque le seul système de $\mathfrak{X}_\lambda^{(\theta)}$ où $\mu = 0$ est $(1, 0)$]. Donc $\mathfrak{F}_\lambda$ et $\mathfrak{X}_\lambda = \{m_{2t}\}\mathfrak{F}_\lambda$ remplacent ces points par les mêmes points de $\mathfrak{X}_\lambda'$. Donc ils ont les mêmes systèmes d'intransitivité, et le raisonnement fait pour $\mathfrak{X}^{(\theta)}$ s'applique à $\mathfrak{B}'$.

24. *Soit maintenant* $n = 2\nu'$.

Si $p = 2$, $\mathfrak{A}^{\nu}$ et $\mathfrak{B}^{\nu}$ sont respectivement semblables à A^{ν} et B^{ν} (**17**) déjà étudiés (**22**).

Soit donc $p > 2$, et revenons aux variables et aux conventions du n° **22**. Les deux $\mathfrak{A}^{\lambda}$ où $\lambda \neq 0$ étant semblables (**17**), supposons $\lambda = c'$. Soient $\mathfrak{X}_c$ et $\mathfrak{X}'_c$ les diviseurs respectifs de $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ [ici $(\mathfrak{A}', \mathfrak{A}) = 2$] qui fixent $010\ldots0$; $\mathfrak{X}_c^2$ et $\mathfrak{X}'^2_c$ leurs constituants de champ $\mathfrak{q}_\mu$, qui ne dépendent que du caractère quadratique de μ; Ξ_c et Ξ'_c les groupes déduits de X_c, X'_c en y supposant les coordonnées homogènes. Ξ_c est évidemment $\leq \mathfrak{X}_{c'} \leq \mathfrak{X}'_{c'}$. I étant premier à X_c et à X'_c, Ξ_c a l'ordre de X_c et Ξ'_c celui de X'_c. D'ailleurs $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$ (**17**). Donc $\mathfrak{X}'_c = \mathfrak{X}_c$, et $(\mathfrak{X}_c, 1) = (\mathfrak{A}, 1) : \frac{s_c}{2} = \frac{(A, 1)}{s_c}$. Donc $\mathfrak{X}_c = \Xi_c$. De même $(\mathfrak{X}'_c, 1) = (\mathfrak{A}', 1) : s = \frac{(A, 1)}{(\pi - 1)s} = \frac{(A, 1)}{s_c}$. Donc $\mathfrak{X}'_c = \mathfrak{X}_c = \Xi_c$.

La matrice générale de $\mathfrak{X}_c$ ou de $\mathfrak{X}'_c$ a, *a priori*, la forme

$$\mathfrak{M} = \left(\begin{array}{c|c|cccc} \alpha_{00} & 0 & \alpha_{01} & \alpha_{02} & \cdots \\ \hline \beta_{00} & \beta_{00} & \beta_{01} & \beta_{02} & \cdots \\ \hline \alpha_{10} & 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots \\ \beta_{10} & 0 & \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots \\ \cdots & \cdot & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right) \quad (\beta_{00} = 0),$$

$\mathfrak{M}$ n'étant déterminée qu'à une matrice près de I comme facteur. Fixons ce facteur de manière que $\mathfrak{M}$ soit dans A. Alors, d'après Σ et la formule (4) de I, **26**, $\beta'_{00} = 1$, et la matrice $\mathfrak{M}_1$ déduite de $\mathfrak{M}$ en y supprimant la seconde ligne et la seconde colonne est la matrice générale de $A(2\nu + 1, \pi, a_1)$ (**22**). Mais on devra regarder comme indistinctes les $\mathfrak{M}$ dont les éléments sont proportionnels. Donc $\mathfrak{X}_c = A(2\nu + 1, \pi, a_1)$, et, de nouveau, $\mathfrak{X}'_c = \mathfrak{X}_c = \Xi_c$.

Désignons par (σ, μ) le système d'intransitivité de $\mathfrak{X}_c$ dont fait partie $[\sigma, \mu]$ quand on suppose les coordonnées homogènes. *Les* π *systèmes* $[0, \mu]$ *fournissent évidemment les trois systèmes* $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, N)$ (*correspondant aux trois* $\mathfrak{q}_{p a_1}$), *le premier de degré* $\frac{s_{0,n-1,a_1}}{\pi - 1}$, *le second de degré* $\frac{1}{2} s_{1,\ldots,\ldots}$, *le troisième de degré* $\frac{1}{2} s_{N,n-1,a_1}$. *D'ailleurs les* π *systèmes* $(1, \mu)$ *sont distincts.* Si en effet le produit

de M et d'une similitude de I transformait $(1, \mu)$ en $(1, \mu')$, on aurait des équations de la forme

$$\mathrm{E}\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha_{00}x^{\mu} \qquad\qquad + \alpha_{01}x_1^{\mu} + \alpha_{01}y_1^{\mu} + \ldots = kx^{\mu} \\ \beta_{00}x^{\mu} + 1 - \dfrac{bx^{\mu}}{2c'} + \beta_{01}x_1^{\mu} + \beta_{01}y_1^{\mu} + \ldots = k\left(1 - \dfrac{bx^{\mu}}{2c'}\right), \\ \alpha_{10}x^{\mu} \qquad\qquad + \alpha_{11}x_1^{\mu} + \alpha_{11}y_1^{\mu} + \ldots = kx^{\mu}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Les deux premières équations donnent, d'après Σ, $k = 1$. Alors la seconde résulte de la première, et $\mathfrak{M}_1$ transforme $q_{\mu\alpha_1}$ en $q_{\mu'\alpha_1}$. Donc $\mu' = \mu$ (**22**). Il est clair d'ailleurs que $(1, \mu)$ est du même degré que $[1, \mu]$ ou $q_{\mu\alpha_1}$.

La somme des degrés des $\pi + 3$ systèmes ainsi obtenus étant le degré $\dfrac{\pi^n - 1}{\pi - 1} - 1$ de $\mathfrak{X}_c$, $\mathfrak{X}_c$ n'en a pas d'autres.

Dans $[\sigma, \mu]$, $a = c'\sigma^2 + \mu$. *Donc ceux des (σ, μ) qui appartiennent à $\mathfrak{X}_c^c$ sont*, en réduisant σ à 0 ou à 1 $(0, c')$ *de degré* $\frac{1}{2}(\pi^{2\nu} + \theta_{\mu c_1}\pi^{\nu})$, $(1, 0)$ *de degré* $\pi^{2\nu} - 1$, *et les* $\frac{1}{2}(\pi - 3)$ $(1, \mu)$ *où* $c' + \mu = k^2c'$ $(k^2 \neq 0, 1)$ *ou* $\mu = (k^2 - 1)c'$, *le degré de* $(1, \mu)$ *pour* $\mu \neq 0$ *étant* $\pi^{2\nu} + \theta_{\mu c_1}\pi^{\nu}$.

Comme $4c'c_1 = -\delta$, on a, en posant $\theta_{-1} = \varepsilon$, $\theta_{-3} = \theta_{-\delta} = \varepsilon\theta$. Cherchons pour combien des $\frac{1}{2}(\pi - 3)$ valeurs de μ de la forme $(k^2 - 1)c'$ $(k^2 \neq 0, 1)$, μc_1 est un carré $l^2 \neq 0$. L'équation $\dfrac{l^2}{c_1} = (k^2 - 1)c'$ ou $k^2 - \dfrac{4}{\delta}l^2 = 1$ a $\pi - \theta$ solutions dont $1 + \varepsilon\theta$ où $k = 2$ et 2 où $l = 0$. Or si k, l est une solution, $\pm k$, $\pm l$ en est aussi une. Donc le nombre des valeurs cherchées de μ est $\frac{1}{4}[\pi - 3 - \theta(1 + \varepsilon)]$. C'est le nombre des systèmes $(1, \mu)$ de $\mathfrak{X}_c^{c'}$ de degré $\pi^{2\nu} + \pi^{\nu}$. Celui des systèmes $(1, \mu)$ de degré $\pi^{2\nu} - \pi^{\nu}$ est celui $\frac{1}{4}[\pi - 3 + \theta(1 + \varepsilon)]$ des valeurs restantes de μ. La somme des degrés des $\frac{1}{2}(\pi + 1)$ systèmes de $\mathfrak{X}_c^{c'}$, indiqués étant $\frac{1}{2}s_{\mathcal{G}_n} - 1$, $\mathfrak{X}_c^{c'}$ ne fixe qu'un point de $\mathfrak{q}_c$.

Si $\mathfrak{X}_c^{c'}$ a un système d'imprimitivité de degré ζ contenant $010\ldots0$, $\mathfrak{X}_c^{c'}$ fixe ce système, et ζ a la forme

$$\zeta = \frac{r}{2}(\pi^{2\nu} + \varepsilon\theta\pi^{\nu}) + s(\pi^{2\nu} + \pi^{\nu}) + s'(\pi^{2\nu} + \pi^{\nu}) + t(\pi^{2\nu} - 1) = 1;$$

r, s, s', t entiers ≥ 0; $r, t \geq 1$; $s \geq \frac{1}{4}[\pi - 3 - \theta(1 + \varepsilon)]$; $s' \geq \frac{1}{4}[\pi - 3 + \theta(1 + \varepsilon)]$

De plus ζ divise le degré $\frac{1}{2}(\pi^{2\nu+1}-\theta\pi^{\nu})=\zeta q(q\geq 2)$ de $\mathfrak{A}^{(c')}$.

Si $t=0$, $q=k\pi^{\nu}$ $(k\geq 1)$, et l'on a

$$k[(r+2s+2s')\pi^{2\nu}-(\varepsilon\theta r+2s-2s')\pi^{\nu}+2]=\pi^{\nu+1}-\theta.$$

d'où successivement

$$k[(r+2s+2s')\pi^{2\nu}-(r+2s+2s')\pi^{\nu}]<\pi^{\nu+1}-\theta+2k<\pi^{\nu+1},$$

$$k(\pi^{\nu}-1)<\frac{\pi}{r+2s+2s'},\qquad k\pi^{\nu+1}<\frac{\pi}{r+2s+2s'},$$

donc $\nu=k=r+1$, $s=s'=0$. L'égalité précédente donne alors

$$\pi^{2}-\varepsilon\theta\pi+2=\pi^{2}-\theta\qquad\text{ou}\qquad\theta(\varepsilon\pi+1)=-2,$$

d'où $\theta=1$, $\varepsilon=-1$, $\pi=3$.

Si $t=1$, on a

$$q[(r+2s+2s'+2)\pi^{\nu}-\varepsilon\theta r+2s-2s']=\pi^{\nu+1}-\theta.$$

Donc π^{ν} divise $q(\varepsilon\theta r+2s-2s')+\theta=k\pi^{\nu}$, et, q étant ≥ 2, k est ≥ 0. On a alors, en éliminant q et en posant $h=\frac{2s-2s'+\varepsilon\theta r}{2s+2s'+r+2}$,

$$k=\frac{h\pi+\theta}{\pi^{\nu}-h}.$$

Or, p étant >2, $1+h=\frac{(s+1+\varepsilon\theta)r+2}{2s+2s'+r+2}$ et $1-h=\frac{(s+1-\varepsilon\theta)r+2}{2s+2s'+r+2}$ sont $\geq\frac{2}{\pi}$, d'où $|h|\leq 1-\frac{2}{\pi}$, et, ν étant ≥ 1, $k<\frac{|h|\pi+1}{\pi^{\nu}-|h|}\leq\frac{\pi^{2}-\pi}{\pi^{\nu+1}-\pi+2}<1$, d'où $k=0$, ce qui ne se peut.

Ainsi, pour n pair >2 *et* $p>2$, *sauf peut-être pour* $n=4$ *avec* $\pi=3$ *et* $\theta=1$, $\mathfrak{A}^{(c')}$ *est primitif simplement transitif, et de même,* $\mathfrak{A}^{(c'')}$, *puisque* $\mathfrak{X}'_{c''}=\mathfrak{X}_{c}$.

Or pour $n=4$ *avec* $\pi=3$ *et* $\theta=1$, $\mathfrak{A}^{(c')}$, $\mathfrak{A}^{(c'')}$ *et* $\mathfrak{B}^{(c')}$ *sont résolubles* (**I**, **40**), *et par suite imprimitifs*, puisque leur degré n'est pas une puissance de nombre premier (*S.*, **63**).

$\mathfrak{B}^{(c')}$ *est primitif* (*simplement transitif comme* $\mathfrak{A}^{(c')}$) *pour n pair* >2 et $p>2$, *sauf pour* $n=4$ *avec* $\pi=3$ *et* $\theta=1$ (*on vient de voir qu'il est alors imprimitif*). En effet, soit $\mathfrak{F}_{c'}$ le p.g.c.d. de $\mathfrak{X}_{c'}\mathfrak{B}$,

et *supposons d'abord* $n > 6$. Les substitutions t_2 et m_{2N} sont (en y supposant les variables homogènes) dans $\mathcal{X}_{c'}$ et hors de $\mathcal{B}$. Elles fixent tous les points $0\sigma 1\mu 0\ldots 0$ [qui représentent les systèmes d'intransitivité de $\mathcal{X}_{c'}$ (**22**)]. Donc $\mathcal{F}_{c'}$ et $\mathcal{X}_{c'} = \{t_2, m_{2N}\}\mathcal{F}_{c'}$ remplacent ces points par les mêmes points de $\mathfrak{q}_{c'}$ [$\mathcal{X}_{c'}\mathcal{F}_{c'} = \mathcal{A}$]. $\mathcal{B}$ est, pour $p > 2$, d'ordre 4 ou 2 selon que B contient ou non d (I, **39**). Donc $\mathfrak{J}_{c'}$ a les mêmes systèmes d'intransitivité que $\mathcal{X}_{c'}$, et l'on peut raisonner pour $\mathcal{B}^{(c')}$ comme pour $\mathcal{A}^{(c')}$.

Soit maintenant $n = 4$. *Si* ψ *est irréductible*, d est hors de B (I, **39**), et $\mathcal{B} = \mathcal{A}^0$. Or u_0, qui est dans $\mathcal{A}^0$ hors de $\mathcal{B}$, fixe tous les points $0\sigma 1\mu$. Donc $\mathcal{X}_{c'} = \{u_0\}\mathcal{F}_{c'}$ et l'on peut encore raisonner pour $\mathcal{B}^{(c')}$ comme pour $\mathcal{A}^{(c')}$. *Si* ψ *est réductible*, considérons d'abord $\mathcal{A}^0$ [1]. Le p.g. c.d. $\mathcal{X}^0_{c'}$ de $\mathcal{A}^0$, $\mathcal{X}_{c'} = \{u_0\}\mathcal{X}^0_{c'}$ a les mêmes systèmes d'intransitivité que $\mathcal{X}_{c'}$, et l'on voit de même que $\mathcal{A}^{0(c')}$ est primitif. Or $\mathcal{B}$ est ici (I, **40**) produit direct de deux groupes qui, étant normaux et, pour $\pi > 3$, simples, déplacent tous les symboles et sont formés de constituants transitifs parallèles. Soient $\mathcal{V}^{(c')}$ et $\mathcal{W}^{(c')}$ les actions des facteurs directs de $\mathcal{B}$ sur $\mathfrak{q}_{c'}$. $\mathcal{V}^{(c')}$ et $\mathcal{W}^{(c')}$, étant normaux dans $\mathcal{A}^{0(c')}$, qui est primitif, *sont transitifs, réguliers et adjoints*. Donc $\mathcal{B}^{(c')}$ est primitif (*S.*, 61).

25. *Soit par exemple* $n = 6$, $\pi = 2$, ψ *étant irréductible* (*donc* $\psi = x^2 + xy + y^2$).

---

(1) On ne peut raisonner ici sur $\mathcal{B}$ comme précédemment. En effet, pour qu'une substitution $\mathfrak{M}$ de $\mathcal{X}_{c'}$, déterminée comme précédemment, fixe le point $\left(x^\mu, 1 - \frac{b x^\mu}{2c'}, x_1^\mu, y_1^\mu\right)$ de $(1, \mu)$, il faut et suffit qu'elle vérifie le système E. On a vu qu'alors $k = 1$, et que $\mathfrak{M}$ est dans $A(3, \pi, a_1)$ ou, si l'on préfère, dans $A^0(3, \pi, a_1)$ [pour n impair, $A = A^0 D$ (I, **39**)], et fixe un point de $q_{\mu a_1}$. Or pour raisonner comme précédemment, il faudrait déterminer $\mathfrak{M}_1$ de manière qu'elle fixât un point de chacun des $\frac{1}{2}(\pi - 3)q_{\mu a_1}$ répondant aux systèmes $(1, \mu)$ [$\mu > 0$] de $\mathcal{X}^{(c')}_{c'}$. Mais le diviseur de $A^0(3, \pi, a_1) \equiv \mathcal{L}(2, \pi)$ (I, **40**) qui fixe un point de $q_{\mu a_1}$ est isomorphe au $g_{\mu - \theta\mu c_1} A^0(2, \pi, a_{\mu 1})$, en posant $a_{\mu 1} = c_1 x^2 - \frac{x_1^2}{4\mu}$ (**21**). Donc, chaque $g_{\pi+1}$ de $\mathcal{L}(2, \pi)$ étant complètement déterminé par une quelconque de ses substitutions $\neq 1$, et μ prenant plus d'une valeur pour $\pi > 3$, $\mathfrak{M}_1$ se réduit à 1, et alors aussi $\mathfrak{M} = 1$.

Alors A est d'ordre $51840 = 2^7.3^4.5$, et B simple d'ordre $25920 = 2^6.3^4.5$: $s_0 = 27$ et $s_1 = 36$. Je désignerai d'une manière générale par $Z^{(y)}$ l'action d'une partie quelconque Z de A sur q_y. L'ordre des variables étant x_1, y_1, x_2, y_2, x, y, je rangerai les points de chaque q_λ dans l'ordre lexicographique, en attribuant aux coordonnées les valeurs 0, 1 considérées comme appartenant au champ des nombres réels (*cf.* **16**). Désignons dans cet ordre 000000 et les 27 points de q_0 par a'', c'', b'', n'', m'', q'', a, c, b, n, m, q, a', c', b', n', m', q', e, d, l, k, i, p, h, g, o, f. On aura, en introduisant encore quelques notations,

$$m_{\mathfrak{S}}^0 = m_{\mathfrak{S}_{00}}^1 = \begin{matrix} x & y & \\ y & x & y \end{matrix}$$

$$= del.gho.ikp.mnq.m\,n\,q\,.m\,n\,q'.a.b.c.a\,b.c\,a'.b'.c'.$$

$$u_0^0 = \begin{matrix} x & x & \\ y & x & y \end{matrix}$$

$$= dl.ip.go.mq.m\,q'.m\,q''.a\,b.c.n.a'.b'.c'.n'.e.k.h.f.$$

$$U_0^0 = aa'.bb'.cc'.mm'.nn'.pp'.ef.gz.hi.kl.op.a''.b''.c''.m''.n''.q''.$$

$$U_{\frac{1}{2}}^0 = ab.cf.dg.eh.in.kn.lo.pq.pe'.mm'.a\,a''.q\,q''.a\,a'.b\,b'' = \alpha_1.$$

$$V_1^0 = ac.bf.di.ek.gm.hn.lp.oq.b\,b'.m\,m'.n\,n'.q\,q'.a\,a'.c\,c'' = \alpha_2.$$

$$U_{10}^0 = al.bg.ci.ef.fm.ho.kp.nq.a\,a''.q\,q'.a\,a'.b.b'.c.c'.m\,m'' = \alpha_3.$$

$$V_{10}^0 = ac.bh.ek.dl.fn.go.ip.mq.m\,m'.q\,q'.a'.b.c'.n.a\,a''.b'.c'.n' = \alpha_4.$$

$$U_{02}^0 = em.cm.cm.ch.fi.kp.lo.qn.q\,n'.q'n'.a.a'.a'.b.b.b'.d.g = \sigma.$$

$$V_{02}^0 m_{\mathfrak{S}}^0 = bnem.bnm.bnm.dgi.fhg.ekl.a.a.c.g.c.c'.q.q'.q'.e = \tau.$$

$$V_{21}^0 = ab.ce.dg.eh.fc'.im.kn'.bo.mm'.nn'.pq.qp.a.b.a''.b'.$$

$$W_{12}^0 = en.qm.e\,n'.q\,m'.e\,n''.q\,m''.dg.fk.qi.bo.a.a'.a''.b.b'.b''.e.h.$$

$$U_2^0 = bg.bc.bc'.gz.hk.op.a\,a'.a''.m.m.m'.n.n.n'.q\,q.q'.d.e.f.l.$$

P^0 est ici le g_{16} abélien principal $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ (I, **12**), permutable à σ, τ : pour préciser, on a

$$\sigma^{-1}\alpha_1\sigma = \alpha_1,\ \sigma^{-1}\alpha_2\sigma = \alpha_1\alpha_2\alpha_3,\ \sigma^{-1}\alpha_3\sigma = \alpha_3,\ \sigma^{-1}\alpha_4\sigma = \alpha_4\alpha_3,$$
$$\tau^{-1}\alpha_1\tau = \alpha_1\alpha_2\alpha_4,\ \tau^{-1}\alpha_2\tau = \alpha_2,\ \tau^{-1}\alpha_3\tau = \alpha_3,\ \tau^{-1}\alpha_4\tau = \alpha_4\alpha_3\alpha_4.$$

D'ailleurs $(\sigma, \tau) = \Gamma$, fixant a est premier à P^0, et comme $\sigma^2 = \tau^3 = (\sigma\tau)^8 = 1$, Γ est icosaédral (donc $\Gamma = B_1$ (**18**)). Donc $P^0\Gamma$ est un $g_{576,0}$, et comme il fixe a' (000000), il est le diviseur Y_0^0 de B^0

qui fixe a' (1). Donc $\{Y_0^{(0)}, V_{21}^{(0)}\}$, qui est transitif, coïncide avec $B^{(0)}$. Si donc Y_0 est le diviseur de B dont l'action sur q_0 est $Y_0^{(0)}$, $B = \{Y_0, V_{21}\}$. Les systèmes d'intransitivité de Γ sont $bcmnq$, $b'c'm'n'q'$, $b''c''m''n''q''$ de degré 5 et *defghiklop* de degré 10. Ceux de $P^{(0)}$ sont $ab\ldots q$ de degré 16 et $b'b''$, $c'c''$, $m'm''$, $n'n''$, $q'q''$ de degré 2. Il est clair que $Y_0^{(0)}$ est isomorphe à son constituant transitif $\mathbf{Y}$ dans le champ $ab\ldots q$ de degré 16 [$\mathbf{Y}$ est un diviseur *primitif* de T (4, 2) (*S.*, 70)] (2). Les systèmes d'intransitivité de $\{\sigma, \tau\}$ dans ce champ étant de degré 5 ou 10, aucun diviseur de $P^{(0)}$ autre que $P^{(0)}$ et 1 ne peut être normal dans $Y_0^{(0)}$ (3). Comme $t_2^{(0)}$ fixe a', $X_0^{(0)} = \{t_2^{(0)}\} Y_0^{(0)}$. Les constituants transitifs de degré 10 de Γ et de $\{t_2^{(0)}\}\Gamma$ sont des représentations primitives connues du g_{60}^5 et du g_{120}^5 (*S.*, 53) : cela résulte de la forme des s_2 impaires et de ce qu'un g_{120}^5 n'a pas d'autres g_{12} que ses g_{12} tétraédraux et les normalisants de ses g_3.

Négligeons un instant l'action de $Y_0^{(0)}$ sur les symboles autres que a, $b, \ldots, q$. Γ est le diviseur fixant a et a 16 conjugués distincts. Donc $T = \{\tau\}$, qui a 10 conjugués distincts dans Γ et divise 4 conjugués de Γ, a $\frac{10.16}{4} = 40$ conjugués dans $Y_0^{(0)}$. Son normalisant T' est donc un g_{24}. T' dérive de T,

$$\sigma_0 = (\sigma\tau)^{-2}\tau\sigma\tau(\sigma\tau)^2 = cq.dg.eh.fp.ik.mn.m'n'.m''n''.c'q'.c''q''.a.a'.a''.b.b'.b''.l.o.$$

α_2 et $\alpha_1\alpha_3\alpha_4 = \beta$; il est défini par $\tau^3 = \sigma_0^2 = \alpha_2^2 = \beta^2 = 1$, $\sigma_0\tau\sigma_0 = \tau^2$, $\alpha_2\tau = \tau\alpha_2$, $\beta\tau = \tau\beta$, $\sigma_0\alpha_2\sigma_0 = \alpha_2\beta$, $\sigma_0\beta\sigma_0 = \beta$.

Désignons maintenant les 36 points de q_1, rangés dans l'ordre indiqué, par $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \varkappa$, respectivement. On aura,

(1) On remarquera que $\{B_1^{(0)}, t_{12}^{(0)}\}$, fixant q', divise un conjugué de $P^{(0)}\Gamma$.

(2) Ce g_{960} n'est pas isomorphe au g_{960}^{20} de même composition qui fixe 4 symboles dans le g^{24} cinq fois transitif de Mathieu (*S.*, 109) : à la dernière ligne de ce numéro, au lieu de $\theta^{-1}b_3\theta = b_4$, $\theta^{-1}b_4\theta = b_3b_4$, il faut lire $\theta^{-1}b_3\theta = b_3b_4$, $\theta^{-1}b_4\theta = b_3b_4b_4$, car aucune s_3 de ce dernier groupe n'est permutable à une s_1 du g_{120} p. g. c. d. des g_{64} sylowiens (toutes les s_3 de ce g_{960}^{20} étant conjuguées, il suffit de le vérifier pour la $s_3\theta$ de l'endroit cité), tandis qu'ici $\tau\alpha_2 = \alpha_2\tau$.

(3) De là résulte encore que $\mathbf{Y}$ est primitif. Voir JORDAN, *Traité*, 141-144.

en introduisant quelques notations,

$$m_{35}^{1} = acb.dfe.gih.kml.npo.qsr.uwv.xzy.\alpha\gamma\beta.\theta\varkappa\iota.j.t.\delta.\varepsilon.\zeta.\eta.$$

$$u_0^{1} = bc.ef.hi.lm.op.rs.vw.yz.\beta\gamma.\iota\varkappa.a.d.g.j.k.n.q.t.u.x.\alpha.\delta.\varepsilon.\zeta.\eta.\theta.$$

$$t_1^{1} = ku.lv.mw.nx.oy.pz.q\alpha.r\beta.s\gamma.t\delta.a.b.c.d.e.f.g.h.i.j.\varepsilon.\zeta.\eta.\theta.\iota.\varkappa.$$

$$U_{12}^{1} = dx.ey.fz.j\delta.kq.lr.ms.n\theta.o\iota.p\varkappa.t\zeta.\varepsilon\eta.a.b.c.g.h.i.u.v.w.\alpha.\beta.\gamma = \alpha_1 = \sigma_5,$$

$$V_{12}^{1} = g\alpha.h\beta.i\gamma.j\delta.kn.lo.mp.q\theta.r\iota.s\varkappa.t\eta.\varepsilon\zeta.a.b.c.d.e.f.u.v.w.x.yz = \alpha_2' = \sigma_1,$$

$$U_{01}^{1} = au.cw.dx.fz.g\alpha.i\gamma.km.l\varepsilon.np.o\zeta.qs.r\eta.t\iota.\theta\varkappa.b.e.h.j.v.y.\beta.\delta = \alpha_3',$$

$$V_{10}^{1} = bv.cw.ey.fz.h\beta.i\gamma.k\varepsilon.lm.n\zeta.op.q\eta.rs.t\theta.\iota\varkappa.a.d.g.j.u.x.\alpha.\delta = \alpha_4',$$

$$U_{02}^{1} = ag.ci.df.ej.kq.ms.np.ot.u\alpha.w\gamma.xz.y\delta.\zeta\iota.\theta\varkappa.b.h.l.r.v.\varepsilon.\eta.\beta = \sigma',$$

$$V_{02}^{1} m_{35}^{1} = afb.ced.ghj.kpl.mon.qrt.uzv.wyx.\alpha\beta\delta.\eta\theta\iota.i.s.\gamma.\varepsilon.\zeta.\varkappa = \tau',$$

$$V_{21}^{1} = dn.eo.fp.jt.u\alpha.v\beta.w\gamma.x\theta.y\iota.z\varkappa.\delta\zeta.\varepsilon\eta.a.b.c.g.h.i.k.l.m.q.r.s = \sigma_2$$

$$W_{02}^{1} = be.cf.gj.hi.lo.mp.qt.rs.vy.wz.\alpha\delta.\beta\gamma.\eta\theta.\iota\varkappa.a.d.k.n.u.x.\varepsilon.\zeta.$$

$$t_2^{1} = dg.eh.fi.nq.or.ps.x\alpha.y\beta.z\gamma.\zeta\eta.a.b.c.j.k.l.m.t.u.v.w.\delta.\varepsilon.\theta.\iota.\varkappa.$$

$$\tau'^{-1}\alpha_1'\tau' = \alpha_1'\alpha_3'\alpha_4'$$
$$= bv.cw.dx.g\alpha.kt.l\varkappa.m\iota.n\eta.os.pr.q\zeta.\varepsilon\theta.a.e.f.h.i.j.u.y.z.\beta.\delta.\gamma = \sigma_3,$$

$$(\alpha_4'\sigma_2\alpha_4')^{-1}W_{02}^{1}\sigma_2 W_{02}^{1}\alpha_4'\sigma_2\alpha_4'$$
$$= du.ev.fw.gk.hl.im.j\varepsilon.n\alpha.o\beta.p\gamma.t\eta.d\zeta.a.b.c.q.r.s.x.y.z.\theta.\iota.\varkappa = \sigma_4.$$

Les substitutions $\sigma_1, \ldots, \sigma_4$, qui fixent $a = 000001$, vérifient les équations $\sigma_i^2 = 1$, $(\sigma_i\sigma_k)^3$ pour $|i-k| = 1$, et $(\sigma_i\sigma_k)^2 = 1$ pour $|i-k| > 1$. Donc leur p.p.c.m. est isomorphe au g^6 symétrique (*S.*, 69; *E.*, 66) et est le diviseur $Y_1^{(1)}$ de $B^{(1)}$ qui fixe a. On sait *a priori* (**22**) que $X_1^{(1)}$ est le produit direct de $Y_1^{(1)}$ par $u_0^{(1)}$. Les systèmes d'intransitivité de $X_1^{(1)}$ (ou de $Y_1^{(1)}$) sont *bcefhilmoprsvwyz*$\beta\gamma\iota\varkappa$ de degré 20 et *dgjknqtux*$\alpha\delta\varepsilon\zeta\eta\theta$ de degré 15. Les actions des σ_i et de $u_0^{(1)}$ sur chacun de ces systèmes vérifient les mêmes équations que les σ_i et $u_0^{(1)}$; mais l'action de $u_0^{(1)}$ sur le système de degré 15 se réduit à 1. Donc le constituant de degré 20 est isomorphe à $X_1^{(1)}$, et celui de degré 15, comme aussi l'action des seules σ_i sur le système de degré 20, est une représentation du g^6 symétrique (*cf.* I, **22**). $B^{(1)}$ étant primitif (**22**), on a, pour toute substitution ξ de $A^{(1)}$ hors de $X_1^{(1)}$, $A^{(1)} = \{X_1^{(1)}, \xi\}$ et, si ξ est dans $B^{(1)}$, $B^{(1)} = \{Y_1^{(1)}, \xi\}$. On peut prendre $\xi = \sigma'$ ou $\xi = \tau'$, ou mieux

$$\xi = \tau'\sigma_2\tau'^{-1} = ak.cm.eo.hr.u\varkappa.v\delta.w\theta.x\gamma.y\eta.z\alpha.\beta\zeta.\varepsilon\iota.b.d.f.g.i.j.l.n.p.q.s.t.$$

qui fixe 12 symboles. Comme

$$\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = bhzse.ciyrf.dgx\delta t.\ p\,\text{[illegible]}\,kuq.\ l\,\text{[illegible]}\,m_{\gamma}\,\text{[illegible]}\,\alpha\,\text{[illegible]}$$

ne fixe que a, X_1^1 contient le normalisant de chacun de ses $g_{\cdot}$ dans $B_1^{(1)}$. Or $X_1^{(1)}$ est isomorphe au g_{720}^6. *Donc le normalisant de chaque $g_{\cdot}$ de* B *est isomorphe au g_{720} métacyclique* (*S.*, 73).

26. *Soit* $n = 5$, $\pi = 3$, $\xi = x^2$. Alors $A = A^{(1)}D$ (I, **59**). $A^{(1)}$ est d'ordre $51840 = 2^7.3^4.5$, et B (simple) d'ordre $\text{[illegible]}\,720 = 2^6.3^2.5$; $s_0 = 80$, $s_1 = 90$, $s_2 = 72$. Je désignerai encore par $Z^{\prime}$ l'action d'une partie quelconque Z de A sur q_λ. L'ordre des variables étant x_1, y_1, x_2, y_2, x, je rangerai les points de chaque q_λ dans l'ordre lexicographique, en attribuant aux coordonnées les valeurs 0, 1, 2 considérées comme appartenant au champ des nombres réels (*cf.* **16**).

Désignons dans cet ordre les points de q_2 par 1, 2, 3, ..., 72. Les systèmes d'intransitivité (de degré 2) de $D^{(2)}$ sont des systèmes d'imprimitivité de $A^{(2)}$ et peuvent être identifiés avec les symboles de $\mathfrak{A}^{(1)}$. Prenons dans chaque système le point désigné par le plus petit des nombres 1, ..., 72. Représentons ces systèmes (ou les symboles de $\mathfrak{A}^{(1)}$) par les 36 nombres ainsi obtenus que je remplacerai, dans leur ordre de grandeur, par les lettres a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z, α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, $\varkappa$, τ respectivement. On a alors, en désignant par $Z^{\prime}$ l'action d'une partie quelconque Z de $\mathfrak{A}$ sur q_λ, et en introduisant quelques notations,

$$t_1^1 = dj.ek.fl.gm.hn.io.\gamma\delta.\varepsilon\zeta.\eta\theta.\ a\,\text{[illegible]}\,b\,\text{[illegible]}\,c\,\text{[illegible]}\,p\,\text{[illegible]}\,q\,\text{[illegible]}\,r\,\text{[illegible]}\,s\,\text{[illegible]}\,t\,\text{[illegible]}\,u\,\text{[illegible]}\,v\,\text{[illegible]}\,w\,\text{[illegible]}\,x\,\text{[illegible]}\,y\,\text{[illegible]}\,z\,\text{[illegible]}\,\alpha\,\text{[illegible]}\,\beta$$

$$V_{121}^1 = ajo.bkn.clm.dvk.ewi.fr\,\text{[illegible]}\,gez.hu\,\text{[illegible]}\,y.t\zeta\varepsilon.pt\,\text{[illegible]}\,r.qw\,\text{[illegible]}\,\beta\gamma\delta \qquad = \alpha$$

$$V_{111}^1 = adl.bhe.cfg.jr\,\text{[illegible]}\,r.kzs.l\zeta\delta.u\eta\,\text{[illegible]}\,r.ut\,\text{[illegible]}\,\alpha\alpha\,\text{[illegible]}\,p\,\text{[illegible]}\,y.qw\,\text{[illegible]}\,\beta\gamma\varepsilon \qquad = \beta$$

$$V_{011}^1 = adi.bhe.jk\,\text{[illegible]}\,r.l\zeta\eta.mtz.nu\,\text{[illegible]}\,z.pq\beta.rs\,\text{[illegible]}\,y.t\varepsilon\delta.v\,\text{[illegible]}\,w\,\text{[illegible]}\,\alpha\beta\gamma\,\text{[illegible]}\,f\,\text{[illegible]}\,\varepsilon \qquad =$$

$$U_{121}^1 = ajo.bkn.cml.dr\eta.es\zeta.f\,\text{[illegible]}\,x\,\text{[illegible]}\,g\,\text{[illegible]}\,\delta.hzt.i\,\text{[illegible]}\,u\,\text{[illegible]}\,pyv.q\,\text{[illegible]}\,w\,\text{[illegible]}\,\alpha\beta\varepsilon \qquad = \gamma$$

$$U_{011}^1 = ajo.bnk.dex.fu.gt\zeta.hiz.pq\beta.rs\,\text{[illegible]}\,y.tu\,\text{[illegible]}\,v\,\text{[illegible]}\,w\,\text{[illegible]}\,.yz\varepsilon.\varkappa.l\,\text{[illegible]}\,w \qquad = \alpha$$

$$W_{121}^1 = adi.beh.cfg.jv\zeta.kw\eta.lxs.m\,\text{[illegible]}\,z.nu\,\text{[illegible]}\,y.o\,\text{[illegible]}\,x.pt\,\text{[illegible]}\,r.qw\,\text{[illegible]}\,\beta\gamma \qquad = \beta$$

$$(\lambda^2\Gamma)^2 = m_{11}^1\,m_{21}^1 = t_0^1$$

$$= ab.de.hi.jk.no.pq.rs.tu.vw.yz.\eta\theta.\varkappa\tau.\ c\,\text{[illegible]}\,f\,\text{[illegible]}\,g\,\text{[illegible]}\,l\,\text{[illegible]}\,m\,\text{[illegible]}\,\alpha\,\text{[illegible]}\,\beta\,\text{[illegible]}\,\gamma\,\text{[illegible]}\,\delta\,\text{[illegible]}\,\varepsilon\,\text{[illegible]}\,\zeta\,\text{[illegible]}\,\varkappa'$$

et

$$c^{-1}\sigma_{12}c = av.bi.dh.kx.l\eta.m\alpha.o\alpha.q\beta.s\gamma.u\delta.w\varepsilon.z\delta.c.f.g.j.n.p.r.t.v.y.\zeta.\iota = \sigma'_2,$$

$$ad^2a^{-1}.b\xi^{-1}b^{-1} = aphbj.dikn\beta.eqo\alpha r.f\gamma mus.g\varepsilon lza.t\delta tx.v\zeta y\zeta\eta.c = g,$$

$$b\xi^{-1}b^{-1}.ad^2a^{-1} = aoebq.di\beta kn.fycm\delta.gtrl\delta.h\alpha xjp.s\gamma u\zeta\eta.w\varepsilon zix.c = b,$$

$$g^{-1}\sigma_{13}g = an.bo.f\delta.g\delta.hp.iq.jk.rz.st.vx.w\zeta.x\beta.e.d.e.l.m.t.u.x.v.z.\gamma.\varepsilon = \sigma_3,$$

$$b^{-2}\sigma_3 b^2 = ab.dh.ei.jn.ko.ry.sz.tv.uw.vx.\gamma\delta.\varepsilon\zeta.e.f.g.l.m.p.q.\beta.\zeta.\eta.\iota.\alpha = \sigma_4,$$

$$b^{-1}\sigma_1 b = ah.bi.de.l\gamma.m\varepsilon.np.oq.r\zeta.st.v\iota.wz.x\beta.e.f.g.j.k.t.u.x.y.z.\delta.\delta = \sigma_5,$$

$$(a\sigma'_1\sigma_2\sigma_3)^{-1}\sigma'_2(a\sigma'_1\sigma_2\sigma_3)$$

$$= bm.cn.q\delta.d\delta.x\eta.kl.gr.z\beta.hu.iz.t\gamma.\varepsilon w.a.e.f.j.o.p.s.v.y.\alpha.\gamma.\zeta = \sigma'.$$

Les substitutions σ_i vérifient les équations $\sigma^2 = 1$, $(\sigma_i\sigma_j)^3 = 1$ pour $|i - k| = 1$, et $(\sigma_i\sigma_j)^2 = 1$ pour $|i - k| > 1$. Leur p.p.c.m. $\mathfrak{S}$ qui fixe c est donc isomorphe au g°_{720}. Les systèmes d'intransitivité de $\mathfrak{S}$ sont $abdehijknopq\iota\alpha\beta$ de degré 15 et $fglmrstuvwyz\delta\varepsilon\zeta\eta\theta\iota\alpha$ de degré 20. Le groupe $\{\mathfrak{S}, \sigma'\}$, étant transitif, est d'ordre $720.36 = 25920$. Donc $\{\mathfrak{S}, \sigma'\} = \mathfrak{W}^{(1)}$, et $\{\mathfrak{W}^{(1)}, t^1\} = \mathfrak{A}^{(1)}$.

La substitution $\omega = acgje\varepsilon iymr\iota x\eta bf\gamma zlv\delta d\alpha know\theta qps\zeta ht.u\iota\beta$ transforme respectivement $\sigma_1, \ldots, \sigma_5, \sigma, t_1^1$ de $Q_1^1(6,2)$ (**25**) en $\sigma_1, \ldots, \sigma_5, \sigma', b^{-1}t_1^1 b$ de $\mathfrak{Q}^{(1)}(5,3)$. *Donc* $Q_2(6,2) \equiv \mathfrak{Q}^0(5,3)$, $R_2(6,2) \equiv \mathfrak{R}(5,3)$, *et l'on a une correspondance des générateurs.*

27. *Équations de* $A(n,\pi)$, $A^0(n,\pi)$, $B(n,\pi)$. — Considérons le diviseur $X^1 = \{X, m_{12}\}$ de A. Son constituant $X^{1(0)}$ dans q_0 a trois systèmes d'intransitivité : l'un est formé des points x, 0...0 fixés par X; l'autre des q_0^1 (il contient donc 010...0); le troisième, qui disparaît si $n = 1$, ψ étant irréductible, ou si $n = 3$ (**18**) est q_0^0 (il contient donc 0010...0). X = A_1P, A_1 et P sont permutables à m_{12} et l'on a, en posant $\{A_1, m_{12}\} = A_1^1$, $\{P, m_{12}\} = P^1$, $X^1 = A_1^1P = A_1P^1$. Enfin, comme $X \equiv X^0$ (**18**), et que m_{12} déplace les points x, 0...0 fixés par X, on a aussi $X^1 \equiv X^{1\,0}$.

Soit d'abord $\nu = 2$, *et supposons, ce qui ne restreint pas la généralité, que* ψ *est irréductible quand* δ *est* $\neq 0$. Comme t_1 échange les deux points 010...0, 10...0, et T_{12} les deux points 0010...0, 10...0, on aura (*S.*, 56)

$$(1) \qquad X = X^1 + Xt_1X^1 + XT_{12}X^1 = XTX^1, \qquad T = 1 + t_1 + T_{12}.$$

ou, puisque $t_1 m_{1j} t_1 = m_{1j}^{-1}$, $T_{12} m_{1j} T_{12} = m_{2j}$,

(2) $$A = X^1 + X^1 t_1 X^1 - X^1 T_{12} X^1 - X^1 T X^1.$$

Désignons par ξ un quelconque des générateurs indiqués de A_1 (I, **30**), par ξ' un quelconque des ξ qui laissent x_1, y_1, x_2, y_2 inaltérés, et considérons les identités

(3) $$t_1^2 = T_{12}^2 = 1, \qquad t_1 \xi t_1 = \xi, \qquad T_{12} \xi T_{12} = \xi',$$

(4) $$t_1 m_{1j} t_1 = m_{1j}^{-1},$$

(5) $$\left\{\begin{array}{l} t_1 V_{1kj} t_1 = t_k m_{1k} m_{1j}^{-1} T_{2k} V_{12j} T_{12} V_{12k} T_{12} = T_{2k} t_k \quad (k \neq 1), \\ \text{d'où, en transformant par } t_k, \\ t_1 U_{1kj} t_1 = m_{1k} m_{1j}^{-1} T_{2k} V_{12j} T_{12} V_{12k} T_{12} = T_{2k} \quad (k \neq 1) \end{array}\right.$$

(6) $$\left\{\begin{array}{l} \textit{si } \psi \textit{ est irréductible}, \text{ avec les notations de I, } \mathbf{31}, \mathbf{32}, \\ t_1 U_{10j} V_{10y} t_1 = m_{1-zz} m_{y-zz} = t_y U_{10j} V_{10-y} t_1 U_{10j} \quad (y \neq z, \; V_{10-z} = 1), \\ \text{d'où} \\ t_1 V_{10y} t_1 = m_{1-zz} m_{y-zz} t_0 V_{10-y} t_1 V_{10-y} \quad (y \neq 0), \\ t_1 U_{10j} t_1 = m_{1-zz} m_{y-zz} t_0 U_{10-y} t_1 U_{10-y} \quad (y \neq 0) \; [1]; \\ \textit{si } \psi = c x^2, \\ t_1 U_{10j} t_1 = m_{1-zz} t_0 U_{10-y} t_1 U_{10-y} \end{array}\right.$$

(7) $$t_1 T_{12} = T_{12} t_2, \qquad \text{d'où} \qquad T_{12} t_1 = t_2 T_{12}$$

(8) $$T_{12} m_{1j} T_{12} = m_{2j},$$

(9) $$\left\{\begin{array}{l} T_{12} V_{12j} T_{12} = t_1 U_{12-j} t_1, \\ \text{d'où, en transformant par } t_1, \text{ d'après (3) et (7)}, \\ T_{12} U_{12j} T_{12} = U_{12-j} \end{array}\right.$$

(10) $$\left\{\begin{array}{l} T_{12} V_{1jl} T_{12} = t_1 U_{1-jl} t_1 \quad (j \neq 3 \text{ ou } j = 0). \\ \text{d'où, en transformant par } t_1, \text{ d'après (3) et (7)}, \\ T_{12} U_{1jl} T_{12} = U_{2jl} \quad (j \neq 3 \text{ ou } j = 0), \\ \text{d'où, en transformant par } m_{012}, \\ T_{12} V_{1jl} T_{12} = V_{2jl} \quad (j \neq 3 \text{ ou } j = 0). \end{array}\right.$$

---

[1] Cette formule équivaut (I, **31**) à

$$t_1 V_{12z} U_{12-z} t_1 = m_{1-zz} m_{y-zz} t_0 V_{12-y} U_{12-y} t_1 V_{12-y} U_{12-y}$$

qui peut se déduire de (5) dans $A(n, \psi)$.

[2] Si cx' est carré, cette formule est, à la notation près, la transformée de la précédente par $m_{0x'-z} = m_{-x'z}$ $(x^2 + cx' = x)$ (I, **29**).

Supposons connues les équations de $A_1 \equiv A(n-2, \pi)$. P^1 *est défini par les équations de* P (I, **42**) *jointes à celles de la forme* $m_{12}^{-1}\chi m_{12} = \chi'$, χ *parcourant les générateurs de* P, *et à* $m_{12}^{-1} = 1$. *On connaît aussi toutes les relations de la forme* $\alpha^{-1}\beta\alpha = \beta'$, α *parcourant les générateurs de* A_1, *et* β *ceux de* P^1 (I, **29**). *L'ensemble* S *de ces trois systèmes définit* X^1 (*cf.* **8**) (¹) *et les équations* (3)-(10) [*en omettant* (6) *si* $\psi = 0$], *jointes à* S, *définissent* $A(n, \pi)$ (²).

On le voit comme au n° **8** où l'on fera les modifications suivantes : 1° on remplacera les u_i et les τ_i par 1, et l'on donnera à t_i, U_{ij} leur sens actuel ; 2° on remplacera les formules (20) et (23), qui ne donneraient alors rien de nouveau, par les suivantes :

$$X^1 t_1 V_{1i} V_{1i} t_1 = X^1 t_1 V_{1i} V_{1i}, \qquad X^1 t_1 U_{1i} V_{1i} t_1 = X^1 t_1 U_{1i} U_{1i},$$
$$X^1 t_1 V_{1i} U_{1i} V_{1i} t_1 = X^1 t_1 V_{1i} U_{1i} V_{1i}$$

qui s'obtiennent comme (18), (19) et (22) ; 3° le complexe

$$X^1 t_1 V_{1i} \ldots V_{1i} U_{1i} \ldots U_{1i} U_{1i} u_i t_1 X^1$$

devra être remplacé par

$$X^1 t_1 V_{1i} \ldots V_{1i} V_{1i} U_{1i} \ldots U_{1i} U_{1i} t_1 X^1 \qquad (\alpha, \eta = 0 \text{ ou } 1).$$

Soit maintenant $n = 4$, ψ *étant irréductible, ou* $n = 3$ (pour $n = 2$, *cf.* I, **25**). Alors T_{12} n'existe pas. Mais le troisième système d'intransitivité de $X^{(1)}$ disparaît aussi (**18**). *Donc* $A = X^1 + X^1 t_1 X^1$ (³), *et ses équations sont données par* (3) (*où l'on remplacera* T_{12} *par* 1), (4), (6) *jointes aux équations de* X^1 (*cf.* **8**).

Formons maintenant les équations de A^0 *pour* $n \geq 3$ (pour $n = 2$, *cf.* I, **30**). Adjoignons aux équations de A les formules de I, **28-32** qui en résultent ou qui définissent des générateurs auxiliaires. Elles permettent de faire disparaître les t_j aux seconds membres de (5), (6), (9), (10), et d'écrire (7) sous la forme $t_1 T_{12} t_1 = T_{12} R_{121} S_{12} = 1$ (I, **29**) (si $n = 3$, on négligera (5), (7), (9), (10)). On peut supposer les équations de X^1 formées : 1° des équations de $A_1^0 P^1$; 2° des équa-

(¹) On obtient de même les équations de X, X^1, $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}^1$.

(²) On peut évidemment éliminer les U_{1j} ou les V_{1j} et ne prendre qu'une des équations dans chacune des formules (6) (en supposant cc' carré), (9), (10).

(³) La représentation de A relative à X^1 est alors deux fois transitive (S., 56).

tions $t_j^2 = 1$, $t_j \varphi t_j = \varphi'$ ($j \neq 1$, φ parcourant les générateurs de A_1^0 et de P^1, et φ' étant déterminé par φ. A l'aide des relations $t_1 t_j = t_j t_1 = t_{1j} = t_{j1}$ (d'où $t_1 t_{1j} t_1 = t_{1j}$), on peut, dans les équations de A, remplacer $t_j^2 = 1$ et $t_j \varphi t_j = \varphi'$ par $t_{1j}^2 = 1$ et $t_{1j} \varphi t_{1j} = \varphi''$, φ'' étant l'expression de $t_1 \varphi' t_1$ par les générateurs de A^0. *Les équations de* A *sont ainsi données par la réunion de deux systèmes, l'un de la forme* $t_1^2 = 1$, $t_1 \varphi t_1 = \varphi'$, φ *parcourant les générateurs de* A^0, *l'autre* E *ne contenant que les* φ. *Le système* E′ *formé de* E *et des conditions d'automorphisme, de fermeture et de permutabilité définit* A^0 (*E.*, 19).

Formons enfin les équations de B *pour* $n = 3$ (pour $n = 2$, *cf.* I, **23**). Aux équations de A^0 on peut adjoindre les équations $m_{1t}^{-1} \varphi m_{1t} = \varphi'$, φ parcourant les générateurs de B, $m_{1t}^2 = \varphi''$ (φ'' étant dans B) et les équations exprimant chaque m_j par m_{1t} et les φ (I, **28-32**). A l'aide de ces équations on pourra : 1° éliminer tous les m_j autres que m_{1t} ; 2° dans chaque équation de A^0, réunir toutes les puissances de m_{1t} en une seule qui, étant dans B (d'après l'équation même), sera de la forme $m_{1t}^{2k} = \varphi^{-k}$. On peut négliger les équations qui servent seulement à introduire comme générateurs supplémentaires des m_j autres que m_{1t}. *Les équations de* B *seront alors formées de celles des équations précédentes où ne figure pas* m_{1t}, *jointes aux conditions d'automorphisme, de fermeture et de permutabilité.*

Remarque. — Pour $n = 6$ les résultats de I, **40**, **45**, **46** permettent de définir autrement A, A^0, B à l'aide des équations de $\mathfrak{v}(2, \pi)$, $U(2, \pi)$, $\mathfrak{H}^0(\frac{1}{2}, \pi)$, $\mathfrak{G}(\frac{1}{2}, \pi)$ (*cf.* *S.*, 88, 92 ; *E.*, 66).

IV. — Groupe des formes symétriques dans un champ galoisien de module 2.

28. Soit $a = \Sigma_{ik} a_{ik} x_i y_k$ ($i, k = 1, \ldots, n$) et $\bar{a} = a$. Si tous les a_{ii} sont nuls, a rentre dans le cas déjà étudié des formes gauches (I, **16**). Si un des a_{ii} tels que a_{11} est $\neq 0$, on peut, par des additions symétriques de lignes et de colonnes, annuler les a_{1k} et les a_{k1} autres que a_{11} et, en multipliant x_1 et y_1 par $\sqrt{a_{11}^{-1}}$, réduire a_{11} à 1. Il en

opérant de même sur la matrice des a_{ik} où i et k sont ≥ 2 et ainsi de suite, on ramène a à la forme $\Sigma_1^r x_i y_i + a'$, a' étant gauche, donc d'ordre pair (*E.*, 195) ; et l'on peut supposer a' réduite à la forme canonique de I, **16**. Comme d'ailleurs $\Sigma_1^3 x_i y_i$ se ramène à $x_1 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_2$ (par addition de la deuxième colonne à la première et de la deuxième ligne à la première, puis de la troisième colonne à la deuxième et de la troisième ligne à la deuxième, puis de la première colonne à la troisième et de la première ligne à la troisième), on peut supposer $r \geq 2$.

Si donc n est impair, a se ramène par transformation linéaire à un seul type correspondant à $r = 1$.

Si n est pair, il y a deux types répondant l'un à $r = 0$ (c'est le type gauche déjà étudié), l'autre à $r = 2$. Ces deux types sont distincts, car, si dans $\Sigma_1^r (x_{2i-1} y_{2i} + x_{2i} y_{2i-1})$ $(n = 2\nu)$ on remplace x_i par $\Sigma_k c_{ik} x_k$ et y_i par $\Sigma_k c_{ik} y_k$, la forme obtenue n'aura pas de terme en $x_1 y_1$ [1].

29. Soit donc, en changeant les notations, $a = \Sigma_1^r (x_i y_i + y_i x_i) + \psi$, $\psi = xx' + \eta yy'$ $(\eta = 0$ ou $1)$, $x_1, y_1, \ldots, x_r, y_r$, $x' = x_0$, $y' = y_0$ étant cogrédientes à $x_1, y_1, \ldots, x_r, y_r$, $x = x_0$, $y = y_0$. Il est clair que $A' = AI$, puisque I contient $\left|\begin{smallmatrix} \bar{\varepsilon} \\ \varepsilon \end{smallmatrix}\right|$ qui multiplie a par ε. *Donc* $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$, et comme I est ici premier à A, $\mathcal{A}$ *est semblable à* A.

Si une substitution α de A' multiplie a par f, on a $\alpha a \bar{\alpha} = fa$, $|\alpha^2| = f^n$. Je prendrai pour α et α^{-1} les mêmes notations que dans I, **26** et je poserai $f = g^2$.

Soit d'abord $n = 2\nu + 1$ $(\eta = 0)$.

La considération des coefficients de $x_j y_j$ (ou $x_j y_k$), $x_j x_k$ (ou $x_k x_j$), $y_j y_k$ (ou $y_k y_j$) pour $j \neq k$ et de $x_j x_j$, $y_j y_j$ donne, en posant $\varepsilon_{jk} = 0$ pour $j \neq k$, $\varepsilon_{jj} = 1$,

$$(1) \qquad \Sigma_{i=1}^r (\alpha_{ij} \beta_{ik} + \beta_{ij} \alpha_{ik}) + \alpha_{0j} \alpha_{0k} = f \varepsilon_{jk} \qquad (j, k = 0, 1),$$

$$\left.\begin{array}{ll} (2) & \Sigma_{i=1}^r (\alpha_{ij} \beta_{ik} + \beta_{ij} \alpha_{ik}) + \alpha_{0j} \alpha_{0k} = 0 \\ (3) & \Sigma_{i=1}^r (\alpha'_{ij} \beta'_{ik} + \beta'_{ij} \alpha'_{ik}) + \alpha'_{0j} \alpha'_{0k} = 0 \end{array}\right\} \quad (j, k = 0 ; j \neq k).$$

---

[1] *Voir* JORDAN, *Journ. Math.*, 1905, p. 268.

[2] Pour $k = 0$, (1) se réduit à $0 = 0$.

et

$$(4)\qquad \alpha'_{0j} = f\beta_{0j} \quad \text{ou} \quad \alpha_{0j} = g\beta_{0j} \qquad (j \neq 0)$$
$$(5)\qquad \alpha_{0j} = 0$$

On a d'ailleurs, comme dans (I, **26**), $f\alpha^{-1} = a\alpha a^{-1}$, c'est-à-dire

$$f\Lambda_{ik} = \beta_{ki}, \quad f\Lambda'_{ik} = \alpha_{ki}, \quad fB_{ik} = \beta_{ki}, \quad fB'_{ik} = \alpha_{ki} \qquad (i, k \neq 0)$$
$$f\Lambda_{i0} = \alpha_{0i}, \quad fB_{i0} = \alpha_{0i}, \quad f\Lambda_{0k} = \beta_{k0}, \quad f\Lambda'_{0k} = \alpha_{k0}, \quad f\Lambda_{00} = \alpha_{00}$$

Les conditions (4)-(5), écrites pour α^{-1} (qui multiplie a par f^{-1}), donnent alors $\beta_{j0} = 0$, $\alpha_{j0} = 0$ $(j \neq 0)$, $\alpha_{00} = g$.

Donc $A(2\nu+1, \pi)$ *laisse* x *inaltéré et agit sur* $x_1, y_1, \ldots, x_\nu, y_\nu$ *comme* $G(2\nu, \pi)$.

Donc $A(2\nu+1, \pi)$ *a* π *constituants transitifs parallèles semblables à* $G(2\nu, \pi)$ *caractérisés chacun par la valeur de* x. Soit G_λ celui où $x = \lambda$ et $\mathbf{G}$ le constituant non transitif formé des $\pi - 1$ G_λ où $\lambda \neq 0$. D'après la manière dont (ι), permutable à G_0, transforme G_λ en $G_{\iota\lambda}$, on voit que $A'(2\nu+1, \pi)$ *a deux constituants transitifs dont l'un est semblable à* $G'(2\nu, \pi)$, *et l'autre produit direct de* $\mathbf{G}$ *par une* $s_{\pi-1}^{\pi-1}$ *remplaçant chaque symbole* $x_1, \ldots, y_\nu, \iota^k$ de G_λ^k par le symbole $\iota x_1, \ldots, \iota y_\nu, \iota^{k+1}$ de $G_{\iota\lambda}^{k+1}$ (si une substitution de A remplace $x_1, \ldots, y_\nu, \iota^k$ par $X_1, \ldots, Y_\nu, \iota^k$, elle remplace $\iota x_1, \ldots, \iota y_\nu, \iota^{k+1}$ par $\iota X, \ldots, \iota Y, \iota^{k+1}$) (*cf.* **13**).

Soit $n = 2\nu + 2$ $(n \geq 4)$. Il est avantageux ici de ramener a, par le changement de variables $\begin{vmatrix} x & x \\ y & x+y \end{vmatrix}$ à la forme $\Sigma_0^\nu (x_i y_i + y_i x_i) + yy'$. La considération des mêmes coefficients que tout à l'heure donne

$$(6)\qquad \Sigma_{i=0}^\nu (\alpha_{ij}\beta_{ik} + \beta_{ij}\alpha_{ik}) + \beta_{0j}\beta_{0k} = f\varepsilon_{jk} \qquad (j, k \geq 0).$$
$$(7)\qquad \Sigma_{i=0}^\nu (\alpha_{ij}\beta_{ik} + \beta_{ij}\alpha_{ik}) + \beta_{0j}\beta_{0k} = 0$$
$$(8)\qquad \Sigma_{i=0}^\nu (\alpha'_{ij}\beta_{ik} + \beta_{ij}\alpha_{ik}) + \beta_{0j}\beta_{0k} = 0 \qquad (j, k \geq 0;\ j \neq k).$$
$$(9)\qquad \beta_{0j} = 0$$
$$(10)\qquad \beta_{0j} = g\varepsilon_{0j} \qquad (j \geq 0).$$

La relation $f\alpha^{-1} = a\alpha a^{-1}$ donne

$$f\Lambda_{ik} = \beta_{ki}, \quad f\Lambda'_{ik} = \alpha_{ki}, \quad fB_{ik} = \beta_{ki}, \quad fB'_{ik} = \alpha_{ki} \qquad (i, k \neq 0)$$
$$f\Lambda_{i0} = \beta_{0i}, \quad f\Lambda'_{i0} = \alpha_{0i} + \beta_{0i}, \quad fB_{i0} = \beta_{0i}, \quad fB'_{i0} = \alpha_{0i} + \beta_{0i}$$
$$f\Lambda_{0k} = \beta_{k0} + \beta'_{k0}, \quad f\Lambda'_{0k} = \alpha_{k0} + \alpha'_{k0}, \quad fB_{0k} = \beta_{k0}, \quad fB'_{0k} = \alpha_{k0} \qquad (i, k \neq 0)$$
$$f\Lambda_{00} = \beta_{00} + \beta'_{00}, \quad f\Lambda'_{00} = \alpha_{00} + \alpha'_{00} + \beta_{00} + \beta'_{00}, \quad fB_{00} = \beta_{00}, \quad fB'_{00} = \alpha_{00} + \beta_{00}.$$

d'où les relations suivantes [1], équivalentes *a priori* à (6) - (10) :

$$(11)\qquad \Sigma'_{i=0}(\alpha_{ki}\beta_{ji}-\beta_{ji}\alpha_{ki})=\alpha_{j0}\beta_{k0}-\beta_{j0}\alpha_{k0}\quad (j,k\neq 0).$$

$$(12)\qquad \Sigma'_{i=0}(\beta_{ki}\beta_{ji}+\beta_{ji}\beta_{ki})=\beta_{j0}\beta_{k0}=0\quad (j,k\neq 0;\ j\neq k).$$

$$(13)\qquad \Sigma'_{i=0}(\alpha_{ki}\alpha_{ji}-\alpha_{ji}\alpha_{ki})=\alpha_{j0}\alpha_{k0}=0$$

$$(14)\qquad \alpha_{j0}=\varepsilon\beta_{0j}\quad (j\neq 0).$$

$$(15)\qquad \beta_{j0}=0$$

Comme (11) - (15) équivaut à (9) - (10), les conditions (14) et (15) en particulier résultent de (6) - (10). En utilisant (9), (10), (14), (15) on voit directement que le système (6) - (10) équivaut au système (1) - (2) de I, **17** joint à

$$\varepsilon\alpha_{0j}=\Sigma'_{i=1}(\alpha_{ij}\beta_{i0}+\beta_{ij}\alpha_{i0}),\qquad \varepsilon\alpha_{j0}=\Sigma'_{i=1}(\alpha_{i0}\beta_{ij}+\beta_{i0}\alpha_{ij})\quad (j\neq 0),$$
$$\alpha_{00}=\beta_{00}=\varepsilon,$$

c'est-à-dire que la matrice M des α_{ik}, α'_{ik}, β_{ik}, β'_{ik} où i et k sont $\neq 0$ est dans $G'(2\nu,\pi)$, et qu'on peut prendre arbitrairement les α'_{i0}, β'_{i0} autres que β'_{00}, les α_{0j}, α'_{0j}, où $j\neq 0$ étant alors déterminés.

On voit de même que le système (11) - (15) équivaut au système (3) - (4) de I, **17** joint à

$$\varepsilon\alpha'_{j0}=\Sigma'_{i=1}(\alpha_{0i}\alpha_{ji}-\alpha_{ji}\alpha_{0i}),\qquad \varepsilon\beta_{0j}=\Sigma'_{i=1}(\alpha_{i0}\beta_{ij}+\beta_{i0}\alpha_{ij})\quad (j\neq 0),$$
$$\alpha_{00}=\beta_{00}=\varepsilon,$$

c'est-à-dire, sous une seconde forme, que M est dans $G'(2\nu,\pi)$, et qu'on peut prendre arbitrairement les α_{0i}, α'_{0i} autres que α_{00}, les α'_{j0}, β'_{j0} où $j\neq 0$ étant alors déterminés.

On voit donc que A *et* A′ *coïncident* (*à un changement près des notations*) *avec les groupes* X *et* X′ *étudiés aux* n^os **11**, **12** *et* **14**.

---

[1] Pour écrire (11) - (15) dans le cas où j ou k est nul, on a à tenir compte de (14) et (15).

NOTE.

La composition des groupes quadratiques A', A^0, A, B a été déterminée dans ces traits essentiels (I, **40**, **48**). Je voudrais ici achever de la préciser.

Pour n impair, D est premier à A^0 d'où $A = A^0 D$ et $A' = A'' = A^0 I$ (I, **24**); $A' | A^0$ est donc un $g_{\pi-1}$ cyclique.

Pour n pair $A' | A_0$ est un $g_{2\pi-1}$ abélien produit direct du g_2 $A^0 \{t_j\} A^0$ par le $g_{\pi-1}$ cyclique $A^0 \{\gamma\} | A^0$ (I, **24**). Or tout diviseur d'un groupe abélien est le produit direct des groupes sylowiens de ce diviseur, et les groupes sylowiens d'ordre impair de $A' | A^0$ sont cycliques. Pour déterminer les diviseurs de $A' | A^0$, il suffit donc de déterminer les diviseurs de son groupe sylowien d'ordre pair, dont les équations ont la forme $u^{2^\alpha} = t^2 = 1$, $ut = tu$, 2^α étant la plus haute puissance de 2 qui divise $\pi - 1$. Le rang d'un diviseur X est 1 ou 2 (*E.*, **119**). *Si* X *est cyclique, il a l'une des formes* $\{u^{2^r}\}$, $\{u^{2^r} t\}$ $(0 \leq r \leq \alpha)$. *Si* X *est de rang* 2, il a la forme $\{u', t'\}$, u' ayant un ordre de la forme 2^s $(1 \leq s \leq \alpha)$, et t' l'ordre 2 (*E.*, **124**). Donc u' peut être supposé de la forme u^{2^r} ou $u^{2^r} t$ $(0 \leq r < \alpha)$, et t' de la forme t ou $u^{2^r} t$, *ce qui donne pour* X *les seules déterminations distinctes* $\{u^{2^r}, t\}$ $(0 \leq r < \alpha)$.

$A' | B$ est défini comme il suit, en remplaçant les congruences mod B par des équations, et en supprimant les indices des t_j, m_{j_ρ} :

$p > 2$, *n impair* :

(1) $\gamma^{\pi-1} = t^2 = m^2 = 1$, $\gamma t = t\gamma$, $\gamma m = m\gamma$, $tm = mt$;

$p > 2$, *n pair*, ψ *irréductible* :

(2) $\gamma^{\pi-1} = m$, $t^2 = m^2 = 1$, $t\gamma t = \gamma m$, $\gamma m = m\gamma$, $tm = mt$

$p > 2$, *n pair*, ψ *réductible* :

(3) $\gamma^{\pi-1} = t^2 = m^2 = 1$, $t\gamma t = \gamma m$, $\gamma m = m\gamma$, $tm = mt$

$p = 2$ (*alors n est pair, et* $B = A^0$) :

(4) $\gamma^{\pi-1} = t^2 = 1$, $\gamma t = t\gamma$

Pour déterminer les diviseurs normaux $\geqq B$ de A', il suffit de déterminer les diviseurs normaux des groupes (1)-(4) ou même seulement, après l'étude de $A' \mid A^0$, *les diviseurs normaux non* $\geqq \{m\}$ *des groupes* (1)-(3). Chacun de ces groupes est le produit direct de ses groupes sylowiens (*cf. E.*, 95-96), ceux d'ordre impair étant cycliques. Il en sera donc de même de chacun de ses diviseurs. *Il suffit donc de déterminer les diviseurs normaux non* $\geqq \{m\}$ *du diviseur sylowien d'ordre pair de chacun des groupes* (1)-(3). Soit Γ_i celui du groupe (i), 2^α $(\alpha \geqq 1)$ la plus haute puissance de 2 qui divise $\pi - 1$, et X un des diviseurs cherchés de Γ_i.

Γ_1 a des équations de la forme $u^{2^\alpha} = t^2 = m^2 = 1$, $ut = tu$, $um = mu$, $tm = mt$. C'est donc un g_{2^α} abélien de rang 3, et X a un rang $\leqq 3$. *Si* X *est cyclique*, X a l'une des formes $\{u^{2^r}\}$, $\{u^{2^r} t\}$, $\{u^{2^r} m\}$, $\{u^{2^r} tm\}$ $(0 \leqq r \leqq \alpha)$. *Si* X *a le rang* 2, X a la forme $\{u', t'\}$, u' ayant un ordre de la forme 2^s $(0 < s \leqq \alpha)$, et t' l'ordre 2. Donc, en désignant par τ, τ' des e_2 de $\{t, m\}$, t' a l'une des formes $u^{2^{\alpha-1}}$, $u^{2^{\alpha-1}}\tau$, et u' peut être supposé de l'une des formes u^{2^r}, $u^{2^r}\tau'$ $(0 \leqq r < \alpha)$ (si $r = \alpha$, X est cyclique ou contient m). On obtient ainsi les diviseurs $\{u^{2^r}, \tau\}$, $\{u^{2^r}\tau', \tau\}$, $\{\tau', \tau\}$ $(\tau' \neq \tau)$, *d'où, pour* X (en négligeant les formes où $\tau = m$), *les formes* $\{u^{2^r}, t\}$, $\{u^{2^r}, tm\}$, $\{u^{2^r} t, tm\}$, $\{u^{2^r} m, t\}$, $(0 \leqq r < \alpha)$. X *ne peut avoir le rang* 3. Car il aurait la forme $\{u', t', m'\}$, m' étant d'ordre 2, et $\{u', t'\}$ un des diviseurs obtenus de rang 2. De là, en désignant par τ, τ', τ'' des e_2 distincts de $\{t, m\}$, les seuls types $\{u^{2^r}, \tau, \tau'\}$, $\{u^{2^r}\tau, \tau, \tau'\}$, qui tous contiennent m.

Γ_2 *a des équations de la forme* $u^{2^\alpha} = m$, $t^2 = m^2 = 1$, $tut = um$, $um = mu$, $tm = mt$, ou $u^{2^\alpha} = 1$, $t^2 = 1$, $tut = u^{-1}$. *Soit d'abord* $\alpha = 1$. En écrivant a pour m, b pour t, et c pour u, les équations de la première forme coïncident avec (2) de *E.*, 152. En écrivant encore a pour m, et b pour t, mais en posant $ut = c$, on a les équations (1) de *E.*, 152. En partant de ces dernières équations, on a trouvé (*cf. S.*, p. 224) que le $g_8\Gamma_2$ (de central $\{m\}$) a exactement 3 g_4 qui sont $\{m, t\}$, $\{m, ut\}$, $\{u\}$ et 5 g_2 qui sont $\{m\}$, $\{t\}$, $\{mt\}$, $\{ut\}$, $\{mut\}$. Donc X, qui ne contient pas $m = u^2$, ne peut être qu'un des groupes $\{t\}$, $\{mt\}$, $\{ut\}$, $\{mut\}$, 1. Mais aucun des quatre premiers n'est normal (u transforme t en mt, et ut en mut). *Donc* $X = 1$. *Soit* $\alpha > 1$. En écrivant a pour u, et b pour t, la seconde forme des

équations de Γ_2 coïncide avec (1) de *E.*, 141. Donc Γ_2 est un g_{2^α} de central $\{m\}$. Ses g_{2^α}, qui ont été déterminés (*cf.* S., p. 223), sont $\{u\}$, $\{tu\}$ et $\{u^2, t\}$, et tout diviseur d'ordre $< 2^\alpha$ divise un $g_{2^{\alpha-1}}$ (*E.*, 75). Les diviseurs de $\{u^2, t\}$, qui est abélien, sont, d'après ce qu'on a vu au début de cette Note, $\{u^2\}$, $\{u^2 t\}$ $(1 \leq r \leq \alpha - 1)$, $\{u^{2s}, t\}$ $(1 \leq s \leq \alpha)$. Donc X, qui ne contient pas $m = u^{2^\alpha}$, ne peut être qu'un des groupes $\{mt\}$, $\{t\}$. Mais ils ne sont pas normaux (u transforme t en mt). Donc $X = 1$.

Γ_3 *a des équations de la forme* $u^{2^\alpha} = t^2 = m^2 = 1$, $tut = um$, $um = mu$, $tm = mt$. En écrivant a_1 pour u, a_2 pour m, et b pour t, elles coïncident avec (12) de *E.*, 140 (pour $\zeta = 0$). Donc Γ_3 est un $g_{2^{\alpha+2}}$ ayant pour central le $g_{2^{\alpha+1}}$ abélien $\{u^2, t, m\} = E$. Si X ne divise pas E, soit Y son p.g.c.d. avec E. On aura $X = Y + ue\,Y$, e étant dans E, et $u^2 e^2$ dans Y. De plus, X étant normal, on a $t.ue\,Y.t = ue\,Y$, d'où $uem\,Y = ue\,Y$. Donc Y devrait contenir m contre l'hypothèse. *Donc* X *divise* E. D'après l'étude de Γ_1, les diviseurs de Γ_3 contenus dans E et ne contenant pas m sont $\{u^{2^\alpha}\}$, $\{u^{2^\alpha} t\}$, $\{u^{2^\alpha} m\}$, $\{u^{2^\alpha} tm\}$ $(1 \leq r \leq \alpha)$; $\{u^{2^\alpha}, t\}$, $\{u^{2^\alpha}, tm\}$, $\{u^{2^\alpha} t, tm\}$, $\{u^{2^\alpha} m, t\}$ $(1 \leq r < \alpha)$. Mais u transforme $\{u^{2^\alpha} t\}$, $\{u^{2^\alpha}, t\}$ et $\{u^{2^\alpha} t, tm\}$ en $\{u^{2^\alpha} tm\}$, $\{u^{2^\alpha}, tm\}$ et $\{u^{2^\alpha} tm, t\} = \{u^{2^\alpha} m, t\}$ respectivement. *Donc* X *a l'une des formes* $\{u^{2^\alpha}\}$, $\{u^{2^\alpha} m\}$ $(1 \leq r \leq \alpha)$.

Parmi les diviseurs $> B$ non normaux dans A', ceux qui correspondent, pour $p > 2$, à $\{t\}$ et à $\{tm\}$ présentent un intérêt particulier. Je les désignerai par B^1 et B^2.

On a vu que, *pour* $n \geq 5$, *tout diviseur normal de* B, A_0, A ou A' *ou non contenu dans* I *est* $\subset B$ (I, **48**), et le cas $n = 2$ a été traité (I, **25**, **39**). Il ne reste plus à considérer que les cas $n = 3, 4$.

Soit d'abord $n = 4$ et $\psi = 0$. *Alors* $\mathfrak{M} = \mathfrak{P}\mathfrak{S}$ *est isomorphe à* $[\mathfrak{M}] = \mathfrak{O}_1 \mathfrak{O}_2$ (*cf.* I, **40**), $V_{12\lambda}$ *et* $V_{21\lambda}$ *de* $\mathfrak{X}$ *correspondant respectivement à* $z + \lambda$ *et à* $\frac{z}{\lambda z + 1}$ *de* $\mathfrak{O}_2$, $U_{12\lambda}$ *et* $W'_{21\lambda}$ *à* $u + \lambda$ *et à* $\frac{u}{\lambda u + 1}$ *de* $\mathfrak{O}_2$.

En faisant encore correspondre $\mathfrak{m}_\lambda = \begin{vmatrix} z & \lambda^{-1} z \\ u & \lambda u \end{vmatrix}$ (je poserai $\mathfrak{m}_{-1} = 1$) *à* $m_{2\lambda}$, $1 = \begin{vmatrix} z & u \\ u & z \end{vmatrix}$ *à* t_2, *et* $\mathfrak{g} = \zeta u$ *de* ζ_0 *à* γ ($\mathfrak{g}_0^2$ *répond à* m_{11}, $m_{21} = [\zeta^{-1}, \gamma^2]$), *on voit que* $[\mathfrak{A}^0] = \{[\mathfrak{M}], \mathfrak{m}_X\}$ *est isomorphe à* $\mathfrak{A}$, $[\mathfrak{A}] = \{[\mathfrak{A}], 1\}$ *à* $\mathfrak{A}$, *et* $[\mathfrak{A}'] = [\mathfrak{A}] + \mathfrak{m}_0 [\mathfrak{A}]$ *à* $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} + \gamma \mathfrak{A}$. *Comme* $\mathfrak{m}_{-1}$ *est la substitution*

$\mathfrak{g}_z = \{z\}$ *de* $\mathfrak{L}_z$, *on voit encore que* $\{\mathfrak{X}, \gamma\}$ *et* $\{\mathfrak{X}, t_2\gamma t_2\}$ *sont isomorphes à* $\{\mathfrak{L}_z, \pi\}$, *et que* $[\mathfrak{A}'] = \{\mathfrak{L}_z \mathfrak{L}_u, 1\}$.

D'après la correspondance des générateurs de A et de $[\mathfrak{A}]$ et les formules de I, **49**, $R_{12'}$ correspond à $-\lambda^2 z^{-1}$, donc $S_{12'}$ à $1 - \lambda^2 z^{-1} = \lambda^2 u^{-1}$ [en particulier $m_{1,-1} T_{12}$ à $-z^{-1}$, et $m_{1,-1} T_{12} t_{12}$ à $-u^{-1}$ (I, **28**)], t_{12} à $-z^{-1}(-u^{-1})$, $m_{1'}$ à $\lambda^2 z(\lambda^2 u)$, $m_{2'}$ à $\lambda^2 z^{-2}(\lambda^{-2} u)$, $m_{1'} m_{2'}^{-1}$ à $\lambda^{-2} z$, $m_{1'} m_{2'}$ à $\lambda^2 u$.

Inversement $\frac{\alpha z + \alpha'}{\beta z + \beta'} = s_z$ ($\alpha\beta' - \beta\alpha' = k^2$, k étant réel) et $s_u = s_{z^{-1}}$ répondent respectivement :

pour $\beta \neq 0$, à $DV_{12'\frac{\beta - \alpha}{\beta}} V_{21'\frac{\beta}{\alpha}} V_{12'\frac{\alpha - \alpha'}{\beta}}$ et à $DU_{12'\frac{\beta - \alpha}{\beta}} W_{21'\frac{\beta}{\alpha}} U_{12'\frac{\alpha - \alpha'}{\beta}}$;

pour $\beta = 0$, à $DV_{1'\frac{\alpha}{\alpha'}} m_{1'\frac{\alpha}{\alpha'}} m_{2'\frac{\alpha}{\alpha'}}^{-1}$ et à $DU_{1'\frac{\alpha}{\alpha'}} m_{1'\frac{\alpha}{\alpha'}} m_{2'\frac{\alpha}{\alpha'}}$;

La forme générale des substitutions de $[\mathfrak{A}']$ étant $s_z s_u m_X^{\varepsilon} t'^{\varepsilon'} g^{\varepsilon''}$ (ε, ε', $\varepsilon'' = 0$ ou 1), on tire de là la forme générale des substitutions de A'.

Pour $\pi > 3$, *les diviseurs normaux de* $[\mathfrak{W}]$ *sont* $1, \mathfrak{v}_z, \mathfrak{v}_u, [\mathfrak{W}]$ (*E.*, **72**), *et ceux de* B *sont* 1, D, **V**, **W**, B.

Pour $\pi = 2$ *ou* 3, $\mathfrak{v}_z$ *est isomorphe au* g_6^3 *ou au* g_{12}^4 *respectivement. En désignant alors par* $\mathfrak{v}, \mathfrak{w} = \{\mathfrak{v}\}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} = t_2 \mathbf{v} t_2$ *les diviseurs normaux sylowiens de* $\mathfrak{v}_z$, $\mathfrak{v}_u$, **V**, **W** *respectivement* $\left[\text{pour } \pi = 2,\ \mathbf{v} = \left\{\frac{z+1}{z}\right\}\right.$, *et pour* $\pi = 3$, $\mathbf{v} = \left\{\frac{-1}{z}, \frac{z+1}{z-1}\right\}$ (*S.*, **83**) ; *d'où, pour* $\pi = 2$, $\mathbf{v} = \{V_{121} V_{2(1)}\}$, *et pour* $\pi = 3$, $\mathbf{v} = R_{121}, V_{121} V_{2(1)}$; $\mathbf{v}$ *est isomorphe au* g_8 *des quaternions, et* $R_{121}^2 = (V_{121} V_{2(1)})^2 = d\Big]$, *les diviseurs normaux de* $[\mathfrak{W}]$ *sont* 1, **v**, **w**, **vw** $= [\mathfrak{W}]$, $\mathfrak{v}_z$ **w**, **v** $\mathfrak{v}_u$, $[\mathfrak{W}]$, *et ceux de* B *sont* 1, D, **v**, **w**, **vw** $=$ P, **Vw**, **Wv**, B.

En effet, pour $\pi > 3$, les diviseurs $\leq$ D de B correspondant aux diviseurs normaux de $[\mathfrak{W}]$ sont ceux de l'énoncé. Il reste à voir si à $\mathfrak{v}_z$, $\mathfrak{v}_u$ ne répondent pas dans B des diviseurs normaux X, $Y = t_2 X t_2$ premiers à D. Or cela est impossible, car B serait alors le produit direct de XY par D, tandis que B contient des s_1 de carré d, par exemple la substitution sr où $r = d$ et où $s_{1,1} = (x_2, -x_1)$ (I, **40**). Pour $\pi = 3$, **V** est un g_{24} ayant un seul g_8 qui contient D (*S.*, **83**). Pour $\pi = 2$, D $= 1$ (si alors $\mathfrak{v} = \{\mathfrak{v}\}$ et

$\omega = \{\omega\}$, $\{\rho\omega\}$ n'est pas normal, car une s_z de $\mathfrak{v}_z$ transforme ω en $\rho^2\omega$).

Les diviseurs normaux de A^0 *autres que* A^0 *sont ceux de* B *pour* $\pi \geqq 2$ (*pour* $\pi = 2$, $A^0 = B$).

En effet, soient X un diviseur normal de A^0 : Y le p. g. c. d. de X, B ; $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ les correspondants de X, Y dans $[\mathfrak{A}^0]$. Si $X = Y$, X est un des diviseurs normaux de B, déjà déterminés et tous normaux dans A^0. *Soit donc* $X > Y$. Si $Y = D$, $[\mathfrak{A}^0]$ est produit direct de $[\mathfrak{B}]$ par $\mathfrak{X}$, et l'action $\mathfrak{L}_z$ de $[\mathfrak{A}^0]$ sur z, qui est primitive, serait aussi produit direct de $\mathfrak{v}_z$ par un g_2, ce qui ne se peut (*S.*, 62). *Donc* Y *est* $> D$. Si $Y = B$, on a $X = A^0$. *Soit donc* $Y < B$. $\mathfrak{X}$ a la forme $\{Y, \beta\omega_\varepsilon\}$, β étant dans $[\mathfrak{B}]$, et $\beta\omega_\varepsilon$ ayant son carré dans $\mathfrak{Y}$. Soit $\beta = \alpha_z\beta_u$, α_z étant dans $\mathfrak{v}_z$ et β_u dans $\mathfrak{v}_u$. *Si* $\pi > 3$, $\mathfrak{Y} = \mathfrak{v}_z$ ou $\mathfrak{v}_u$, et pour que $\mathfrak{X}$ fût normal dans $[\mathfrak{A}^0]$, il faudrait que $\beta_u(Nu)$ fût normale dans $\mathfrak{L}_u$ pour $\mathfrak{Y} = \mathfrak{v}_z$, et $\alpha_z(N^{-1}z)$ dans $\mathfrak{L}_z$ pour $\mathfrak{Y} = \mathfrak{v}_u$. Or, cela n'a pas lieu. *Soit* $\pi = 3$. Ici encore $\mathfrak{Y}$ ne peut être un des groupes $\mathfrak{v}_z$, $\mathfrak{v}_u$. Si $\mathfrak{Y} = \mathfrak{e}$, l'action de $\mathfrak{X}$ sur z est un g_3 qui devrait être normal dans le g_{21}^1 $\mathfrak{L}_z$. Donc $\mathfrak{Y} \neq \mathfrak{e}$, et, pour la même raison, $\mathfrak{Y}$ ne peut être un des groupes $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{v}_{2z}$, $\mathfrak{v}_{2u}$.

A *a toujours les diviseurs normaux* 1, D, B, A^0, $B^1 = \{B, t_1\}$, $B^2 = \{B, t_1 m_{1\varepsilon}\}$, A. *Pour* $\pi > 3$, *il n'y en a pas d'autres. Pour* $\pi < 3$, *le seul autre diviseur normal est* P.

En effet, soit X un diviseur normal de A ; X^0 le p. g. c. d. de X, A^0 ; $\mathfrak{X}$ le correspondant de X dans $[\mathfrak{A}]$, et convenons que si une lettre affectée de l'indice z désigne une substitution de $\mathfrak{L}_z$, la même lettre affectée de l'indice u désignera la substitution de mêmes coefficients de $\mathfrak{L}_u$. *Si* $X = X_0$, X, normal dans A^0 et dans A est, pour $\pi > 3$, un des groupes 1, D, B, A_u, et pour $\pi = 3$ un des groupes 1, D, P, B, A^0. *Soit donc* $X > X_u$. *Si* $X^0 = D$, $[\mathfrak{A}]$ est produit direct de $[\mathfrak{A}^0]$ par $\mathfrak{X}$ qui est d'ordre 2, et dont le générateur σ a la forme $\omega_\varepsilon^\varepsilon\beta$, ε étant égal à 0 ou à 1, et β étant dans $[\mathfrak{A}^0]$. Soit $\omega_\varepsilon^\varepsilon\beta = \alpha_z\beta_u$, α_z étant dans $\mathfrak{L}_z$, β_u dans $\mathfrak{L}_u$, et les déterminants de α_z, β_u ayant tous deux le caractère quadratique $(-1)^\varepsilon$. La condition $\sigma\iota = \iota\sigma$ donne $\alpha_u\beta_z = \alpha_z\beta_u$, d'où $\beta = \alpha_z$. La condition $\sigma\gamma_z = \gamma_z\sigma$, γ_z étant quelconque dans $\mathfrak{v}_z$, donne $\alpha_z\alpha_u\gamma_z = \gamma_z\alpha_z\alpha_u$, d'où $\gamma_z = \gamma_z\gamma_u$, et $\gamma_u = 1$ contre l'hypothèse. *Donc* X_u *est* $> D$. *Si* X^0 *est* $= B$, X est

un des groupes A^0, B^1, B^2, A. *Soit donc* $X^0 < B$, *donc* $\pi \leqq 3$. Alors $X^0 = P$, et $\mathfrak{X}$ dérive de $\mathfrak{P}$ et d'une substitution σ de la même forme $|\alpha_z \beta_u|$ que tout à l'heure. $|\sigma|$ devant être dans $\sigma\mathfrak{P}$, on a $\alpha_u \beta_z = \alpha_z \beta_u \varphi_z \gamma_u$, φ_z étant dans $\mathfrak{z}$ et γ_u dans $\mathfrak{u}$, d'où $\beta_z = \alpha_z \varphi_z$, $\beta_u = \alpha_u \gamma_u^{-1}$, $\gamma_u = \varphi_u^{-1}$. Donc $\sigma = |\alpha_z \alpha_u \varphi_u|$. En désignant par μ_z une substitution quelconque de $\mathfrak{v}_z$, $\mu_z^{-1} \sigma \mu_z$ doit être dans $\sigma\mathfrak{P}$, donc $\alpha_z \alpha_u \varphi_u \mu_z$ dans $\mu_u \alpha_z \alpha_u \varphi_u \mathfrak{P}$, donc $\alpha_z \mu_z$ dans $\alpha_z \mathfrak{z}$, donc μ_z dans $\mathfrak{z}$, contre l'hypothèse.

Les diviseurs normaux de A' *qui sont* $< A$ *ou* $> B$ *sont connus. Si* $\pi > 3$, *il n'y en a pas d'autres. Si* $\pi = 3$, *le seul autre diviseur normal de* A' *est* P (*si* $\pi = 2$, $A' = A$).

En effet, soient X' un diviseur normal de A' non $< A$ et non $> B$; X son p. g. c. d. avec A; $\mathfrak{X}'$ et $\mathfrak{X}$ les correspondants de X' et X dans $[\mathfrak{A}']$. *Si* $X' = X$, on a, d'après ce qui précède, $\pi \leqq 3$ et $X' = P$. *Soit donc* $X' > X$. *Si* $X \leqq D$, p est > 2, sans quoi $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$, et $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} = 1$, d'où $X' = A$. Donc $[\mathfrak{A}']$ est produit direct de $[\mathfrak{A}]$, $\mathfrak{X}'$. Donc $\mathfrak{X}'$ est engendré par un $s_2 \sigma$ de la forme $|\alpha_z \beta_u|$, β étant dans $[\mathfrak{B}]$, c'est-à-dire de la forme $|\varepsilon^s \alpha_z \beta_u|$, α_z étant dans $\mathfrak{L}_z$, β_u dans $\mathfrak{L}_u$, et leurs déterminants ayant des caractères quadratiques différents. Mais alors $|\sigma| = |\varepsilon^s \alpha_z \beta_u|$ est $\mathfrak{z}\sigma$. *Donc* X *est* $> D$ *et* $< B$. *Donc* π *est* $= 3$, et $\mathfrak{X}'$ dérive de $\mathfrak{P}$ et d'une substitution σ de la même forme $|\varepsilon^s \alpha_z \beta_u|$ que tout à l'heure. $|\sigma|$ devant être dans $\sigma\mathfrak{P}$, on obtient, comme dans l'étude des diviseurs normaux de A, $\beta_u = \alpha_u \varphi_u$, φ_u étant dans $\mathfrak{z}$. Mais alors les déterminants de α_z, β_u auraient le même caractère.

Soit $n = p$, φ *étant irréductible. Alors* $A' = BD$ *et* $\mathfrak{W} = \mathfrak{A}^0 = B = U(2, \pi^2)$ (I, **40**). *Aux substitutions* $P_{1,2}(\varphi)$ *qui engendrent* $\overline{B}$ *quand* φ *parcourt* $\mathfrak{E}'$ *répondent respectivement dans* $\mathfrak{v}_z(2, \pi^2)$, *par la correspondance indiquée entre ces deux groupes* (*I.c.*) z *et* φ *et* $\frac{z}{1 - \varphi z}$. Or la $s_2 = z^{-1}$ transforme ces deux substitutions l'une dans l'autre. *Donc* $[\mathfrak{A}] = \mathfrak{v}_z(2, \pi^2)$, z *est isomorphe à* $\mathfrak{A} = B$, t_1 *à* z^{-1} $(\varphi) = \varphi^{-1}$ *répondant à* t_1, *et la correspondance des éléments de* $\mathfrak{v}_z$, B *restant la même.* La substitution $\mu = \xi_z$ (ξ étant une racine de $\xi^{\pi^2 - 1} = 1$) est hors de $\mathfrak{v}_z(2, \pi^2)$. Elle transforme $z \to \varphi$ en $z \to \xi\varphi$, $\frac{z}{1 - \varphi z}$ en $\frac{z}{1 - \varphi\xi^{-1} z}$, z^{-1} en $(\xi^{-1} z)^{-1}$, $(\xi^{-1} z)^{-1}$ répondant à $t_1 m_1^{-1}$, et $\mu^2 = \xi^2 z$ à

$\mathrm{I}m_{1\xi}m^{1}_{2\xi}\pi = \mathrm{I}\gamma^2$. *Donc* $[\mathcal{A}'] = [\mathcal{A}] + \gamma[\mathcal{A}]$ *est isomorphe à* $\mathcal{A}' = \mathcal{A} + \gamma\mathcal{A}$, γ *répondant à* γ, *et la correspondance des éléments de* $[\mathcal{A}]$, $\mathcal{A}$ *restant la même.* On remarquera que $[\mathcal{A}']$ contient les trois diviseurs normaux d'indice 2 non isomorphes (*cf.*, *S.*, 92) $[\mathcal{A}]$, $\mathcal{L}_z(2, \pi^2)$, $\{\mathcal{V}_z(2, \pi^2), \xi z\}$, $[\mathcal{A}']$ $[\mathcal{V}_z(2, \pi^2)$ étant un g_2 non cyclique.

$dm_{1\xi}$ répond à ιz, $dm_{2\xi}$ $(\sigma^{\pi-1} = 1)$ à σz, dt_{12}, à $-z^{-1}$, $m_{1\varepsilon}m_{2\eta}$ à $\chi^2 z$. (*cf.*, I, **51**), donc $dt_{01}m_{1\varepsilon} = dt_{12}m_{1\varepsilon}m_{2\eta}$ à $-\chi^2 z^{-1}$.

Inversement, $\dfrac{\alpha z + \alpha'}{\beta z + \beta'}$ $(\alpha\beta' - \beta\alpha' = k^2)$ répond, pour $\beta \neq 0$, à $\mathrm{P}_{1\eta}\mathrm{O}_{1,\beta\alpha}\mathrm{P}_{1\xi}(\dot{\beta}\mu = \dot{\beta}' - k, \dot{\beta}\rho = \dot{\alpha} - k)$, et pour $\beta = 0$, à $d\mathrm{P}_{1\alpha\alpha}m_{1\alpha 1}$.

Les diviseurs normaux de A^0 *sont* 1, D, B, $\mathrm{A}^0 = \mathrm{BD}$. *Ceux de* A *sont* 1, D, B, A^0, B^1, B^2, A. Il suffit de montrer que tout diviseur normal X de A non $\leq$ D est $\geq$ B. Or si X ne contient pas B, il est premier à B qui est simple. Donc BX est le produit direct de B par X, et X devrait diviser D (I, **39**).

Les diviseurs normaux de A′ *qui sont* $\geq$ I *ou* $\geq$ B *sont connus. Il n'y en a pas d'autres.* En effet, soient X′ un diviseur normal de A′ non $\leq$ I et non $\geq$ B; X son p.g.c.d. avec A; $\mathcal{X}'$ et $\mathcal{X}$ les correspondants de X′ et X dans $[\mathcal{A}']$. D'après ce qui précède, X′ *est* $>$ X, *et* X $\geq$ D. Donc p est > 2, sans quoi $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$, et $\mathcal{X}' = \mathcal{X} = 1$, d'où X′ = I. Donc $[\mathcal{A}']$ est produit direct de $[\mathcal{A}]$, $\mathcal{X}'$. Donc $\mathcal{X}'$ est engendré par une $s_2\sigma$ de (ξz) $[\mathcal{A}]$ donc de la forme $(\dot{z})^\varepsilon\left(\dfrac{\alpha z + \alpha}{\beta z + \beta'}\right)$, le déterminant $\Delta = \alpha\beta' - \beta\alpha'$ étant non carré dans $\mathcal{E}'$. Or la condition $(\dot{z})\sigma(\dot{z}) = \sigma$ donne $\left(\dfrac{\dot{\alpha} z + \dot{\alpha}'}{\dot{\beta} z + \dot{\beta}'}\right) = \left(\dfrac{\alpha z + \alpha}{\beta z + \beta'}\right)$ d'où $\dot{\alpha} = \rho\alpha$, $\dot{\alpha}' = \rho\alpha'$, $\dot{\beta} = \rho\beta$, $\dot{\beta}' = \rho\beta'$. On tire de là $\rho^{\pi+1} = 1$ et $\dot{\Delta} = \rho^2\Delta$: or la seconde de ces relations donne $\rho^{\pi+1} = \Delta^{\frac{\pi-1}{2}} = -1$ ce qui est contradictoire.

Soit $n = 3$ *et* $\psi = cx^2$ $(p > 2)$. Alors $\mathrm{A} = \mathrm{A}^0\mathrm{D}$; $\mathrm{A}^0 = \mathcal{L}(2, \pi)$. *Les complexes* $\mathrm{D}t_0$, $\mathrm{D}t_1$, $\mathrm{D}m_{1\varepsilon}$, $\mathrm{D}\mathrm{V}_{0\varepsilon\varepsilon}$, $\mathrm{D}\mathrm{U}_{0\varepsilon\varepsilon}$ *correspondant à* $-z$, $\dfrac{-z}{\lambda z}$, λz, $\dfrac{z}{\lambda z - 1}$, $z - c\lambda$ *respectivement*: $\mathrm{B} = \mathrm{W}_0 = \mathcal{O}(2, \pi)$.

Si $\pi > 3$, *tout diviseur normal de* A, A^0 *ou* B *non* $\leq$ D *est* $\geq$ B. *Si* $\pi = 3$, B *est isomorphe au* g^1_{12} *et* A *au* g^2_{12}. *Soit* $\mathrm{P} = t_1, m_{1\varepsilon}$ (*correspondant à* $\{z^{-1}, -z\}$ *de* $\mathcal{O}$) *le* g_2 *de* B. *Les diviseurs normaux de* B *sont* 1, P, B. *Ceux de* A^0 *sont* 1, P, B, A^0. *Ceux de* $\mathrm{A} = \mathrm{A}^0\mathrm{D}$ *sont*

1, P, B, A^0, D, PD, BD, A. *Si* $\pi = 2$, $A = A^0 = B$ *est isomorphe au* g_6^1. *Son* g_1 P *est engendré par* $V_{011}U_{011}$ (*qui répond à* $\frac{z}{z+1}$ *de* $\mathfrak{v}$) ; *ses diviseurs normaux sont* 1, P, B. (*Voir*, I, **40**).

Les diviseurs normaux de A′ *qui sont* I *et* B *sont connus. Si* $\pi > 3$, *il n'y en a pas d'autres. Si* $\pi \leqq 3$, $A' = A$.

En effet, soit, pour $\pi > 3$, X′ un diviseur normal de A′ non $\leqq$ I et non $\geqq$ B, et X le p.g.c.d. de X′, A. D'après ce qui précède on peut supposer $X' > X$ et $X \leqq D$. Alors X′ est premier à A^0, et A^0X' est produit direct de A^0 par X′. Mais alors X′ serait $\leqq$ I (I, **39**).

Sur les racines primitives et les systèmes de bases et indices dans le corps quadratique général;

PAR Mme VERA MYLLER-LEBEDEFF.

On sait qu'un idéal premier P d'un corps algébrique quelconque possède des racines primitives au nombre de $\varphi(p^f - 1)$. On ne sait pas si les racines primitives existent ou non, si le module est un idéal quelconque (1). Cette question est étudiée dans ce qui suit pour le corps quadratique général $R(\sqrt{m})$. Les trois corps où l'étude analogue a été faite, mais où l'on n'a pas besoin d'introduire les idéaux, à savoir le corps rationnel (2), le corps $R(i)$ (3) et le corps $R(\sqrt{-3})$ (4), y sont compris comme cas particuliers. On peut résumer les résultats ainsi :

1° *Puissances d'un idéal premier.* — Les racines primitives n'existent que pour une seule catégorie, notamment pour les puissances d'un idéal premier du premier degré différent de son conjugué, et provenant de la décomposition d'un nombre premier $p = 2$. Si l'idéal provient de la décomposition du nombre 2, les racines primitives n'existent pas pour les puissances supérieures à la deuxième. Dans le cas d'un idéal du second degré, il n'y a pas de racines primi-

(1) HILBERT, *Jahresber. d. D. M. V. IV* (1897-98), *Theorie der algebr. Zahlkörper*, § 9.

(2) GAUSS, *Disqu. Arithm.*, n° 89-92, et DIRICHLET, *Zahlentheorie Suppl. V*.

(3) DIRICHLET, *Werke I. Theorie der complexen Zahlen*, § 2.

(4) Fl. VASILESCO, *Étude des racines prim. dans le corps de la racine cubique de l'unité* (*Bulletin de l'Académie Roumaine*, 1901).

tives pour les puissances supérieures à la première. Quant au cas d'un idéal du premier degré égal à son conjugué (idéal premier ambige), les racines primitives cessent d'exister à partir de P^3 pour $p \neq 2$ et à partir de P^4 pour $p = 2$.

2° *Idéal composé quelconque.* — Les racines primitives existent si l'idéal contient seulement deux facteurs premiers entre eux, dont un est engendré par le nombre 2 (*voir* le théorème XX pour l'énoncé précis).

Pour les idéaux qui n'ont pas de racines primitives, on peut généraliser les notions de système de bases et indices introduites par Dirichlet pour les corps R et R (i) [1]. Soit le module $N = P^\pi$. On appelle *base de représentation des restes* un système de plusieurs nombres $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ tels que tous les restes premiers avec le module soient congrus aux produits $\alpha^a \beta^b \ldots \lambda^l$ par rapport au module, $a, b, \ldots, l$ variant dans certaines limites qui dépendent du module. Les nombres $a, b, \ldots, l$ s'appellent *indices du reste*. Pour $N = P^\pi P'^{\pi'} \ldots$, on définit comme base et indices la totalité des bases et indices par rapport aux facteurs $P^\pi, P'^{\pi'}, \ldots$ premiers entre eux.

Le maximum d'un indice a est l'exposant auquel la base correspondante α appartient par rapport au module P^π. On peut donc établir les bases en partageant les restes premiers avec P^π en catégories $\alpha + \alpha_i$ où α est premier avec P et α_i un multiple de P^i non divisible par P^{i+1} et en déterminant les exposants auxquels les nombres $\alpha + \alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ appartiennent (mod P^π). De cette façon, on construit les bases pour les puissances d'un idéal premier du premier degré différent de son conjugué et les puissances d'un idéal du second degré. Mais dans certains cas d'idéaux premiers ambiges, à savoir :

$$R = (3, 6) \quad \text{resp.} \quad (3, 1 + 6) \quad \left(\frac{d}{3}\right) = 0 \quad \left(\frac{m}{3}\right) = 1 \; (3)$$

et

$$R = (2, 5) \quad \text{resp.} \quad (2, 1 + 5) \quad \left(\frac{d}{2}\right) = 0.$$

---

[1] Dirichlet, *Zahlenth.*, § 130, 131, et *Theorie d. compl. Zahlen*, § 2.

il arrive que les bases ainsi établies ne peuvent représenter que $\frac{1}{3}$ resp. $\frac{1}{4}$ des restes. On est alors obligé d'introduire la notion de reste primaire. On définit comme primaire un nombre congru à un nombre rationnel (mod R^2), pour $R^2 = (3)$ et congru à ± 1 (mod R^2), pour $R^2 = (2)$. Pour avoir tous les restes premiers avec le module, on n'a qu'à compléter les bases par certains nombres non primaires (ω ou $1 + \omega$) qui appartiennent à l'exposant 3 (mod R^2), resp. à l'exposant 4 (mod R^2).

I. — Idéaux premiers du premier degré différents de leurs conjugués.

Premier cas : $\left(\frac{d}{p}\right) = 1 \quad (p = 2 \text{ ou } 3)$.

On représente ces idéaux par les bases canoniques

$$P = (p, a + \sqrt{m})$$
$$P = \left(p, \frac{a + \sqrt{m}}{2}\right) \qquad (m \equiv a^2 \pmod{p}),$$

suivant que m est $\equiv 2$ ou $3 \pmod 4$, ou bien $\equiv 1 \pmod 4$. Mais s'apercevant que dans le dernier cas on a $\omega = \frac{1 + \sqrt{m}}{2}$ et $a \equiv 2a' + 1$, tandis que dans les deux premiers cas on a $\omega = \sqrt{m}$, on peut poser pour m quelconque

$$P = (p, a + \omega),$$

où $m \equiv a^2$, (p) pour $m \equiv 2$ ou 3, (4) et $m \equiv (2a + 1)^2$, (p) pour $m \equiv 1$, (4).

Lemme. — *P^π a pour base canonique $(p^\pi, c + \omega)$ où $c \equiv a$, (p).*

Le lemme étant vrai pour P, admettons-le pour $P^{\pi-1}$. Soit

$$P^{\pi-1} = (p^{\pi-1}, b + \omega) \qquad (b \equiv a, (p)).$$

---

(1) Pour les notations, *voir* Hilbert, *loc. cit.*, § 60, ou L. W. Reid, *Elements of the Theory of Algebraic Numbers*.

On aura

$$P^\pi = [p^\pi, p^{\pi-1}(a+\omega), p(b+\omega), ab + (a+b)\omega + \omega].$$

P^π contient le nombre $c+\omega$, car on peut trouver x et y rationnels, tels que

$$px + (a-b)y = 1 \qquad (m = 1, \text{ou } 1, 4)$$

d'où

$$c = pbx + (ab+m)y = b + (m-b)y = b.(p) = a.(p)$$

ou bien tels que

$$px + (a+b+1)y = 1 \qquad (m = 1, 4)$$

d'où

$$c = pbx + \left(ab + \frac{m-1}{4}\right)y = b + \frac{m-(2b-1)}{4}y = a.(p).$$

$(p^\pi, c+\omega)$ est une base canonique, car $n(P^\pi) = p^\pi$.

Théorème I. — *Une racine primitive du module rationnel p^π l'est aussi pour $P^\pi = (p^\pi, c+\omega)$ et inversement.*

Soit g une racine primitive de p^π, on a

$$g(P^\pi) = p^{\pi-1}(p-1)^{\omega} = c^{\pi};$$

les nombres

$$1, \quad g, \quad g^2, \quad \ldots, \quad g^{(P^\pi-1)}$$

sont incongrus (mod P^π), car, d'après le lemme, la relation

$$g^{\pi} = g^{\pi}(P^\pi) \qquad (\text{et } g^{\pi}(P^\pi) = 1)$$

donnerait

$$g^{\pi-1} = 1 = Mp^\pi \text{ [1]},$$

contrairement à l'hypothèse. Soit inversement g une racine primitive de P^π; d'après le lemme on peut supposer g entier et rationnel. Si l'on avait

$$g^{\pi} = 1 \quad (p^\pi) \qquad (\text{et } g^{\pi} = 1)$$

il en résulterait

$$g^{\pi} = 1 \quad (P^\pi).$$

---

[1] Nous désignerons partout le multiple d'un nombre a par Ma, M étant rationnel ou algébrique suivant le cas.

En nous rappelant des théorèmes sur les racines primitives du module rationnel p^π, nous pouvons donc déduire :

THÉORÈME II. — *Toutes les racines primitives des puissances supérieures d'un idéal premier* P *sont tous les individus des* $(p-1)\varphi(p-1)$ *classes de nombres différents par rapport au module* p^2.

Nous pouvons ajouter cette remarque. Le nombre de racines primitives de P^π incongrues suivant le module est $\varphi(p^{\pi-1}(p-1))$. D'après le théorème précédent, c'est vrai pour P^2. Admettons-le pour $P^{\pi-1}$ et soit a une racine primitive de $P^{\pi-1}$,

$$b = a + Mp^{\pi-1}$$

le sera aussi pour P^π. On obtient les b incongrues suivant P^π en donnant à Mp valeurs incongrues (mod p).

Second cas : $\left(\frac{d}{2}\right) = 1$, $m \equiv 1, (8)$; $P = (2, \omega)$.

On constate aisément comme dans le lemme que

$$(2, \omega)^\pi = (2^\pi, c + \omega),$$

c étant pair. Il suit de cette représentation canonique que les racines primitives de $(2, \omega)^\pi$ le sont aussi pour 2^π, d'où l'on déduit :

THÉORÈME III. — $(2, \omega)$ a une seule racine primitive $= 1$, $(2, \omega)^2$ aussi une seule $= 3$, les puissances supérieures de $(2, \omega)$ n'en ont pas du tout.

THÉORÈME IV. — *Tout nombre* μ *premier avec* $(2, \omega)^\pi$ *satisfait à la congruence*

$$\mu = 1 + 4\alpha^{2^\pi} \quad [(2, \omega)^\pi],$$

où α *est un nombre de la forme* $4M + 1$, M *impair rationnel*, $0 \leq a \leq 2^{\pi-1}$ et $0 \leq c \leq 2$; *autrement dit* $(-1, \alpha)$ *est une base pour le module* $(2, \omega)^\pi$.

Il suit de la représentation canonique qu'on peut prendre comme

système complet de restes (mod $(2, \omega)^{\pi}$) la suite $0, 1, \ldots, 2^{\pi} - 1$. Les restes premiers avec le module sont de la forme $8M \pm 1$, $8M \pm 3$. On voit immédiatement que ceux de la forme $8M \pm 3 = 4M_1 \pm 1$, M_1 impair, appartiennent à l'exposant $2^{\pi-2}$ (mod $(2, \omega)^{\pi}$), tandis que ceux de la forme $8M \pm 1$ appartiennent aux exposants plus petits. Mais $\varphi[(2, \omega)^{\pi}] = 2^{\pi-1}$, et la moitié des restes impairs, *est* $\equiv 1$, (4), la moitié est $\equiv -1$, (4). Le théorème est donc démontré.

II. — Idéaux premiers du second degré.

$$\left(\frac{d}{q}\right) = -1, \quad Q = (q) \quad \text{et} \quad \left(\frac{d}{q}\right) = -1, \quad Q = (2), \quad m \equiv 5, (8).$$

Théorème V. Q^{π}, $\pi > 1$, *n'a pas de racines primitives : chaque nombre* μ *premier avec* Q^{π} *satisfait à*

$$\mu^{\varphi(Q^{\pi})} \equiv 1, (Q^{\pi}).$$

D'après le théorème de Fermat pour les idéaux, un nombre μ premier avec Q^{π} satisfait à

$$\mu^{\varphi(Q^{\pi})} \equiv 1, (Q^{\pi})$$

ou

$$\mu^{\varphi(Q^{\pi})} \equiv 1 + M_1 q^{\pi-1}.$$

Il en suit pour $q = 2$ et $\pi > 2$

$$\mu^{\varphi(Q^{\pi})} \equiv (1 + M_1 q^{\pi-1})^{2} \equiv 1 + M_1 q^{\pi} \equiv 1, (Q^{\pi}) \qquad (\pi > 1)$$

tandis que

$$\varphi(Q^{\pi}) \equiv q^{\pi} \equiv Q^{\pi-1}.$$

Pour établir les bases on doit distinguer deux cas

Premier cas $\qquad \left(\frac{d}{q}\right) = -1 \qquad [q = 2, \; Q = (q)].$

Soit γ une racine primitive de Q et α_i comme partout dans ce qui suit, un nombre divisible par la puissance $i^{\text{ième}}$ de l'idéal en question (ici Q), mais non divisible par la puissance $(i+1)^{\text{ième}}$.

Théorème VI. — *On peut déterminer α_1 tel que le nombre $\alpha = \gamma - \alpha_1$ appartienne à l'exposant $q^{\pi-1}(q^2-1)$ (mod Ω). Le nombre $\beta = 1 + \alpha_1$ appartient à l'exposant $q^{\pi-1}$.*

Observons qu'on a $\alpha_1 = \alpha$ et $\alpha_i = \alpha_i$ si $i \leq b$. $q^b - 1$ est la plus petite puissance de γ telle que

$$\gamma^{q^b-1} = 1 \ (\Omega) = 1 - \alpha_1.$$

On a

$$\alpha^{q^b-1} = \gamma^{q^b-1}(q^b-1)(\gamma^{q^b} - \alpha_1) = \alpha_1(1 - \alpha_1),$$

si l'on a choisi $x = 0, (q)$ dans $\alpha_1 = xq$ tel que

$$y = \gamma^{q^b-1} = 0, (q).$$

En élevant à la puissance q on a la formule générale

$$\alpha^{q^i-1} = \alpha_1(1 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_1^{i-1}) \ldots$$

qui démontre le théorème.

Théorème VII. — *α étant choisi comme plus haut, on peut trouver $\beta = 1 + \alpha_1''$ tel que α et β soient indépendants, c'est-à-dire que la congruence*

$$\alpha^x \beta^y = 1 \ (\Omega)$$

soit impossible, si les exposants varient dans les limites

$$0 \leq x \leq q^a - 1, \quad q^a - 1 \leq y \leq q^b - 1.$$

α, β ainsi choisis forment une base du module Ω.

Supposons au contraire la congruence satisfaite. En l'élevant à la puissance $q^{\pi-1}$, on a

$$\alpha^{x'} = 1 \ (\Omega),$$

d'où $x = 0 \ (q^2 - 1)$, $x' = 0$. Or $\alpha^{q^a-1} = 1 - \alpha_1$. Donc la congruence se réduit à

$$1 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_1^{y-1} = 1 + \alpha_1 \ (\Omega)$$

ou

$$(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_1^{y-2}) = M_q^{y-1}.$$

Mais $\alpha_1 = pq$, $p, q, \alpha_1 = xq$, $p, x = M_q$. On a qu'à répéter le raisonne-

nement de Dirichlet dans le cas analogue du corps $R(i)$ [1] pour voir que α étant donné, il reste pour α $q^2-1=(q-1)$ valeurs incongrues [mod (q)], telles que la congruence de ci-dessus ne soit pas satisfaite.

Second cas : $\left(\frac{d}{2}\right)=-1$ $(m=3, 8 \mid \Omega=(2,q))$.

Ici encore, on trouve des nombres α de la forme $\gamma+\alpha_1$ qui appartiennent à l'exposant $2^{\pi-1}.3$ [mod $(2)^\pi$]. De même, le nombre $\beta=1+\alpha_1$ appartient à l'exposant $2^{\pi-1}$ pour certaines valeurs de α_1, sinon pour toutes comme dans le cas précédent. Mais α et β ne sont pas indépendants. Par conséquent on doit chercher une autre base.

Désignons par γ une des deux racines primitives de (2) ω ou $1+\omega$.

Théorème VIII. — *On peut choisir x tel que $\alpha=\gamma+2x$ appartienne à l'exposant $2^{\pi-1}.3$ [mod $(2)^\pi$]. Le nombre $\beta=1-\alpha_2$ appartient à l'exposant $2^{\pi-1}$.*

En donnant à x les quatre valeurs $0, 1, \omega$ et $1+\omega$ incongrues [mod (2)], on aura pour μ dans

$$\mu^{(1)}=\alpha_1,\quad \mu^{(2)}=\alpha_1+2\alpha_2,$$

encore quatre valeurs incongrues (mod 2), car autrement en posant $\alpha=\gamma+2x$, $\alpha_1=\gamma+2x_1$ on aurait

$$\alpha^{2^{\pi-1}}\equiv\alpha_1^{2^{\pi-1}}\pmod{(2)^\pi},$$

d'où l'on tirerait

$$\alpha^{2^{\pi-1}}\equiv\alpha_1^{2^{\pi-1}}\pmod{(2)},$$

ou

$$\gamma^{2^{\pi-1}}\equiv\gamma_1^{2^{\pi-1}}\pmod{(2)},$$

contre l'hypothèse. Excluons les deux valeurs de x qui font $\mu\equiv 0, (2)$ et $\mu\equiv 1, (2)$. Les valeurs restantes de x donneront $\mu\equiv\omega, (2)$ et $\mu\equiv 1+\omega, (2)$, en tout cas $\mu(\mu-1)\not\equiv 0, (2)$. Par conséquent

$$\mu^{2^{\pi-1}}\equiv 1+\lambda\mu(\mu-1)\equiv 1+\lambda\mu$$
$$\mu^{2^{\pi-1}}\equiv 1\pmod{(2)}$$

---

[1] *Théorie d. compl. Zahlen.* § [illegible] p. 548.

et, en général,

$$\alpha^{2^k} = 1 + \alpha_{k+1}. \qquad \text{Q. E. D.}$$

Notons encore qu'en posant $\gamma = \omega$ on aura $\alpha = 0$ ou ω si $m_1 = \frac{m-1}{2}$ est pair et $\alpha = 1$ ou $1 + \omega$ si m_1 est impair. Donc α a la forme $\gamma + \alpha_1$ ou $\gamma + \alpha_2$ pour m_1 pair et la forme $\gamma - \alpha_1$ pour m_1 impair. On a des conclusions analogues si l'on pose $\gamma = 1 + \omega$. Dans tous les cas, on a $\mu(\mu + 1) \equiv 1, (2)$.

Théorème IX. — *α étant choisi comme ci-dessus, on peut déterminer $\beta = 1 + \alpha_2$ tel que α et β soient indépendants.*

Soit $\beta = 1 + \xi z$, $z \equiv 0, (2)$. Choisissons z de sorte que la congruence

$$(1) \qquad \beta \equiv \alpha^a, [(2)^\pi] \qquad (0 \leqq a < 2^\pi, \pi > 1)$$

soit impossible. Soit au contraire la congruence (1) satisfaite. En l'élevant à la puissance $2^{\pi-2}$, on en tire $a = 2^{\pi-2} a'$. Si a' est pair, il suit

$$\beta \equiv \alpha^{2^{\pi-2} a'} = 1 + 8\alpha_1, [(2)^\pi],$$

donc

$$z \equiv 0, (2),$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. Si a' est impair, (1) donne

$$1 + \xi z \equiv (1 + \xi\alpha)^{2^{\pi-2} a'}, [(2)^\pi]$$

où $\xi = \mu(\mu + 1)$. Mais

$$(1 + \xi\alpha)^{2^{\pi-2}} = 1 + (2^\pi a' + 1)\xi\alpha + \text{M}\,\xi\alpha,$$

donc

$$z \equiv (2^\pi a' + 1)\alpha + \text{M}\,\xi\alpha, [(2)^\pi].$$

Pour que cette congruence ne soit pas satisfaite, il suffit de prendre

$$z \equiv \alpha^0, (2),$$

c'est-à-dire

$$z \equiv 1, (2).$$

z étant ainsi choisi, aucune puissance supérieure de β ne peut être congrue à une puissance de α. Soit au contraire

$$\alpha^m \equiv \beta^b, [(2)^\pi] \qquad (0 < b < 2^\pi, \beta^{2^\pi} \equiv 1, [(2)^\pi]).$$

On peut supposer $b = 2^i$, car

$$(1 + 4z)^{2^i - 1} = 1 + 4z_1,$$

où $z_1 \equiv z, (2)$. Soit donc $\beta^2 \equiv \alpha^i, [(2)^\pi]$, d'où $a = 3.2^{i-1}a'$. On aura

$$(1 + 4z)^{2^{i-1}} \equiv (1 + 4\nu)^{2^{i-1}}, [(2)^\pi].$$

a' est impair, parce que $1 + 4z$ et $1 + 4\nu$ appartiennent au même exposant $2^{\pi-2}$. On peut le prendre $= 1$ d'après une remarque précédente; i étant $< \pi - 2$, il suffit de montrer l'impossibilité de la congruence pour $i = \pi - 3$. Or

$$(1 + 4z)^{2^{\pi-3}} \equiv (1 + 2^\pi)^{2^{\pi-3}} \equiv M2^\pi.$$

On aurait par suite

$$z \equiv \lambda, (2)$$

contre l'hypothèse.

Théorème X. — *Le produit* $(-1)^\alpha \alpha^\beta \beta^\gamma$ *donne tous les restes premiers avec* $(2)^\pi$, *les indices variant dans les limites*

$$0 \leq a \leq 3.2^{\pi-2}, \quad 0 \leq b \leq 2^{\pi-1}, \quad 0 \leq c \leq 1, \quad (\pi > 2).$$

On n'a qu'à démontrer l'impossibilité de la congruence

$$(2) \qquad \alpha^{2^i} \equiv -\beta^{2^i}, [(2^\pi)],$$

pour les indices ci-dessus. En élevant (2) au carré et en appliquant le théorème précédent, on aura $2a = 3.2^{i-1}a' < 3.2^\pi$ et $2b = 2^{\pi-2}b' < 2^{\pi-1}$, donc $a = 3.2^{\pi-2}$, $b = 2^{\pi-1}$. Par suite

$$\beta^{2^{\pi-1}} \equiv -\alpha^{2^{\pi-1}}$$

ou

$$1 + \alpha^{2^{\pi-1}} \equiv (1 + \alpha^{2^{\pi-1}}), [(2)^\pi],$$

ce qui est évidemment impossible pour $\pi > 1$.

Remarque. — Pour le module $(2)^2$, il est aisé de voir qu'on peut prendre comme base α et $\beta = 1 + 2z$, z étant $= 0$ et $= \mu$, (2).

III. — Idéaux premiers ambigés.

Premier cas : $\left(\frac{d}{r}\right) = 0 \quad (r = 2)$.

Ces idéaux sont représentés par les bases canoniques

$$\left.\begin{aligned}
R &= (r, \sqrt{m}) = (r, \omega) \\
R^{2k} &= (r^k, r^k\omega) \\
R^{2k+1} &= (r^{k+1}, r^k\omega) \\
R &= \left(r, \frac{r+\sqrt{m}}{2}\right) = \left(r, \frac{r-1}{2} + \omega\right) \\
R^{2k} &= \left[r^k, r^k\left(\frac{r-1}{2} + \omega\right)\right] \\
R^{2k+1} &= \left[r^{k+1}, r^k\left(\frac{r-1}{2} + \omega\right)\right]
\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &(m \equiv 1 \pmod{4}), \\ &(m \equiv 1 \pmod{4}). \end{aligned}$$

Théorème XI. — *Une racine primitive de* R^π *l'est aussi pour* $R^{\pi-1}$ $(\pi > 2)$.

On peut voir aisément que si

$$\alpha^{\pi} \equiv 1, (R^{\pi-1}),$$

alors

$$\alpha^{\pi} \equiv 1, (R^{\pi}).$$

Cela permet de démontrer le théorème de la même manière que pour le corps rationnel (1).

Théorème XII. — R^π, $\pi > 2$, *n'a pas de racines primitives. Un nombre* μ *premier avec* R^π *satisfait à*

$$\mu^{\frac{1}{2}(r-1)} \equiv 1, (R^\pi) \quad (\pi = 2k \text{ et } 2k = 1).$$

Soit a un nombre du système réduit des restes (mod R) $1, 2, \ldots, r-1$. Désignons par α, un nombre quelconque de l'idéal R^π qui peut être

(1) Voir Dirichlet, *Zahlentheorie*, § 128.

divisible aussi par une puissance supérieure de R. Un nombre μ premier avec R^3 est $\mu = \alpha + \alpha_1$.

On a

$$\mu^{r-1} = (a + \bar{\alpha}_1)^{r-1} = 1 + \bar{\alpha}_1,$$
$$\mu^{r(r-1)} = 1 + \bar{\alpha}_1,$$

ce qui prouve que R^3 n'a pas de racines primitives, puisque

$$\varphi(R^3) = r^2(r-1).$$

Il résulte du théorème XI qu'aucune puissance supérieure à R^2 ne peut pas en avoir non plus. La seconde partie du théorème se démontre par induction en observant que de la relation

$$\mu^{r(r-1)} = 1 + \bar{\alpha}_{r(r-1)},$$

il suit

$$\mu^{r(r-1)} = 1 + \bar{\alpha}_{r(r-1)}.$$

Théorème XIII. — R^2 *possède des racines primitives au nombre de* $\varphi(r^2)\,\varphi(r-1)$. *C'est la conséquence de l'observation suivante : f étant une racine primitive de* R *(qu'on peut supposer entier et rationnel), les racines correspondantes de* R^2 *sont*

$$f + lr = n\pi \quad \text{resp.} \quad f + lr = n\left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{1}{r-1}} = \pi,$$

où l peut prendre toutes les r valeurs rationnelles incongrues (mod r), *et n toutes ces valeurs sauf zéro.*

Pour établir les bases, on doit distinguer deux cas : 1° r impair $\neq 3$ ou $r = 3$ avec $\frac{m}{3} = 1, (3)$; 2° $r = 3$ avec $\frac{m}{3} = -1, (3)$. La raison en est la suivante.

Théorème XIV. — $1 + \alpha_1$ *appartient à l'exposant* r^2 (mod R^3), $\pi = 2k$ et $2k+1$ *dans le cas* 1° ; *dans le cas* 2°, $1 + \alpha_1$ *appartient à l'exposant* 3^{k-1} (mod R^2), *et* 3^k (mod R^{2k-1}), *si* α_1 *représenté par*

$$\alpha_1 = 3l + n\pi \qquad \left\{ m = 2, 3, (4) \right\} \qquad n = (M3),$$
$$\text{resp. } \alpha_1 = 3l + n(1+\pi) \qquad \left\{ m = 1, (4) \right\}$$

satisfait à la condition

$$2l + 1 \equiv 0, \pm 3 \pmod{n} \quad \text{resp.} \quad 2l \equiv n - 1 \pmod{n}.$$

On le constate en développant le binome

$$(1 + z_1)^r = 1 + r z_1 + z_2 = 1 + r z_1 + z_2 + \frac{r}{2} z_1^2$$

si r est impair $\neq 3$.

Pour $r = 3$, on a

$$z_1^3 = \begin{matrix} 3\{3l^2 + n^2 m_1 + 2ln\} \\ 3\left\{3\left(l^2 + n^2\frac{m-1}{4}\right) + 2n^2 m_1 + n\{2l + n\}\{1 + (-1)^{n}\}\right\}^{l} \end{matrix}$$

où l'on a posé $m = 3m_1$

$$3z_1 + z_1^3 = \begin{matrix} 3z_1\{1 + n^2 m + 3l^2 + 2ln\} \\ 3z_1\left\{1 + 2n^2 m_1 + 3\left(l^2 + n^2\frac{m-1}{4}\right) + 2l + n\{2l + n\}\{1 + (-1)^{n}\}\right\}^{l}; \end{matrix}$$

donc

$$(1 + z_1)^3 = \begin{matrix} 1 + 3z_1\{1 + n^2 m_1 + 3(l^2 + l) + 2(2l + 1)n\} \\ 1 + 3z_1\left\{1 + 2n^2 m_1 + 3\left(l^2 + n^2\frac{m-1}{4}\right) + l\{1 + (2l + n + 1)n\}\{1 + (-1)^{n}\}\right\}^{l}. \end{matrix}$$

Dans le cas 1°, on a

$$(1 + z_1)^3 = 1 + 3z_1 = 1 + z_1,$$

comme pour $r \neq 3$ et en général

$$(1 + z_1)^r = 1 + z_{2(r+1)},$$

ce qui prouve la première partie du théorème. Au contraire, dans le cas 2°, on a

$$(1 + z_1)^3 = 1 + 3z_1 z_1^2 = 1 + z_1$$

si l'on impose la condition complémentaire de l'énoncé. Si cette condition n'est pas satisfaite, on peut avoir $(1 + z_1)^3 = 1 + z_2$ et même $1 + z_6$. Si on la suppose satisfaite, on a la formule générale

$$(1 + z_1)^{2^{\beta}+1} = 1 + z_{2^{\beta}+1} \quad (\beta \geq 1).$$

qui prouve la seconde partie du théorème. Étudions d'abord le cas :

$$r = 3 \quad \text{ou} \quad r = 3 + \frac{m}{4} - 1 \quad (4)$$

Théorème XV. — *Soit γ une racine primitive de* R. *On peut choisir $\beta = \gamma + \alpha_2$ de telle façon que β appartienne à l'exposant $r^{\rho-1}(r-1)$ (mod $R^{2\rho}$) et à $r^{\rho}(r-1)$ (mod $R^{2\rho+1}$).*

On peut supposer γ entier et rationnel, alors M dans $\gamma^{r-1} = 1 + Mr$ est aussi rationnel. On aura

$$\beta^{r-1} = \gamma^{r-1}(1 + (r-1)\gamma^{r-1}\alpha_2 + \alpha_2 - 1 + \alpha_2),$$

si $l = 0, r$ dans $\alpha_2 = r(l + n\omega)$ resp. $r\left[l + n\left(\frac{r-1}{r} + \omega\right)\right]$ est choisi tel que

$$M = \gamma^{r-1}(l + 0 + r).$$

Pour $r = 3$, on a toujours

$$\beta^{r-1} = (1 + \alpha_2)^2 = 1 + \alpha_2.$$

Par conséquent,

$$\beta^{r-1} = 1 + \alpha_2,$$

et en général

$$\beta^{r-1} = 1 + \alpha_2. \qquad \text{Q. E. D.}$$

Théorème XVI. — *Les nombres $a = 1 + \alpha_2$, $\beta = \gamma + \alpha_2$ constituent une base pour le module* R^{ρ}, *les indices variant dans les limites*

$$0 \leq a \leq r^{\rho} \qquad 0 \leq b \leq r^{\rho-1}(r-1) \qquad (\pi = 2k),$$
$$\text{ou} \qquad 0 \leq b \leq r^{\rho-1}(r-1) \qquad (\pi = 2k-1).$$

On doit démontrer l'impossibilité de la congruence

$$\alpha^{a} \equiv \beta^{b} \quad (R^{\rho}),$$

a, b variant dans les limites indiquées, o exclus. Supposons $a = r^{\rho}$, car $\alpha^{a'}$ est encore un α si $a' \equiv Mr$. Soit

$$\alpha^{a} \equiv \beta^{b}, (R^{\rho}) \qquad (\beta \neq 1).$$

En élevant à la puissance $r^{\rho-1}$, on obtient $b = r^{\rho-1}(r-1)\,b'$ où $b' \not\equiv Mr$, car α^{a} et β^{r-1} appartiennent au même exposant (mod $R^{2\rho}$). Dans la congruence

$$\alpha^{a} \equiv \beta^{b} \quad (R^{\rho}),$$

il suffit de poser $\beta = k - 1$. On aura

$$1 + \alpha_2 \equiv \gamma^{r-1}(1 + \alpha_2) \quad (R^{\rho}).$$

Mais $(1+\alpha_{2k-2})^{p} = 1 + \alpha'_{2k-2}$. On aura donc

$$\alpha_{2k-1} - \alpha_{2k-2} \equiv 0 \pmod{R^{2k-1}}$$

ce qui est impossible.

La démonstration de l'indépendance pour le module R^{2k+1} est analogue. Passons au cas :

$$r = 3, \quad \frac{m}{3} = -1 \pmod{3}.$$

Construisons le Tableau suivant des exposants et des nombres qui leur appartiennent ; α_1 y est soumis aux conditions du théorème XIV.

	mod R^{2k}	mod R^{2k+1}
$1+\alpha_1$	3^{k-1}	3^{k}
$1+\alpha_1$	2.3^{k-1}	2.3^{k}
$1+\alpha_2$	3^{k-1}	3^{k}
$-1+\alpha_2$	2.3^{k-1}	2.3^{k}
$1+\alpha_3$	3^{k-1}	3^{k-1}
$-1+\alpha_3$	2.3^{k-1}	2.3^{k-1}

On en déduit que deux bases ne peuvent pas suffire à représenter tous les 2.3^{2k-1} resp. 2.3^{2k} restes. Mais si l'on définit comme restes primaires les restes $\equiv 1$ et $\equiv 2 \pmod{R^2}$, on voit que les bases $\alpha = 1+\alpha_2$, $\beta = -1+\alpha_3$ représentent tous les restes primaires. L'indépendance de ces bases s'établit de la même façon que dans le théorème XVI.

On obtient tous les restes en multipliant les restes primaires dans le cas $m = 2, 3, (4)$, $R = (3, \omega)$ par $1+\omega$, $(1+\omega)^2$ et dans le cas $m = 1, (4)$, $R = (3, 1+\omega)$ par ω, ω^2, car on a

$$\left.\begin{array}{l} 1+\omega \equiv 1+\omega \pmod{R^2} \\ (1+\omega)^2 \equiv 1+2\omega \pmod{R^2} \\ 2(1+\omega) \equiv 2+2\omega \pmod{R^2} \\ 2(1+\omega) \equiv 2+\omega \pmod{R^2} \end{array}\right\} \quad [m = 2, 3, (4)]$$

$$\left.\begin{array}{l} \omega \equiv \omega \pmod{R^2} \\ \omega^2 \equiv 2+\omega \pmod{R^2} \\ 2\omega \equiv 2\omega \pmod{R^2} \\ 2\omega^2 \equiv 1+2\omega \pmod{R^2} \end{array}\right\} \quad [m = 1, (4)]$$

On conclut

Théorème XVII. — *Tous les restes premiers avec* R^π *sont congrus à*

$$\begin{array}{ll} \alpha^\lambda \beta^\mu \omega & \\ \text{resp. } \alpha^\lambda \beta^\mu (1+\omega)^\nu & \pmod{R^\pi} \end{array} \qquad \begin{array}{l} [m = 1, (4)], \\ [m = 2, 3 (4)], \end{array}$$

les indices variant dans les limites

$$\begin{array}{lll} 0 \leq a < 3^{\pi-1}, & 0 \leq b < 2 \cdot 3^{\pi-1}, & 0 \leq c < 3 \quad (\pi = 2k), \\ 0 \leq a < 3^{\pi}, & \quad \text{"} & \quad \text{"} \quad (\pi = 2k+1). \end{array}$$

Second cas : $\left(\frac{d}{2}\right) = 0$ $\quad \begin{array}{ll} R = (2, 1+\omega) & [m = 3, (4)], \\ R = (2, \omega) & [m = 2, (4)]. \end{array}$

On constate directement que R a une seule racine primitive $= 1$, R^2 a ω, resp. $1 + \omega$, R^3 a deux racines ω, $2 + \omega$ resp. $1 + \omega$, $3 + \omega$.

On démontre le théorème XI d'une façon analogue au cas r impair.

Théorème XVIII. — R^π, $\pi > 3$ *n'a pas de racines primitives. Un nombre* μ *premier avec* R^π *satisfait à*

$$\mu^{2^k} = 1 \quad (R^\pi) \qquad (\pi = 2k \text{ et } 2k+1).$$

Soit d'abord $m = 2, (4)$. Prenons un nombre μ premier avec R de la forme $1 + \alpha_1$. On constate

$$\mu^2 = (1 + \alpha_1)^2 = 1 + \alpha_2$$

où, dans $\alpha_2 = 2(l + n\omega)$, l et n sont impairs. A cause de cela

$$\mu^4 = (1 + \alpha_2)^2 = 1 + \alpha_3.$$

Ceci prouve que R^4 et par conséquent R^π, $\pi > 4$, n'ont pas de racines primitives. On déduit ensuite la formule générale

$$\mu^{2^k} = 1 + \alpha_{2^{k-1}} \qquad (k \geq 1)$$

c'est-à-dire μ appartient à l'exposant $2^k \pmod{R^\pi}$. Si α_1 dans μ était divisible par une puissance supérieure de R, μ appartiendrait à un exposant plus petit que 2^k, donc le théorème est démontré.

Soit maintenant $m = 3, (4)$ et $\mu = 1 + \alpha_1 = 1 + l + n\omega$, où l et n sont nécessairement impairs. On a encore

$$\mu^2 = 1 + \alpha_2$$

où dans $\alpha_2 = 2(l' + n'(1+\omega))$ l' est impair, mais n' pair. En calculant μ^4, on constate que $\frac{1-l'}{2} = 1 + \frac{m-3}{4} = M$ est impair si $m \equiv 3, (8)$, et pair si $m \equiv 7, (8)$; d'où il suit

$$\mu^4 = 1 + \alpha_2 \quad \text{si} \quad m \equiv 3, (8)$$
$$\mu^4 = 1 + \bar{\alpha}_2 \quad \text{si} \quad m \equiv 7, (8),$$

$\bar{\alpha}_2$ pouvant être divisible par R^2. On a les formules générales

$$\mu^{2^{2l+1}} = 1 + \alpha_{2l} \qquad (m \equiv 3, (8))$$
$$\mu^{2^{2l+1}} = 1 + \bar{\alpha}_{2l+1} \qquad (m \equiv 7, (8))$$

qui prouvent le théorème.

Puisque le nombre $1 + \alpha_1$ appartient à des exposants différents suivant que $m \equiv 3$, (8), ou $\equiv 7$, (8), nous n'emploierons pas ce nombre pour former la base. Construisons le Tableau

	(mod R^3)	(mod R^{π})
$1 + \alpha_2$	2^{m-1}	2^{m-1}
$1 + \alpha_3$	2	2
$1 + \alpha_4$	2^{m-2}	2^{m-2}

$\alpha_2 = 2(l + n\omega)$ resp. $2(l + n(1+\omega))$ est soumis ici à la condition n impair, autrement α_2 appartient à un exposant plus petit. Comme évidemment deux bases ne sont pas suffisantes, choisissons $\alpha = 1 + \alpha_2$, $\beta = 1 + \alpha_4$ dont on peut démontrer l'indépendance comme dans les cas précédents. Les nombres de la forme $\alpha^x \beta^y$ représentent seulement $\frac{1}{4}$ des restes (mod R^{π}), notamment ceux congrus à 1 (mod R^3). Nous les nommerons *primaires* et nous obtiendrons tous les autres en les multipliant par ω, ω^2, ω^3 si $m \equiv 3$, (4) et par $1+\omega$, $(1+\omega)^2$, $(1+\omega)^3$, si $m \equiv 2$, (4), car ω resp. $1+\omega$ appartient à l'exposant 4 (mod R^3). On a donc

THÉORÈME XIX. — *Tout nombre premier avec* R *est congru à*

$$\alpha^x \beta^y (1+\omega), \qquad \text{mod}\,(R^3, 1+\omega)$$
$$\text{resp.} \quad \alpha^x \beta^y (1+\omega) \qquad \text{mod}\,(R^3, \omega)$$

où $\alpha = 1 + \alpha_2$, $\beta = 1 + \alpha_4$ et

$$\alpha = a + \alpha^2 b + \ldots, \qquad \alpha = b + \alpha^2 b + \ldots \qquad \alpha = 1 + \alpha^2 b + \ldots \qquad (\alpha = \alpha^2 b + \ldots),$$
$$\beta \qquad \beta = b + \beta^2 b + \ldots \qquad \beta \qquad (\beta = \beta^2 b + \ldots)$$

IV. — Idéaux composés de plusieurs facteurs différents.

Soit $M = P^{\pi}, P'^{\pi'} \ldots$ Une condition nécessaire de l'existence des racines primitives de M est que les facteurs P^{π}, $P'^{\pi'}, \ldots$ les possèdent, la condition suffisante est alors que $\varphi(P^{\pi})$, $\varphi(P'^{\pi'}), \ldots$ soient premiers entre eux. Prenons pour exemple le cas $m \equiv 2, (4)$. M peut avoir les facteurs suivants aux racines primitives :

$$P^{\pi}, Q, R \text{ ou } R^2 \quad (1), \quad 1 + \sqrt{m}, \quad (1 + \sqrt{m})^2 \quad \text{ou} \quad (2 + \sqrt{m})$$

avec les φ correspondants

$$p^{\pi-1}(p-1), \quad q^{\pi-1}(q-1) \quad \text{ou} \quad (q^{\pi-1}(q-1))^2, \quad 1, \quad 2 \quad \text{ou} \quad 4.$$

Par suite M a des racines primitives seulement s'il est égal au produit de $(2 + \sqrt{m})$ par l'un des idéaux : P^{π}, Q, R ou R^2.

En appliquant ce raisonnement aux différents cas qui peuvent se présenter on conclut.

Théorème XX. — *Les racines primitives n'existent que pour les produits suivants :*

1° $m \equiv 2$ ou $\equiv 3$, (4) : Produit de $(2 + \sqrt{m})$ resp. $(2, 1 + \sqrt{m})$ par P^{π}, Q, R ou R^2.

2° $m \equiv 1, (8)$: Produit de $\left(2, \frac{1 + \sqrt{m}}{2}\right)$ par P^{π}, Q, R ou R^2.

3° $m \equiv 5, (8)$: Produit de (2) par un des idéaux

$$\begin{array}{lll} P^{\pi} & \text{si} & p \equiv 1, 3, 5, 7, \\ \left(3, \frac{1 + \sqrt{m}}{2}\right) & \text{si} & \left(\frac{m}{3}\right) = 1 \\ (3) & \text{si} & \left(\frac{m}{3}\right) = -1 \\ R & \text{si} & m \equiv (2) \, 5 \\ R^2 & \text{si} & m \equiv (4) \, 5 \end{array}$$

ou

$$\left(3, \frac{2 + \sqrt{m}}{2}\right) \quad \text{si} \quad \left(\frac{m}{3}\right) = -1$$

---

(1) P, Q, R peuvent être des nombres rationnels ordinaires.

Sur les singularités irrégulières des équations différentielles linéaires ;

PAR RENÉ GARNIER.

INTRODUCTION.

« ... On peut souvent passer d'une manière continue d'une de ces fonctions à une autre, d'un de ces individus mathématiques à un autre qui paraît tout différent, comme la théorie de l'évolution permet de passer d'une espèce à une espèce voisine et de passer en proche à une espèce plus éloignée. »

(JULES TANNERY, *Science et Philosophie*.)

1. Dans la théorie analytique des équations différentielles, les équations linéaires occupent sans contredit une place privilégiée. Actuellement encore, la représentation analytique des intégrales d'une équation de forme quelconque présente les plus grandes difficultés, même dans le cas des équations du premier ordre ; au contraire, qu'on l'envisage au point de vue local ou au point de vue général, la représentation des intégrales d'une équation linéaire obéit à deux propositions fondamentales qui en facilitent singulièrement l'étude : d'une part, en vertu des mémorables travaux de Cauchy, aucune intégrale d'une équation linéaire ne saurait posséder d'autres points singuliers que ceux-là mêmes du coefficient différentiel; et, d'autre part, il suffit de connaître un système fondamental d'intégrales, ainsi que les substitutions génératrices du groupe de monodromie, pour pouvoir prolonger, le long d'un chemin quelconque, une intégrale arbitraire de

l'équation, et pour faire ainsi d'une suite de discussions locales une description complète de l'intégrale.

En fait, les premiers géomètres (Fuchs, Thomé, Frobenius, ...), qui cherchèrent à approfondir les propriétés analytiques des intégrales des équations linéaires à coefficients rationnels entreprirent d'abord l'étude locale des points singuliers; et, bientôt, ils se trouvèrent conduits à subdiviser ces points en deux classes. Dans la première, leurs nombreux Mémoires enregistrent des succès aussi décisifs que faciles; et, sans doute faut-il attribuer à cette circonstance la dénomination de *régulières* qu'ils attachent aux singularités de cette nature.... Par contre, dans la seconde catégorie, celle des points *irréguliers*, leurs efforts restent impuissants à édifier aucune théorie générale; et, sauf dans des cas exceptionnels, ils ne peuvent réussir à représenter aucune intégrale irrégulière au moyen de développements en séries convergentes. A vrai dire, le point de vue auquel se plaçaient ces géomètres condamnait d'avance leurs tentatives à l'insuccès; c'est ce que nous verrons plus loin (n° 3), lorsque nous aurons fait connaître la méthode qui nous a permis d'approfondir la nature d'un point irrégulier.

2. Une équation différentielle linéaire, d'ordre m, à coefficients rationnels peut toujours être écrite sous la forme

$$(e)\quad \{a_0(x)\}^m y^{(m)} + \{a_1(x)\}^{m-1} a_{m-1}(x) y^{(m-1)} + \ldots + a_1(x) a_{m-1}(x) y' + a_0(x) y = 0,$$

les $a_\nu(x)$ étant des polynomes d'un certain degré μ, premiers entre eux dans leur ensemble. Si ces polynomes ont été pris au hasard, l'équation (e) ne possédera, à distance finie que des singularités régulières [1]; pour qu'elle puisse acquérir des points irré-

[1] A ce point de vue, le cas d'une singularité irrégulière doit donc être regardé comme exceptionnel; on peut observer que la conclusion serait opposée si l'on écrivait (e) sous la forme

$$(e')\qquad y^{(m)} + p_{m-1} y^{(m-1)} + \ldots + p_{m-1} y' + p_m y = 0,$$

les p_ν étant des fonctions rationnelles d'ordre μ, décomposées, par exemple, en

guliers, il faut que $a_0(x)$ soit pourvu de racines multiples. *Une telle équation peut donc être envisagée comme la limite d'une équation pourvue de points réguliers infiniment voisins; mais la conclusion peut-elle être étendue aux intégrales des deux équations ?*

Dans le cas le plus simple qu'on puisse envisager, la réponse à une telle question résulte de l'une des propositions les plus anciennement connues de l'Analyse. Considérons, en effet, l'équation du premier ordre

$$(1 + \varepsilon x)y' - y = 0,$$

qui possède deux points singuliers réguliers, $x = -\varepsilon^{-1}$ et $x = \infty$; pour $\varepsilon \neq 0$, son intégrale générale est

$$y = A(1 + \varepsilon x)^{\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Faisons tendre ε vers 0; l'équation tendra vers celle-ci,

$$\bar{y}' - \bar{y} = 0,$$

qui admet $x = \infty$ comme point irrégulier; et, d'autre part, en vertu de la proposition à laquelle on a fait allusion, y tendra vers la fonction $\bar{y} = Ae^x$ qui, effectivement, est une intégrale de l'équation limite.

Pouvait-on généraliser ce résultat ?

La théorie de la série hypergéométrique permettait de prévoir une réponse affirmative. Il est bien connu (¹) que si l'on remplace α par εx, β par ε^{-1}, l'équation de Gauss tend vers la suivante

$$xy'' + (\gamma - x)y' - \alpha y = 0,$$

qui admet

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F\left(\alpha, \frac{1}{\varepsilon}, \gamma, \varepsilon x\right) = 1 + \frac{\alpha}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \ldots.$$

éléments simples. Un tel paradoxe se retrouve, on le sait, dans les questions les plus diverses de géométrie et d'analyse; il s'explique ici par les mêmes raisons. Nous ferons d'ailleurs observer que, pour nous, la forme (x) est *intégrale*; nous n'aurons pas à nous en servir.

(¹) *Cf.*, par exemple, E. Goursat, *Cours d'Analyse mathématique*, 3ᵉ édition, t. II, 1918, p. 472.

pour intégrale. De même, la transformation

$$[illegible]$$

change l'équation de Gauss en la suivante

$$[illegible]$$

qui admet pour intégrale la fonction

$$[illegible]$$

du type de Bessel; et, dans les deux cas, on a engendré une singularité irrégulière par fusion de deux points singuliers infiniment voisins [1].

Dès lors, il était tout indiqué d'étendre la conclusion précédente, et de rechercher si, plus généralement, on ne pourrait pas concevoir *une intégrale irrégulière* (de rang quelconque) *d'une équation linéaire* (d'ordre quelconque), *comme la limite d'une intégrale possédant un nombre convenable de points réguliers infiniment voisins, et appartenant, dans leurs domaines, à des exposants infiniment grands.* Tel est, brièvement énoncé, le problème qu'on s'est proposé de traiter dans ce Travail, et qui, nous le verrons, se résout par l'affirmative.

Indiquons maintenant la méthode adoptée pour atteindre ce résultat, ainsi que les principales conséquences qui en découlent, et qui éclairent d'un jour nouveau la structure du point irrégulier.

5. Soit donc

$$(\Gamma) \qquad [illegible]$$

l'équation à étudier dans le domaine de $x = \infty$, les quotients $A_i : x^{[illegible]}$ étant holomorphes à l'extérieur d'un cercle Γ ($|x| = r_0$), en sorte que $x = \infty$ est pour (Γ) un point irrégulier de rang n.

---

[1] C'est ce que les Anglais appellent la *confluence* des singularités. (*Cf.* E.-T. Whittaker et G.-N. Watson, *Modern Analysis*, [illegible] édition, Cambridge, 1915, p. 331.)

A $\overline{E}$ adjoignons l'équation [1]

$$(E)\quad (1-\varepsilon^n x^n y^m)$$
$$-(1-\varepsilon^n x^n y^m)^{-1} A_{-1}(x^n y^m) \ldots \quad (1-\varepsilon^n x^n y^m)^{-1} A_{-n}(x^n y^m) = A_{-n}(x^n y^m),$$

qui, pour $|\varepsilon|$ assez petit, possède, hors de Γ, $n+1$ points réguliers,

$$x_h = \varepsilon^{-\frac{1}{n}} e^{\frac{2h\pi i}{n}} \quad (h = 1, \ldots, n) \quad \ldots \quad x_0 = \infty.$$

Si l'on veut démontrer que, pour ε infiniment petit, une intégrale de (E) tend, dans un certain domaine, vers une intégrale de $\overline{E}$, il ne saurait être question de représenter ces intégrales au moyen de développements en séries de Taylor : aussi bien, un tel mode de représentation n'a pu réussir dans les exemples du n° 2 qu'à la faveur de circonstances exceptionnelles qui permettaient le calcul explicite des termes généraux des séries. De plus, la forme immuablement circulaire du domaine de convergence d'une série de Taylor constituerait un cadre trop rigide pour l'étude d'un point irrégulier.

En fait, par la simplicité de son algorithme, par la souplesse de son emploi, par la fécondité des résultats dont la théorie des équations différentielles lui est déjà redevable, une méthode était tout naturellement désignée pour la solution du problème actuel : nous voulons parler de la méthode des approximations successives [2] de M. Émile Picard. Ajoutons d'ailleurs aussitôt que c'est l'illustre géomètre lui-même qui a montré, le premier, comment la méthode permet de calculer les intégrales d'une équation irrégulière [3] le long de l'axe réel (ou dans un argument

---

[1] L'équation (E) est du type (1) (n° 2) avec $\alpha = 1$ [illegible] La méthode employée pour (E) s'appliquerait d'ailleurs à toute équation [illegible] dans laquelle α [illegible] serait une fonction de ε tendant vers 1 pour ε infiniment petit. Au sujet des raisons qui ont fait adopter ce choix particulier de α, voir plus haut, n° 4, p. [illegible].

[2] A propos de la comparaison de deux méthodes fondées sur la notion de Taylor et sur les développements en approximations successives, voir [illegible] un intéressant article de M. E. Picard (*Bull. Sc. math.*, [illegible] XXXIX, [illegible] p. 179).

[3] *Traité d'Analyse*, 3e édition, t. III, Paris, [illegible], p. [illegible] L'exemple traité par M. E. Picard se rapporte au cas $m = 0$, $n = 1$. [illegible] à un angle de

déterminé). Mais, pour notre but actuel, il s'agissait de définir, dans le plan complexe, le domaine le plus étendu possible où l'on fût certain de calculer la *même* intégrale de l'équation (E) [ou $(\overline{\mathrm{E}})$]; l'emploi exclusif de chemins rectilignes devenait évidemment insuffisant.

Pour aller plus loin, il fallait donc chercher à obtenir les conditions de convergence des approximations successives *sous une forme aussi large que possible;* et, c'est ainsi que nous avons pu établir l'existence d'un ensemble continu, *à deux dimensions*, de chemins d'intégration, le long desquels la méthode fournit une MÊME intégrale de (E); *par variation continue de ces chemins, on définit ensuite des domaines* INDÉPENDANTS *de* ε, *à l'intérieur desquels on peut calculer des intégrales* y, *canoniques pour* (E), *et des intégrales* $\bar{y}$ *satisfaisant à* $(\overline{\mathrm{E}})$; *enfin, on peut montrer que, dans ces domaines, les* y *tendent uniformément vers les* $\bar{y}$.

Ce résultat fondamental une fois acquis, il était aisé de retrouver dans les propriétés du point irrégulier les *traces* des propriétés primitives des points réguliers de l'équation (E).

Précisons et complétons ces généralités en résumant les principaux résultats de ce Mémoire.

4. Soit a_0 le coefficient de [illegible] dans A_1 (n° 5); supposons d'abord que l'équation

$$[illegible]$$

possède m *racines distinctes*, $s_1, \ldots, s_m$. Nous montrons dans

nombreux et importants Mémoires de M. Horn (*Cf.* notamment *Journ. für r. und angew. Math.*, t. 138, [illegible]; *Math. Ann.*, t. 71, [illegible]). L'auteur y applique la méthode des approximations successives et celle des développements en série de facultés (ainsi que l'intégrale de E. Borel) à la représentation des intégrales des équations différentielles, ou linéaires aux différences finies, dans le voisinage de leurs singularités. Il n'étudie d'ailleurs que les intégrales des équations différentielles-limites $(\overline{\mathrm{E}})$, et le long de chemins rectilignes; s'il parvient à la notion de secteur (sans en indiquer l'origine), c'est dans un cas particulier ($m = 2 = n$), à l'aide de la méthode des séries de facultés, ce qui nécessite de plus longs calculs.

la première Partie qu'on peut alors calculer m expressions

$$\varpi_k(x, \varepsilon) = \alpha_{n-1}^{(k)}(\varepsilon)\, x^{n-1} + \ldots + \alpha_1^{(k)}(\varepsilon) + \alpha_0^{(k)}(\varepsilon)\, x^{n-1}$$

(les $\alpha_\nu^{(k)}$ étant holomorphes pour $\varepsilon = 0$), telles que si l'on pose

$$u_k = e^{\int (1 - \varepsilon^n x^n)\, \varpi_k(x)}$$

l'équation (E) admette l'intégrale $y = u_k\, z(x)$, $z(x)$ étant la fonction-limite vers laquelle tendent les approximations

$$z_0(x) = 1,$$

$$z_p(x) = 1 + \sum_{k=1}^{m} \int_{\mathcal{L}_k^h} R_k(\xi, \varepsilon)\, \omega_{jk}(x, \xi, \varepsilon)\, f[z_p(\xi, \varepsilon), \xi, \varepsilon]\, \frac{d\xi}{\xi^2} \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

où l'on a posé

$$\omega_{jk}(x, \xi, \varepsilon) = \frac{u_k(x, \varepsilon)\, u_j(\xi, \varepsilon)}{u_j(x, \varepsilon)\, u_k(\xi, \varepsilon)},$$

et où R désigne une fonction de ξ et ε, holomorphe pour $\varepsilon = 0$, f ayant une signification analogue. Ces approximations convergent d'ailleurs régulièrement lorsqu'on prend pour chemin d'intégration l'une, $\mathcal{L}^h$, des m branches de la courbe

$$(\mathcal{L}) \qquad \mathcal{R}[e^{i\delta} \varepsilon^{-n} \operatorname{Log}(1 - \varepsilon^n \xi^n)] = C,$$

où δ et C ont été convenablement choisis. D'une façon plus précise, la notation $\mathcal{L}_k^h$ employée plus haut désigne la branche $\mathcal{L}^h$ suivie dans un sens bien déterminé (avec k), et pouvant, d'ailleurs, varier avec k [du moins lorsque l'ordre m de (E) dépasse 2]. Soit r_1 un nombre positif arbitrairement grand, supérieur à r_0 (n° 3); prenons $|\varepsilon|$ inférieur à r_1^{-1}. Chacune des n branches de $\mathcal{L}$ s'enroule autour de l'un des points x_h et de x_∞; quant à l'arc intermédiaire entre ces deux spires (et situé dans la couronne $\mathcal{S} : r_0 \leqq |x| \leqq r_1$), il tend uniformément, pour $|\varepsilon|$ infiniment petit, vers un arc de l'hyperbole

$$(\mathcal{L}) \qquad r^n \cos(n\theta + \delta) = 1.$$

Cela étant, *supposons que les racines s_i de $f(s) = 0$ forment un*

polygone convexe H; nous montrons dans la deuxième Partie qu'on peut adopter le même sens de parcours sur $\mathcal{L}^h$, pour chacun des chemins $\mathcal{L}^h_k$, et *les intégrales y définies par le procédé d'approximations successives ne sont autres que des intégrales canoniques pour* x_h (*ou* x_∞). La convergence de ces approximations reste d'ailleurs assurée si, C croissant indéfiniment à partir d'une certaine valeur C_0, δ varie dans un certain intervalle d'amplitude arbitrairement voisine de $(V_0 + 2\pi) : n$ (où V_0 désigne l'angle extérieur à H en s_1). Dans la couronne $\mathcal{S}$, les branches $\mathcal{L}^h$ balaient alors un certain secteur ∇, à l'intérieur duquel on sait calculer une intégrale canonique, ainsi que sa limite $\bar{y}$ qui satisfait à (E) (*cf.* n° **5**, *ad fin*). Or les secteurs ∇ empiètent mutuellement, suivant mn autres secteurs à l'intérieur de chacun desquels on sait calculer $m+1$ intégrales y (ou $\bar{y}$) : dans chaque secteur d'empiètement, ces $m+1$ intégrales y (par exemple) sont donc liées par une relation que nous écrirons ici (¹) sous la forme

$$[illegible]$$

il existera donc mn relations telles que la précédente ; nous les appellerons les RELATIONS DE STRUCTURE (²) *du point irrégulier;* leur étude forme l'objet de la troisième Partie de ce Mémoire.

Dans la description de la singularité irrégulière, l'existence de ces relations a une importance capitale. A leur propos, observons d'abord, fait quasi évident, que parmi les $m+1$ intégrales qui figurent dans l'une quelconque de ces relations, *il en est toujours deux qui ont la même représentation asymptotique* (³) : c'est dire que *la méthode des séries asymptotiques* (⁴) de H. Poincaré, si précieuse pour les calculs numériques, *aurait été impuis-*

(¹) Pour plus de précisions dans les notations, *voir* n° **25**.

(²) Dans nos Notes antérieures (*Comptes rendus*, t. 166, p. 103, 602) ces relations portaient le nom de *relations caractéristiques*.

(³) Ce sont des traces d'intégrales canoniques provenant de deux points réguliers *différents*.

(⁴) Et, *a fortiori*, celle des séries de puissances.

sante à déceler ces relations ; elle ne saurait donc en revendiquer les conséquences. A vrai dire, l'application à l'équation limite $(\overline{E})$ de la méthode des approximations successives (sous la forme développée ici) suffisait à démontrer l'existence de ces relations ; mais leur signification ne pouvait être révélée qu'à la faveur du passage à la limite qui transforme (E) en $(\overline{E})$.

Pour faire entrevoir cette signification, considérons le sous-groupe de monodromie G, de (E), correspondant aux substitutions relatives aux x_h et à x_∞ ; il dépend de $(m^2-1)(n-1)$ invariants au sens de H. Poincaré (ces invariants étant définis à une transformation ponctuelle près). Or, dans la dégénérescence de (E) en $(\overline{E})$, $n(m-1)$ de ces invariants tendent vers des limites déterminées : ce sont, par exemple, les α_h^k $(k=1,\ldots,m-1;\ h=1,\ldots,n)$, combinaisons symétriques des racines des équations fondamentales déterminantes ; quant aux invariants restants, au nombre de $N=(m-1)(mn-m-1)$, ils peuvent être choisis de façon à avoir pour limites les quotients

$$\begin{matrix} \sigma_1^k & \sigma_2^k \\ \sigma_1^h & \sigma_2^h \end{matrix},$$

formés au moyen des coefficients des relations de structure, et que nous appellerons les INVARIANTS du point irrégulier [1].

La considération des relations de structure permet évidemment de poursuivre le long d'un chemin quelconque (convergeant vers le point irrégulier) toute intégrale dont on aura obtenu préalablement la représentation en fonction des intégrales normales, à l'intérieur d'un secteur déterminé ; à ce titre, elle épuise dans l'étude locale d'une singularité irrégulière. Elle permet encore de définir d'une façon précise n lignes illimitées de zéros pour l'intégrale générale ; c'est l'extension d'une proposition analogue établie pour l'équation de Bessel par M. Pierre Boutroux, à l'aide d'une méthode féconde, indépendante de la théorie des équations linéaires.

---

[1] L'étude de ces invariants considérés comme fonctions des coefficients de $(\overline{E})$ n'entre pas dans le cadre de ce Mémoire.

Lorsque le polygone Π *n'est plus convexe* (¹), les résultats précédents doivent être modifiés, car les intégrales canoniques de (E), correspondant à ceux des s_j qui sont intérieurs au polygone de sustentation de tous ces points, ne peuvent plus être calculées par l'algorithme d'approximations successives que nous avons indiqué. Toutefois, on peut encore définir des relations de structure, et calculer les limites de N invariants de G, en introduisant comme on le verra (nos **15** et **26**) la notion d'*intégrale paracanonique*.

Dans la quatrième Partie, nous exposons diverses généralisations ou applications des résultats précédents. Observons d'abord que le choix du binome $1-\varepsilon^n x^n$ pour le coefficient $a_0(x)$ du no **2** n'a d'autre raison d'être que d'attribuer aux n racines de $a_0(x)$, *la même disposition régulière qu'aux n secteurs* ∇, *qui, à la limite, correspondent à un même point* s_j; la forme des chemins $\mathcal{C}^h$, leur construction et leur discussion deviennent dès lors particulièrement simples. Mais, bien entendu, la même théorie s'appliquerait, aux complications de calcul près, quelle que soit la forme du coefficient $a_0(x)$ (tendant vers 1 pour ε infiniment petit). En particulier, *on peut agréger successivement un point régulier à un point irrégulier de rang* $n-1$, *de façon à engendrer un point de rang* n : il suffit, pour cela, de prendre $a_0 = 1-\varepsilon x$; c'est la voie que j'avais suivie au début de mes recherches. Les chemins à adopter pour les approximations sont alors des *loxodromies du facteur primaire de Weierstrass*; leur construction fait l'objet du no **30**.

L'hypothèse où l'*équation* $f(s)=0$ *a des racines égales* est abordée au no **31**; en général, l'équation (E) correspondante, soit (E′), possède des intégrales d'ordre fractionnaire. Il est encore possible de définir pour le point irrégulier des relations de structure et des invariants; mais une remarque s'impose. On peut envisager l'équation (E′) comme limite d'une équation régulière (E′), pour laquelle la relation $f(s)=0$ aurait ses m racines

(¹) Il en est ainsi, notamment, lorsque les s_j sont réels et que l'ordre m est supérieur à 1.

distinctes. Or, parmi les mn secteurs Σ attachés à E', il en est qui, pour ε infiniment petit, *sortent de la région s et s'éloignent à l'infini.* A la limite, les intégrales correspondantes ne peuvent plus être calculées, en un point x indépendant de ε, par la méthode d'approximations successives résumée plus haut; il en résulte *un abaissement dans le nombre des relations de structure et des invariants* qu'on peut définir par cette méthode.

Une fois étendue au cas où la relation $f(s) = 0$ possède des racines de multiplicités quelconques, la notion d'invariant permet de *généraliser le problème de Riemann*, pour une équation linéaire quelconque, sous la forme que voici :

Déterminer une équation linéaire possédant des singularités régulières, ou irrégulières de rangs donnés, et telle que les invariants de son groupe de monodromie (au sens classique) *et les invariants de ses points irréguliers aient des valeurs données.*

D'après ce qui précède, ce problème n'est qu'un cas limite du problème classique.

Si l'on cherche à le résoudre pour une équation du second ordre, ne possédant qu'un point irrégulier (de rang 3), on retombe immédiatement sur les équations (I) et (II) de M. Painlevé. D'ailleurs, ceci s'accorde bien avec le fait connu que (I) et (II) sont des dégénérescences de l'équation (VI) que l'on rencontre en cherchant à résoudre le problème de Riemann pour une équation du second ordre à quatre points singuliers réguliers. Mais on peut ajouter que les considérations précédentes libèrent, en quelque sorte, les équations (I) et (II) de cette tutelle; elles leur assignent un caractère, une individualité propres et consacrent à nouveau leur droit de cité en Analyse.

5. En définitive, *les résultats établis dans ce Mémoire permettent donc de regarder tout point irrégulier d'une équation linéaire comme identique* A UN ENSEMBLE DE POINTS RÉGULIERS INFINIMENT VOISINS; c'est là un point de vue complètement analogue à celui des géomètres de l'École italienne qui, depuis longtemps, assimilent

une singularité quelconque d'une courbe algébrique à un ensemble de nœuds infiniments voisins [1].

Ceci nous permet d'expliquer, comme nous l'avons annoncé, les raisons de l'insuccès de Fuchs et de ses contemporains; tous leurs efforts se bornaient à obtenir pour une intégrale particulière un développement de la forme

$$y = x^{\rho} e^{Q(x)} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right),$$

où $Q(x)$ est un polynome en x, $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ étant une série de puissances en x, convergente dans le domaine de x_∞ par exemple. Or, considérons une équation linéaire admettant $x_1, \ldots, x_n$ et x_∞ comme points réguliers; *si le groupe de l'équation n'est pas de forme spéciale*, il sera impossible d'exprimer *aucune* intégrale de l'équation par une formule telle que

$$y = x^{\rho} \Pi(x - x_n) \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right),$$

où $\mathfrak{P}_1$ est holomorphe lorsque x appartient à un domaine extérieur à une certaine circonférence, et comprenant $x_1, \ldots, x_n$. Dès lors, d'après les résultats que nous avons établis, *l'existence d'une intégrale telle que $\bar{y}$ est impossible lorsque les invariants du point irrégulier ont des valeurs quelconques.*

Concluons donc que *l'étude locale d'une intégrale autour d'une singularité irrégulière est aussi difficile que l'étude générale d'une intégrale d'une équation n'ayant que des points réguliers.* L'étude d'un point irrégulier doit comporter deux phases bien distinctes: représentation d'intégrales particulières de l'équation dans des secteurs déterminés (problème *local*); calcul des coefficients des relations de structure (problème *général*). En fait, les perfectionnements qu'on peut apporter à la description d'un point irrégulier sont donc subordonnés aux progrès qu'on peut effectuer dans le calcul du groupe de monodromie d'une équation régulière;

---

[1] L'application d'une telle conception à l'étude des singularités fixes des équations différentielles nous paraît appelée à rendre de précieux services, même dans le cas où les équations ne sont pas linéaires.

c'est dire que les deux propriétés fondamentales que nous avons rappelées au début apparaissent ici comme plus solidaires que jamais.

PREMIÈRE PARTIE.

LES CHEMINS D'INTÉGRATION (Λ).

6. Les équations $(\overline{\mathrm{E}})$ et (E). — Considérons l'équation différentielle linéaire

$$(\overline{\mathrm{E}}) \qquad y^{(m)} + \Lambda_1 y^{(m-1)} + \ldots + \Lambda_\nu y^{(m-\nu)} + \ldots + \Lambda_m y = 0$$

où les Λ_ν sont des fonctions analytiques de x, développables dans le domaine de $x = \infty$ sous la forme

$$\Lambda_\nu = a'_{n+1} x^{(n+1)} + a'_{n+2} x^{(n+2)} + \ldots$$

les séries précédentes étant convergentes à l'extérieur du cercle Γ, d'équation $|x| = r_0$. Pour l'équation $(\overline{\mathrm{E}})$, le point à l'infini est donc une singularité irrégulière de rang n. A cette équation, nous adjoindrons, comme nous l'avons dit plus haut (n° **5**), l'équation suivante

$$(\mathrm{E}) \qquad y^{(m)} + \frac{\Lambda_1}{1 - \varepsilon^n x^n} y^{(m-1)} + \ldots + \frac{\Lambda_\nu}{(1 - \varepsilon^n x^n)^\nu} y^{(m-\nu)} + \ldots + \frac{\Lambda_m}{(1 - \varepsilon^n x^n)^m} y = 0$$

qui dépend d'un paramètre variable ε, et tend vers $(\overline{\mathrm{E}})$ lorsque ε tend vers zéro [1]. Pour $|\varepsilon|$ assez petit, (E) possède, hors de Γ, $n+1$ points singuliers *réguliers*

$$x_h = \varepsilon^{-1} e^{\frac{2h\pi i}{n}} \quad (h = 1, \ldots, n) \qquad \text{et} \qquad x_{n+1} = \varepsilon^{-1},$$

nous allons montrer que la méthode des approximations succes-

---

[1] En fait, rien ne serait changé aux raisonnements qui vont suivre si l'on supposait que les coefficients Λ_ν de (E) sont des fonctions de x et de ε, soit $\Lambda_\nu(x, \varepsilon)$, holomorphes pour $\varepsilon = 0$, et satisfaisant à la condition $\Lambda_\nu(x, 0) = \Lambda_\nu(x)$. Mais nous n'aurons pas besoin de cette généralisation facile.

sives permet de définir pour (E) des intégrales, régulières hors de Γ, et qui, dans des conditions que nous préciserons, tendent vers des intégrales de l'équation $(\overline{\mathrm{E}})$.

7. Transformation de l'équation (E). — Nous commencerons par mettre l'équation (E) sous une forme qui permette la pratique des approximations successives, et, pour cela, nous montrerons, qu'en général [1], *on peut construire m expressions*

$$\varpi_k(x, \varepsilon) = \alpha_{k-1} x^{k-1} + \ldots + \alpha_0 + \frac{\alpha^k}{x} \quad (k = 1, \ldots, m),$$

où les α sont des fonctions de ε, *holomorphes* pour $\varepsilon = 0$, et *telles que les exponentielles*

$$[illegible]$$

satisfassent à une équation linéaire admettant autour de chaque point régulier x_h (et x_∞) les mêmes équations fondamentales déterminantes que (E).

Tout d'abord, écrivons que la condition précédente est vérifiée au voisinage du point x_h; posons $\lambda_h = e^{\frac{[illegible]}{n}}$, et

$$(1) \qquad \begin{cases} \varpi_{[illegible]} = \alpha_{[illegible]} + \alpha_{[illegible]} [illegible] \\ \Lambda_{[illegible]} = a_{[illegible]} + [illegible] \end{cases}.$$

Il viendra aussitôt

$$\varpi_{[illegible]} = \frac{\varpi_{[illegible]}}{[illegible]},$$

$$\Lambda_{[illegible]} = \frac{\Lambda_{[illegible]}}{[illegible]},$$

et la condition en question s'écrira

$$(2) \qquad \sum_{[illegible]}^{\infty} \Lambda_{[illegible]} \varpi_{[illegible]} [illegible] = 0.$$

---

[1] C'est-à-dire, lorsque l'équation caractéristique (3) possède des racines distinctes.

Or, SUPPOSONS QUE L'ÉQUATION

$$(3)\qquad s^m + a_{n-1}^1 s^{m-1} + \ldots + a_{rn-1}^r s^{m-r} + \ldots + a_{mn-1}^m = 0$$

que nous appellerons désormais *l'équation caractéristique* de (E), POSSÈDE m RACINES DISTINCTES [1] $s_1, s_2, \ldots, s_m$. Si ε est assez petit, l'équation (2) possédera, pour chaque valeur de h, m racines distinctes $\varpi_{1,h}, \ldots, \varpi_{m,h}$, qui, pour $\varepsilon = 0$, seront des fonctions *holomorphes* de ε, tendant respectivement vers $s_1, \ldots, s_m$. On aura donc ainsi

$$\varpi_{k,h} = \sum_{l=0}^{+\infty} s_{k,l}(\varepsilon\lambda_h)^l \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

les coefficients $s_{k,l}$ étant d'ailleurs indépendants de ε et λ_h [qui ne figurent dans (2) que par la combinaison $\varepsilon\lambda_h$]; ou, en ne conservant que les n premières puissances de λ_h,

$$\varpi_{k,h} = \sum_{g=0}^{+\infty} s_{k,gn}\varepsilon^{gn} + \varepsilon\lambda_h \sum_{g=0}^{+\infty} s_{k,gn+1}\varepsilon^{gn} + \ldots + (\varepsilon\lambda_h)^{n-1} \sum_{g=0}^{+\infty} s_{k,gn+n-1}\varepsilon^{gn}.$$

Or, si l'on rapproche cette formule de la première relation (1), on verra aussitôt que pour satisfaire aux relations (2), quel que soit h, il faut et il suffit que l'on prenne

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha_{n-1}^h + \alpha_{1}^h \varepsilon^n = \displaystyle\sum_{g=0}^{+\infty} s_{k,gn}\varepsilon^{gn}, \\ \alpha_{n-2}^h = \displaystyle\sum_{g=0}^{+\infty} s_{k,gn+1}\varepsilon^{gn}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n}^h = \displaystyle\sum_{g=0}^{+\infty} s_{k,gn+n-1}\varepsilon^{gn}. \end{array}\right.$$

Et maintenant, il ne nous reste plus qu'à montrer qu'on peut choisir les α_{n-1}^h et les α_{n}^h de façon à vérifier la première des rela-

[1] Nous traiterons plus loin (n° 31) le cas où il n'en serait pas ainsi.

tions (4) en même temps que la condition que nous nous sommes imposée relativement à x_∞. Or, dans le domaine de ce point, u_k appartient à l'exposant $\frac{\mathcal{L}_{n-1}}{\varepsilon^n}$; on doit donc avoir

$$(5) \qquad \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{-i}^{(k)} \varepsilon^{-i} (x_\infty + \varepsilon) \ldots (x_\infty + \varepsilon^{n-1}) = m \ldots (m+1) \ldots (m+n-1) = 0,$$

ce qui donne pour $\alpha_{n-1}^{(k)}$ une expression de la forme

$$(6) \qquad \alpha_{n-1}^{(k)} = \sum_{i=1}^{\infty} \ldots$$

Mais $\alpha_{n-1}^{(k)}$ *est évidemment racine de* (5); il suffit alors de prendre

$$\ldots$$

et de rapprocher (6) du premier des développements (4) pour voir aussitôt que $\alpha_{-1}^{(k)}$, lui aussi, est une fonction de ε^n, holomorphe pour $\varepsilon = 0$. C. Q. F. D.

Ceci fait, pour obtenir la transformation que nous avons en vue, il nous suffira de résoudre la question suivante :

Déterminer la plus générale, soit (F), *des équations du même type que* (E), *et qui conduisent aux mêmes expressions pour les* u_k.

Tout d'abord, les relations (2) attachées à (E) et à (F) doivent être identiques, quel que soit h; si donc $B_{(1)}(x, \varepsilon)$ désigne le coefficient de u_{n-1} dans (F), on devra avoir

$$B_{(1)}(x, \varepsilon) = A_{(1)}(x, \varepsilon) \quad (\text{ou } \ldots \text{ou } \ldots),$$

d'où

$$B_{(1)}(x, \varepsilon) = A_{(1)}(x, \varepsilon) \ldots$$

$C_1(x, \varepsilon)$ *étant holomorphe autour de* $\varepsilon = 0$, *ainsi qu'en tout point* x, *à distance finie, extérieur à* Γ. Comme d'ailleurs les relations (3) doivent être les mêmes, pour (E) et pour (F), C_1 *doit présenter* $x = \infty$ *comme pôle d'ordre au plus* $\nu(n+1) - n - 1$. Et les conditions obtenues sont évidemment suffisantes.

En particulier, l'équation linéaire d'ordre m, qui admet $u_1, \ldots, u_m$ comme système fondamental d'intégrales, est évidemment une

équation (E); soit

$$F(u) = u^{m} + \frac{B_1}{1 - \lambda^{\alpha} x^{\alpha}} u^{m-1} + \dots + \frac{B_{m-1}}{1 - \lambda^{\alpha} x^{\alpha}} u^{m-1} + \dots + \frac{B_m}{1 - \lambda^{\alpha} x^{\alpha}} u^{m-1} + \dots$$

cette équation. En vertu de ce qui précède, l'équation (E) pourra donc s'écrire

$$(E_1) \qquad F(y) = \frac{1}{x^{\alpha}} \left[C_1 y^{m-1} + \dots + \frac{C_{m-1}}{(1 - \lambda^{\alpha} x^{\alpha})^{m-1}} y^{m-1} + \dots + \frac{C_m}{(1 - \lambda^{\alpha} x^{\alpha})^{m-1}} y^{m-1} \right]$$

les quotients $C_j : x^{m-1-\alpha}$ étant holomorphes pour λ voisin de 0 et x extérieur à Γ. C'est précisément à l'équation (E), écrite sous la forme (E_1), que nous allons appliquer la méthode d'approximations successives.

8. Établissement d'un algorithme d'approximations successives. — A cet effet, nous poserons

$$y = u_j z,$$

z satisfera à une équation de même forme que (E_1), et dont le premier membre, $G_j(z)$, sera dépourvu de terme en z; soit

$$(E_2) \qquad G_j(z) = \frac{1}{x^{\alpha}} \left[D_1 z^{m-1} + \dots + \frac{D_{m-1} x^{m-1-\alpha}}{(1 - \lambda^{\alpha} x^{\alpha})^{m-1}} z^{m-1} + \dots + \frac{D_m x^{m-1-\alpha}}{(1 - \lambda^{\alpha} x^{\alpha})^{m-1}} z^{m-1} \right]$$

cette équation, les D_j étant holomorphes pour z infiniment petit et x extérieur à Γ, et l'équation $G_j(z) = 0$ admettant pour intégrales les rapports

$$z = \frac{u_j}{u_j} \, e^{\int_0^{(x)} \dots} \qquad (k = 1, \dots, m).$$

Avant d'aller plus loin, présentons d'abord les deux remarques suivantes. Tout d'abord, il résulte de notre hypothèse sur les racines de l'équation (3) que, pour $|\lambda|$ assez petit, le coefficient

de x^{n-1} dans $\varpi_k - \varpi_j$ *est sûrement différent de zéro;* cela étant, on établit facilement par récurrence la formule

$$(7) \qquad \frac{u_j}{u_k}\frac{d^\nu}{dx^\nu}\left(\frac{u_k}{u_j}\right) = \left(\frac{\varpi_k - \varpi_j}{1 - \varepsilon^n x^n}\right)^\nu \left[1 + \frac{\beta_\nu + \varepsilon^n \gamma_\nu}{(\varpi_k - \varpi_j)^\nu}\right],$$

β_ν et γ_ν étant holomorphes pour $\varepsilon = 0$, et pour $x = \infty$ d'ordres au plus égaux à $\nu n - n - \nu$ et à $\nu(n-1)$ respectivement; et la quantité entre crochets est donc une fonction $1 + \varepsilon_{j,\nu}$ de x et ε, holomorphe dans le voisinage du couple de valeurs $x^{-1} = 0 = \varepsilon$, pour lequel elle se réduit à 1.

En second lieu, considérons un système de N^2 quantités variables a_{ij} $(i, j = 1, \ldots, N)$, de déterminant Δ, et représentons par Δ la somme (arithmétique) des modules des $N!$ termes qui constituent le développement de Δ.

Si les ε_{ij} sont des quantités de modules arbitrairement petits (soit $|\varepsilon_{ij}| < \eta < 1$), et si $\bar{\Delta} : |\Delta|$ reste borné, on peut écrire

$$|a_{ij}|(1 + \varepsilon_{ij}) = |\Delta|(1 + \varepsilon),$$

$|\varepsilon|$ étant arbitrairement petit, au même titre que les $|\varepsilon_{ij}|$.

On trouve, en effet, par récurrence,

$$|\varepsilon| = (2^N - 1)\frac{\bar{\Delta}}{|\Delta|}\eta.$$

Considérons alors l'équation auxiliaire

$$(8) \qquad G(\varepsilon) = \varphi(x),$$

où $\varphi(x)$ est une fonction donnée de x; son intégrale est de la forme

$$\varepsilon = \sum_{j,k} K_k z_{j,k},$$

les produits $K_k z_{j,k}$ étant donnés, conformément à la méthode de la variation des constantes par un système d'équations linéaires dont les coefficients sont de la forme $z_{j,k}^\nu : z_{j,k}$; mais il suffit d'appliquer successivement les deux remarques qui précèdent pour obtenir aussitôt la solution de ce système sous la

forme

$$K'_k z_{j,k} = \frac{(1-\varepsilon^n x^n)^{m-1}\left[1-\varepsilon^n \bar{\varepsilon}_k(x,\varepsilon)\right]}{(\varpi_k-\varpi_1)\ldots(\varpi_k-\varpi_{j-1})(\varpi_k-\varpi_{j+1})\ldots(\varpi_k-\varpi_m)}\,\varphi(x) \quad (k \neq j),$$

où $\bar{\varepsilon}_k$ est une fonction de x et ε, holomorphe et nulle pour $x^{-1} = 0 = \varepsilon$; il suit de là que (φ) admet la solution formelle

$$z = 1 + \sum_{\substack{k=1\\(k\neq j)}}^{m} \int \frac{(1-\varepsilon^n \xi^n)^{m-1}\left[1-\bar{\varepsilon}_k(\xi,\varepsilon)\right]}{(\varpi_k-\varpi_1)\ldots(\varpi_k-\varpi_{j-1})(\varpi_k-\varpi_{j+1})\ldots(\varpi_k-\varpi_m)}$$

$$\times \left[e^{\int_\xi^x \frac{\varpi_k(\xi)-\varpi_j(\xi)}{1-\varepsilon^n\xi^n}\,d\xi} - 1 \right] \varphi(\xi)\,d\xi.$$

Pour abréger l'écriture, nous poserons

$$(8) \qquad e^{\int_\xi^x \frac{\varpi_k(\xi)-\varpi_j(\xi)}{1-\varepsilon^n\xi^n}\,d\xi}\,\varphi(\xi)\,\varphi(x,\xi,\varepsilon)$$

$$\frac{1-\bar{\varepsilon}_k(\xi,\varepsilon)}{(\varpi_k-\varpi_1)\ldots(\varpi_k-\varpi_{j-1})(\varpi_k-\varpi_{j+1})\ldots(\varpi_k-\varpi_m)} = \frac{R_k(\xi,\varepsilon)}{\xi^{m-1}},$$

$$\sum_{k=1}^{m} R_k(\xi,\varepsilon) = -R_0(\xi,\varepsilon) \quad (k \neq j),$$

en sorte que les $R_k(\xi,\varepsilon)$ seront holomorphes pour $\xi^{-1} = 0 = \varepsilon$, et la solution que nous venons d'obtenir pour (φ) pourra s'écrire

$$z = 1 - \sum_{k=1}^{m} \int \left(\frac{1-\varepsilon^n\xi^n}{\xi^{m-1}}\right)^{m-1} R_k(\xi,\varepsilon)\,\varphi(x,\xi,\varepsilon)\,\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Ces préliminaires établis, revenons à l'équation (E_2), et posons

$$\left(\frac{1-\varepsilon^n x^n}{x^{m-1}}\right)^{m-1} D_1(x,\varepsilon)\,\varepsilon^{(m-1)(n-1)}\ldots$$

$$-\left(\frac{1-\varepsilon^n x^n}{x^{m-1}}\right)^{m-1} D_2(x,\varepsilon)\,\varepsilon^{(m-1)(n-2)}\ldots + D_m(x,\varepsilon)\,z = f(z,\varepsilon,\varepsilon),$$

en vertu des considérations précédentes, toute solution de l'équation intégrale

$$(9) \qquad z(x,\varepsilon) = 1 + \sum_{k=1}^{m} \int_{x_k}^{x} R_k(\xi,\varepsilon)\,\varphi(x,\xi,\varepsilon)\,\varphi(\xi)\,d\xi$$

où les chemins d'intégration φ_i sont convenablement choisis, constituera une solution de l'équation (E_ε) : nous sommes donc conduits à faire les approximations successives que voici :

$$(10)\quad \begin{cases} z_0 = f(x, \varepsilon), \\ z_{p+1}(x, \varepsilon) = z_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\varphi_i(x)}^{x} R_i(x, \xi, \varepsilon)\, f(\xi, z_p(\xi, \varepsilon), \varepsilon)\, d\xi \\ \qquad (p = 0, 1, \ldots) \end{cases}$$

9. Convergence des approximations. — Pour démontrer la convergence des approximations (10), nous admettrons d'abord qu'il existe, extérieurement à Γ un chemin φ^h, présentant comme points-frontières x_h et x_∞ et satisfaisant aux conditions suivantes :

a. Quel que soit le point x pris sur φ^h, on a

$$(11)\quad |x - \xi| > \delta(|\varepsilon|)$$

pour $|\varepsilon|$ assez petit, et pour tous les points ξ de l'un des deux arcs de φ^h issus de x_h ou de x_∞ et aboutissant en x : j'appellerai φ_x^h l'arc précédent; *son extrémité* (autre que x) *pourra d'ailleurs coïncider soit avec x_h, soit avec x_∞, suivant la valeur de k.*

b. Soit τ un nombre positif aussi petit qu'on voudra : on pourra disposer de φ^h de façon à vérifier l'inégalité

$$\int_{\varphi_x^h} \frac{ds}{r^\tau} < \tau \qquad (|s| \leq \tau \leq \tau)$$

l'intégrale étant étendue à *tout* le chemin φ^h.

Ceci posé, puisque φ^h est extérieur à Γ, et puisque, pour $|\varepsilon|$ assez petit, les R_i et les D_i sont holomorphes extérieurement à Γ, on peut trouver deux nombres positifs R et D, ne dépendant que de $|\varepsilon|$, et tels qu'on ait, dans ce domaine,

$$|R_i(\xi, \varepsilon)| < R, \qquad |D_i(\xi, \varepsilon)| < D,$$

d'où, d'après (10) et en vertu des conditions *a* et *b*,

$$|z_1(x, \varepsilon)| < |z_0| + \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\varphi_i(x)} \frac{ds}{r^\tau} < \Pi\tau$$

en posant

$$H = mRD$$

de sorte que H ne dépend que des coefficients de (E). De plus, en vertu même des identités sur lesquelles repose la méthode de la variation des constantes, on aura, si r_0^{-1} et $|\varepsilon|$ sont assez petits pour que $\left|\frac{\beta_1 + \varepsilon^n \gamma_1}{\varpi_k - \varpi_j}\right|$ (nº 8) soit < 1 :

$$|z_1'(x, \varepsilon)| < \left| 2 \sum_{k=1}^{m} \frac{\varpi_k(x, \varepsilon) - \varpi_j(x, \varepsilon)}{1 - \varepsilon^n x^n} \int_{(\mathcal{L}_k^h)} R_k(\xi, \varepsilon) \ldots D_1(\xi, \varepsilon) \, d\xi \right|$$

et

$$\left| \frac{1 - \varepsilon^n x^n}{x^{n-1}} z_1(x, \varepsilon) \right| < 2mH\tau \left| \sum_{k=1}^{m} \frac{\varpi_k(x, \varepsilon) - \varpi_j(x, \varepsilon)}{x^{n-1}} \right| < H\mu\tau,$$

μ étant indépendant, également, de ε et du rayon r_0 de Γ. Plus généralement, il suffit de s'appuyer sur la formule (7) pour apercevoir que μ peut être choisi (indépendamment de r_0 et ε) de telle façon que l'on ait encore les inégalités suivantes

$$\left| \left(\frac{1 - \varepsilon^n \xi^n}{\xi^{n-1}} \right)^{\nu} z_1^{(\nu)}(\xi, \varepsilon) \right| < H\mu^{\nu}\tau,$$

et cela, pour ξ appartenant à $\mathcal{L}_k^h$, quelque petit que soit d'ailleurs $|\varepsilon|$. Or ces inégalités entraînent évidemment la suivante

$$\begin{aligned} |z_2(x, \varepsilon) - z_1(x, \varepsilon)| & < \left| \sum_{k=1}^{m} \int_{(\mathcal{L}_k^h)} R_k(\xi, \varepsilon)\, \omega_{j,k}(x, \xi, \varepsilon) \right. \\ & \quad \left. \times \left[\left(\frac{1 - \varepsilon^n \xi^n}{\xi^{n-1}} \right)^{m-1} D_1(\xi, \varepsilon)\, z_1^{(m-1)}(\xi, \varepsilon) + \ldots + D_m(\xi, \varepsilon)\, z_1(\xi, \varepsilon) \right] d\xi \right| \\ & < mRD(\mu^{m-1} + \ldots + \mu + 1) H\tau^2 = \lambda H^2 \tau^2, \end{aligned}$$

en posant

$$\lambda = \frac{\mu^m - 1}{\mu - 1};$$

et l'on trouverait de même

$$\left| \left(\frac{1 - \varepsilon^n \xi^n}{\xi^{n-1}} \right)^{\nu} [z_2^{(\nu)}(\xi, \varepsilon) - z_1^{(\nu)}(\xi, \varepsilon)] \right| < \lambda \mu^{\nu} H^2 \tau^2.$$

La loi est générale, et l'on démontrerait sans peine qu'on a, pour toutes les valeurs de ν et de p,

$$\left|\left(\frac{1-\xi^p\xi^{\nu}}{\xi^{\nu}-\xi^p}\right)^{\nu}\left[z_{p+1}-\xi_{p+1}\right]\right| \leqq \lambda^{\nu}\,\varrho^{\nu}\,\Pi\,\tau^{\nu+1}.$$

En conséquence, si $\mathcal{L}^h$ a été pris de manière à vérifier la condition b, avec $\tau < (\lambda\Pi)^{-1}$ (où le second membre ne dépend que des coefficients de l'équation différentielle), les fonctions z_p (et $z_p^{(\nu)}$), définies par (10), convergeront en tout point x de $\mathcal{L}^h$ vers des limites respectives z (et $z^{(\nu)}$); et, en vertu d'un raisonnement classique, ces limites vérifieront l'équation intégrale (9) et, par suite, l'équation (E_2).

En définitive, pour achever notre démonstration de convergence, il ne nous reste plus qu'à montrer comment on peut définir des chemins $\mathcal{L}^h$ satisfaisant aux conditions a et b.

10. La condition a. — En premier lieu, pour que la condition a soit vérifiée relativement à la $k^{\text{ième}}$ quadrature de (10) $[k \neq j]$ (1), il suffira (2) qu'on puisse choisir sur $\mathcal{L}^h$ un sens de parcours (variable *a priori* avec k), et tel que l'arc s de $\mathcal{L}^h$ étant compté positivement dans ce sens, de x vers ξ, on ait, quels que soient x et ξ,

$$\frac{d}{ds}\left|\varphi_{k+1}(x,\xi)\right| \leqq 0,$$

c'est-à-dire, d'après (8),

$$\mathcal{R}\left[\frac{\varphi_{k+1}(\xi,\xi)-\varphi_{k+1}(x,\xi)}{1-\xi^{k+1}}\,\frac{d\xi}{ds}\right] \leqq 0,$$

mais cette dernière condition peut encore s'écrire

$$\mathcal{R}\left[\frac{\varphi_{k+1}(\xi,\xi)-\varphi_{k+1}(x,\xi)}{1-\xi^{k+1}}\,(1-\eta_1)\,e^{i(\theta_1-\theta)}\,\frac{d\xi}{ds}\right] \leqq 0, \tag{11}$$

où, si petit que soit $|\varepsilon|$, λ_1 est arbitrairement petit pour $|\xi|$ suffisam-

(1) La condition est évidemment remplie pour $k = j$.

(2) Puisque $\varphi_{k+1}(x,x) = 1$.

ment grand. Or, posons

$$(12)\qquad \arg.\left[\frac{\alpha'_{\ell}\,\lambda_{\ell}-\lambda_{\eta}}{1-\alpha'\xi^{\ell}}\,\xi^{-1}\left(\frac{dz}{ds}\right)\right]=\beta,$$

l'inégalité (11) s'écrira

$$\left[1+\frac{\lambda_1\cos(\beta+\lambda_1)}{\cos\beta}\right]\leq\left[\frac{\alpha'_{\ell}\,\lambda_{\ell}-\lambda_{\eta}}{1-\alpha'\xi^{\ell}}\,\xi^{-1}\left(\frac{dz}{ds}\right)\right]<0,$$

pour qu'elle soit satisfaite, il suffira d'astreindre β à vérifier la double condition

$$(13)\qquad -\frac{\pi}{2}+\eta<\beta<\frac{\pi}{2}-\eta,$$

dans laquelle η désigne un nombre positif arbitrairement petit, qu'on choisira une fois pour toutes : en effet, η ayant été ainsi fixé, le rayon r_0 du cercle Γ pourra toujours être pris assez grand pour que $\lambda_1 \sec\beta$ soit inférieur à $\frac{1}{2}$, par exemple, et la condition (11) deviendra une simple conséquence de (13).

Tout revient donc à vérifier cette dernière condition. Pour cela, il nous suffira de choisir le chemin ξ^h, *de façon que* β *conserve le long de* ξ^h *une valeur constante* [satisfaisant à (13)]. Or, l'intégrale de l'équation

$$\arg.\left[f(\xi)\left(\frac{dz}{ds}\right)\right]=\text{const.}$$

est évidemment de la forme

$$\delta\left[e^{\delta}f(z)\right]=C,$$

où δ et C désignent deux constantes; le chemin ξ^h devra donc vérifier une relation de la forme

$$(14)\qquad -\delta\left[\frac{e^{\delta}}{z^{\mu}}\operatorname{Log}(1-z^{\mu}P)\right]=C,$$

en d'autres termes, la transformation

$$(15)\qquad \xi=z^{\mu}$$

devra changer ξ^h en la spirale logarithmique Σ, d'équation

$$(\Sigma)\qquad -\delta\left[\frac{e^{\delta}}{\xi^{\mu}}\operatorname{Log}(1-\xi^{\mu}P)\right]=C.$$

que nous étudierons bientôt. Mais auparavant, déterminons la valeur constante que prendra β sur ζ^h. Or, si l'on pose

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

l'équation de Σ deviendra

$$[illegible]$$

on aura donc sur ζ^h

$$(15) \quad [illegible]$$

en supposant, bien entendu,

$$(16) \quad [illegible]$$

Posons enfin

$$[illegible]$$

et la relation (15) donnera

$$(17) \quad [illegible]$$

formule qui a bien un sens, en vertu de (16).

11. La spirale Σ. — Revenons maintenant à la spirale Σ: elle présente comme pôle le point $X = \varepsilon^{-n}$, et sa tangente menée dans le sens des ω croissants coupe le rayon vecteur sous un angle V tel que $\tan V = \cot(\delta - n\zeta)$; en particulier, pour $\cos(\delta - n\zeta) = 0$, cette spirale se réduira à une droite; mais, en vertu de (16), *elle ne pourra jamais dégénérer en un cercle.* Elle présentera donc deux groupes de spires (exceptionnellement rectilignes) qui convergeront, l'un vers le pôle $X = \varepsilon^{-n}$, l'autre vers le point $X = \infty$; ces groupes seront reliés par un arc (exceptionnellement rectiligne), que nous appellerons *arc normal*, et *dont tous les points resteront à distance bornée de* o, *quelque petit que soit* $|\varepsilon|$, si toutefois δ et C ont été choisis comme on va l'expliquer.

Tout d'abord, η ayant été pris arbitrairement petit, et r_0 en fonction de η comme il a été dit au n° **10**, nous nous donnerons

encore un nombre positif r_1, indépendant de ε, et tel que le rapport $r_1 : r_0$ soit arbitrairement grand (par exemple, égal à ε_1^{-1}). Soit Γ_1 le cercle du plan (ξ) concentrique à Γ et de rayon r_1; Γ et Γ_1 délimiteront une couronne circulaire $(\mathcal{S})$ que nous appellerons *région normale;* d'ailleurs, nous pourrons toujours supposer que $|\varepsilon|$ a été pris inférieur à r_1^{-1}, en sorte que $(\mathcal{S})$ ne contiendra aucun point x_h; nous choisirons enfin pour C une valeur positive fixe, comprise entre r_0'' et r_1''.

Cela étant, à l'intérieur de la couronne $(\mathcal{S}')$ qui est limitée dans le plan (X) par les cercles Γ' et Γ'_1, images de Γ_1 et Γ, le premier membre de (Σ) pourra être développé suivant les puissances croissantes de ε_1'' (1); effectivement, si l'on pose

$$X = Re^{i\Theta},$$

on obtient la relation

$$R\cos(\Theta - \delta) - C = \frac{\varepsilon_1''}{2} R^2 \cos(2\Theta - \delta - n\varphi) + \ldots = 0;$$

par suite, de la manière dont on a choisi C, Σ présentera un arc σ intérieur à $(\mathcal{S}')$ et dont tous les points tendront, pour ε infiniment petit, vers les points du segment déterminé par Γ'_1 sur la droite

$$(\dot{\Sigma}) \qquad R\cos(\Theta - \delta) - C = 0.$$

C'est cet arc que nous appellerons l'*arc normal* de Σ.

Assujettissons maintenant δ à vérifier non seulement la condition (16), mais encore l'inégalité

$$(18) \qquad |\sin(\delta - n\varphi)| > \sin\eta,$$

que nous serons d'ailleurs amenés à introduire au n° **14** pour vérifier la condition b; nous allons voir que, pour $|\varepsilon|$ inférieur à une limite ne dépendant que de r_1 et η, Σ *ne possédera sûrement dans* $(\mathcal{S})$ *aucun autre point que ceux de* σ.

En effet, supposons, par exemple, $\tan(\delta - n\varphi) > 0$, de sorte que, sur Σ, on s'éloignera du pôle en tournant dans le sens direct (par rapport au pôle). La condition en question sera sûrement réa-

(1) La détermination du Log est celle qui se réduit à 1 quand ε tend vers zéro.

lisée si le cercle osculateur à Σ, au point $\omega = -\pi$, est extérieur à Γ_1, le cercle osculateur au point $\omega = \pi$ comprenant, en outre, Γ_1 à son intérieur. Exprimant cette double condition, on obtient aisément les inégalités

$$1 - \varepsilon_1^{2n} r_1^{2n} - 2\varepsilon_1^n r_1^n \rho_1 \operatorname{séc}(\delta - n\varphi) + \rho_1^2 > 0,$$
$$1 - \varepsilon_1^{2n} r_1^{2n} + 2\varepsilon_1^n r_1^n \rho_2 \operatorname{séc}(\delta - n\varphi) + \rho_2^2 < 0,$$

où l'on a posé

$$\log \rho_1 = -C\varepsilon_1^n \operatorname{séc}(\delta - n\varphi) - \pi \operatorname{tang}(\delta - n\varphi),$$
$$\log \rho_2 = -C\varepsilon_1^n \operatorname{séc}(\delta - n\varphi) + \pi \operatorname{tang}(\delta - n\varphi).$$

Or, d'après (18), $\operatorname{tang}(\delta - n\varphi)$ est bornée inférieurement en fonction de η; dès lors, les inégalités précédentes entraînent aussitôt le résultat que nous avions annoncé.

Il n'y a donc que deux points de Σ, soient M_1 et M_2 sur la circonférence Γ'_1. Appelons M_1 *le premier de ces deux points que l'on rencontre lorsqu'on décrit Σ en s'éloignant du pôle;* nous allons calculer les arguments de M_1 et M_2 en convenant d'adopter $-n\varphi$ comme argument du pôle $X = \varepsilon^{-n}$, et d'attribuer à M_1 et M_2 les arguments résultant d'une variation continue le long de Σ.

Or, pour $|\varepsilon|$ très petit, M_1 et M_2 sont très voisins des intersections de la droite Σ avec Γ'_1; l'argument de M_1, par exemple, aura donc sensiblement pour valeur

$$-\delta + f\frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

avec $f^2 = 1$; mais l'argument du pôle étant $-n\varphi$, et M_1 *devant en être plus près que* M_2 [1], on doit avoir

$$\cos\left(\delta - n\varphi + f\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\delta - n\varphi - f\frac{\pi}{2}\right),$$

d'où

$$f \sin(\delta - n\varphi) = 0.$$

Il reste à fixer l'entier k; or, il est loisible de choisir la détermi-

[1] Il ne peut y avoir ambiguïté, car les points M_1 et M_2 ne pourraient devenir équidistants du pôle que dans le cas où l'on aurait $\sin(\delta - n\varphi) = 0$, ce qui est interdit. D'ailleurs, dans ce cas, Σ dégénérerait en un cercle, et la définition de M_1 et M_2 deviendrait illusoire.

nation de δ de telle sorte que l'on ait $|\delta - n\varphi| < \pi$; ceci posé, quand on va du pôle au point M_1, on n'a pas encore rencontré le rayon vecteur issu de O dans la direction opposée à $O\varepsilon_1''$; la différence entre l'argument du pôle et celle du point M_1 est donc inférieure à π en valeur absolue, ce qui montre, d'après notre convention, qu'on doit prendre $k = 0$, et l'on est ainsi conduit à la règle que voici :

Le symbole f étant déterminé par les relations

$$f^2 = 1, \qquad f \sin(\delta - n\varphi) > 0, \tag{19}$$

les arguments de M_1 *et* M_2 *seront respectivement* $-\delta - f\frac{\pi}{2}$ *et* $-\delta + f\frac{\pi}{2}$ (à une erreur près de l'ordre de $\varepsilon_1'' r_1''$ [1]).

Donnons immédiatement une application qui nous sera bientôt utile. Faisons varier δ de telle sorte que $\delta - n\varphi$ parcoure l'intervalle $(-\pi, +\pi)$ en respectant la condition (18); nous trouverons aussitôt, pour les arguments de M_1 et M_2, le Tableau de valeurs ci-dessous :

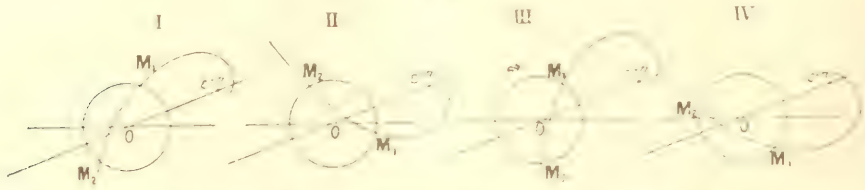
$\delta - n\varphi$	$-\pi + \eta$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\eta$
M_1	$-n\varphi + \frac{\pi}{2} - \eta$	$-n\varphi$	$-n\varphi - \frac{\pi}{2} + \eta$
M_2	$-n\varphi - \frac{3\pi}{2} - \eta$	$-n\varphi + \pi$	$-n\varphi + \frac{\pi}{2} - \eta$
$\delta - n\varphi$	$+\eta$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi - \eta$
M_1	$-n\varphi + \frac{\pi}{2} - \eta$	$-n\varphi$	$-n\varphi - \frac{\pi}{2} + \eta$
M_2	$-n\varphi - \frac{\pi}{2} - \eta$	$-n\varphi + \pi$	$-n\varphi - \frac{3\pi}{2} + \eta$

On voit que, $\delta - n\varphi$ croissant, les arguments de M_1 et M_2 vont toujours en décroissant; de plus, lorsque $\delta - n\varphi$ traverse la valeur 0, les points M_1 et M_2 se permutent; enfin, l'arc parcouru par les points M_1 et M_2 a une amplitude de $3\pi - 4\eta$, son milieu étant sur le rayon aboutissant au pôle.

---

(1) Dorénavant, on conviendra de négliger cette erreur.

Suivant les valeurs de $\delta - n\varphi$, la spirale Σ présentera donc par rapport au cercle Γ_1 l'une des dispositions ci-dessous :



Dans les cas I et IV $[\cos(\delta - n\varphi) < 0]$, l'arc $M_1 M_2$ de Σ tourne sa concavité par rapport à O : nous dirons qu'il est *concave;* de même, dans les cas II et III, l'arc $M_1 M_2$ sera dit *convexe;* ces dénominations n'ont d'ailleurs plus de sens pour $\cos(\delta - n\varphi) = 0$. Observons enfin que si l'on fait croître φ (ε conservant une valeur fixe), Σ tournera autour du pôle ε^{-n}, dans le sens positif ou négatif suivant qu'on a $\sin(\delta - n\varphi) >$ ou < 0. Soit Σ_0 la position initiale de Σ; dans les deux cas, Σ finira par sortir du cercle Γ_1 après avoir balayé celle des deux régions limitée par Γ_1 et Σ_0 qui ne contient pas l'origine.

12. La courbe $\mathcal{L}$. — Et maintenant, il sera facile de discuter l'allure de la courbe $\mathcal{L}$. Puisqu'elle se déduit de Σ par la transformation (4), elle devra comporter n branches, qui se dérouleront respectivement à partir de chacun des points $x_n = \varepsilon^{-n}$ transformés de ε_1^{-n}; il nous suffira d'étudier l'une de ces branches, $\mathcal{L}''$ par exemple, toutes les autres s'y ramenant par des rotations de $2\pi : n$ autour de l'origine. Or, dans le voisinage du point asymptote $x_n = \varepsilon^{-1}$, d'argument $-\varphi$, $\mathcal{L}''$ est assimilable à une spirale logarithmique qui couperait ses rayons vecteurs sous un angle complémentaire de $\delta - n\varphi$. Décrivons ses spires en nous éloignant de x_n; nous ne pourrons rencontrer la circonférence Γ_1 $(r = r_1)$ qu'en deux points, m_1 et m_2, m_1 étant le point d'entrée dans (s). Pour $|\varepsilon|$ très petit, les arguments de m_1 et m_2 seront

respectivement très voisins de

$$-\frac{1}{n}\left(\delta - f\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad -\frac{1}{n}\left(\delta - f\frac{\pi}{4}\right),$$

où f est toujours défini par (19). Quant à l'arc de $\mathcal{L}$ compris entre ces deux points (et que nous appellerons encore *arc normal*), il sera très voisin de l'une des branches de la courbe

$$(\bar{\mathcal{L}}) \qquad r^n \cos(n\theta + \delta) = 0,$$

transformée de Σ par (14). Enfin, passé le point m_2, la branche $\mathcal{L}$ s'éloignera de O pour s'enrouler asymptotiquement autour de x_2 à la manière d'une spirale qui couperait les rayons vecteurs sous un angle complémentaire de $\delta - n\varphi$: c'est là une conséquence immédiate de la relation

$$\frac{1}{R}\frac{dR}{d\Theta} = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi}$$

qui résulte de (14).

En s'appuyant sur ces données, on construira aisément la courbe $\mathcal{L}$ qui, pour $n = 3$, aura l'aspect ci-dessous :

Fig. [illegible]

Pour simplifier le tracé, on a figuré simultanément sur un même plan les courbes I et III correspondant à des arguments δ dont la différence est π ; de même pour II et IV [1]. Les courbes I et III, par

[1] Les courbes I et IV [illegible] courbes II et III [illegible]

exemple, peuvent être considérées comme appartenant à un faisceau d'équation ($\mathcal{L}$) (n° **10**), où C ne serait plus obligatoirement positif [1]. Un tel faisceau comprendrait la courbe $\mathcal{L}'$, obtenue pour $C = 0$ et qui a été figurée en pointillé; cette courbe passe par l'origine qui est pour elle un point d'ordre n, les tangentes en ce point ayant pour arguments $\frac{1}{n}\left[(2h+1)\frac{\pi}{2} - \delta\right]$. D'ailleurs, lorsque ε tend vers zéro, les arcs normaux de $\mathcal{L}'$ tendent précisément vers les asymptotes de $\bar{\mathcal{L}}$.

De plus, du Tableau donné au n° **11**, il résulte immédiatement que si $\delta - n\varphi$ (compris entre $-\pi$ et $+\pi$) vérifie toujours l'inégalité (18), les points d'intersection m_1 et m_2 de la branche $\mathcal{L}^h$ ne pourront varier qu'à l'intérieur d'un arc d'amplitude $\frac{3\pi}{n}$, et dont le milieu serait sur le segment rectiligne Ox_h. Enfin, de la remarque qui termine le numéro précédent, on peut conclure que, C croissant, chaque branche de $\mathcal{L}^h$ se déformera en balayant la région comprise entre la branche $\mathcal{L}^h$ initiale et Γ_1 (et ne renfermant pas O), cela, d'ailleurs, sans que deux branches distinctes puissent avoir un point commun [2].

13. Les chemins $\mathcal{L}^h$. — Cette discussion achevée, nous pouvons définir des chemins $\mathcal{L}^h$ qui satisferont à la condition a du n° **9**.

Tout d'abord, d'après (18), $\sin(\delta - n\varphi)$ a un signe bien déterminé; prenons

$$\frac{d\rho}{ds}\sin(\delta - n\varphi) = 0.$$

---

(1) Ici, C prendrait tour à tour des valeurs égales et de signes contraires.

(2) Pour compléter la discussion précédente, on pourra observer que le passage de II à III, ou de IV à I, passage qui s'effectue par la valeur exclue $\sin(\delta - n\varphi) = 0$, fait apparaître comme courbes de transition des courbes algébriques, du type lemniscatique général, tandis que les courbes II, III comprennent alors n branches fermées, entourant chacun des points x_h, les courbes I-IV affectent la forme d'un circuit fermé unique entourant l'ensemble des x_h. C'est le cas critique, où la définition de m_1 et m_2 n'a plus de sens. Enfin, le passage des courbes concaves I, IV aux courbes convexes II, III s'effectue quand $\cos(\delta - n\varphi)$ s'annule : les courbes $\mathcal{L}$ sont encore algébriques, de formes analogues à celle de $\bar{\mathcal{L}}$, et passent par les x_h.

d'après (13) et (17), on devra avoir

$$\sin(\beta_{j,k} - \delta) \leq \sin \eta_1;$$

d'ailleurs, si l'on change le sens de l'une des deux inégalités précédentes, il devra en être de même pour l'autre. En définitive, le sens de parcours qu'on doit prendre sur $\mathfrak{L}$ à partir du point $\mathfrak{z}$, pour en déduire un chemin d'intégration $\mathfrak{L}_k^h$ satisfaisant à la condition a, est défini par la règle suivante :

Choisissons $f_{j,k}$ et $\beta_{j,k}$ *au moyen des relations*

$$f_{j,k} = 1, \qquad f_{j,k} \sin \beta_{j,k} = \eta_1 \sin \eta_1 \tag{20}$$

on doit avoir

$$f_{j,k} \sin \delta - n \Im \left(\frac{d\mathfrak{z}}{ds} \right) = 0. \tag{21}$$

Enfin, il résulte de cette règle, et de la discussion du n° **11**, que sur les arcs normaux de $\mathfrak{L}$, le sens de parcours, qui vient d'être adopté, satisfait à la condition

$$f_{j,k} \frac{d\mathfrak{z}}{ds} > 0. \tag{22}$$

En effet, quel que soit le sens suivant lequel on se déplace sur un arc normal, le produit $f \frac{d\mathfrak{z}}{ds} \frac{d\mathfrak{z}}{ds}$ est sûrement positif; et, jointe à (19) et à (21), cette inégalité entraîne aussitôt (22).

14. La condition b. — Ainsi donc, moyennant l'adoption du sens de parcours (20)-(21) sur les branches $\mathfrak{L}^h$ de $\mathfrak{L}$, la condition a sera certainement vérifiée; il nous reste à montrer comment on doit choisir les constantes C et δ de (5), de façon à satisfaire à la condition b. Pour cela, observons d'abord qu'on a, en vertu de (14),

$$1 = \int_{\mathfrak{L}} \frac{ds}{r} = \int_{\mathfrak{L}_1^h} \frac{ds}{r} + \sum_{h=2}^{n} \int_{\Sigma_h} \left| \frac{dX}{X} \right|,$$

la première intégrale étant étendue à toute la branche $\mathfrak{L}_1^h$ et la dernière à toute la spirale Σ. Posons alors $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1$ pour abréger,

sur Σ,

$$\sigma = u\cot(\delta - n\omega) + C(u\operatorname{cosec}(\delta - n\omega)),$$

en supposant toujours (16) ou (18) vérifiée; d'ailleurs, dans cette hypothèse, pour décrire toute la spirale, il suffira de faire varier u de $-\infty$ à $+\infty$. Cela étant, on pourra écrire, sur Σ,

$$\varepsilon_1^{\prime\prime}|dX| = e^{\sigma}\sqrt{du^2 + d\sigma^2} = e^{\sigma}|\operatorname{cosec}(\delta - n\omega)|\,du,$$

$$\varepsilon_1^{\prime\prime}|X|^2 = 1 - 2e^{\sigma}\cos|u\cot(\delta - n\omega) + C(u\operatorname{cosec}(\delta - n\omega))| + e^{2\sigma},$$

d'où

$$(23)\quad I = \frac{\varepsilon_1}{n|\sin(\delta - n\omega)|} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\sigma}\,du}{\left(1 - 2e^{\sigma}\cos|u\cot(\delta - n\omega) + C(u\operatorname{cosec}(\delta - n\omega))| + e^{2\sigma}\right)^{\frac{1}{2}(1+\varepsilon_1)}}.$$

Cela étant, je dis d'abord que I *ne peut être uniformément bornée* (pour $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_1^{\prime}$) *que si* $\delta - n\omega$ *vérifie non seulement* (16) *mais* (18). Car divisons l'intervalle d'intégration en trois parties, au moyen des points $\pm 2\log 2$; pour

$$-\infty < u < -2\log 2,$$

on a

$$\frac{1}{2} \leqq 1 - \frac{1}{2} \leqq 1 - 2e^{\sigma}\cos|u\cot(\delta - n\omega) + C(u\operatorname{cosec}(\delta - n\omega))|$$

$$\leqq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = \frac{25}{16},$$

d'où

$$\frac{\varepsilon_1}{|n|\sin(\delta - n\omega)|}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}(1+\varepsilon_1)} \qquad I_1 < \frac{\varepsilon_1}{|n|\sin(\delta - n\omega)|}\,\frac{5^{\frac{1}{2}(1+\varepsilon_1)}}{4^{\frac{1}{2}(1+\varepsilon_1)}},$$

où I_1 désigne la partie de I provenant de l'intervalle $(-\infty, -2\log 2)$; or la première inégalité justifie ce que nous avions avancé; la seconde montre que si (18) est réalisée, I_1 sera arbitrairement petite avec ε_1; et une conclusion analogue s'appliquerait à l'intervalle $(2\log 2, +\infty)$.

Reste à étudier l'intervalle $(-2\log 2 < u < 2\log 2)$. Or les infinis de la fonction à intégrer sont donnés par la formule

$$u\cot(\delta - n\omega) + C(u\operatorname{cosec}(\delta - n\omega)) = \pm\pi(k + \varepsilon_2),\ \ldots$$

où k est un entier quelconque; ceux qui correspondent à $k = 0$ tendent vers 0 avec ε_1; les autres restent à une distance de l'axe réel bornée inférieurement si (18) est satisfaite. Dès lors, un calcul facile montre que la fonction figurant sous le signe $\int$ dans (9) peut s'écrire

$$\frac{[\sin(\delta - n\varepsilon)]^{\frac{1}{n}} F(u, \varepsilon_1)}{[u^2 - 2C\varepsilon_1^{\frac{1}{n}} u \cos(\delta - n\varepsilon) + C^2 \varepsilon_1^{\frac{2}{n}}]^{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}}.$$

$F(u, \varepsilon_1)$ étant une fonction de u et ε_1, qui, pour u et ε_1 voisins de 0, est holomorphe, et tend vers 1. En conséquence, un raisonnement classique montre que la partie de I, relative à l'intervalle $(-2\log 2, +2\log 2)$, et par suite I elle-même, d'après ce qui précède, tend, pour ε infiniment petit, vers la quantité

$$\frac{\varepsilon_1}{n}[\sin(\delta - n\varepsilon)]^{\frac{1}{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{[u^2 + 2C\varepsilon_1^{\frac{1}{n}} u \cos(\delta - n\varepsilon) + C^2 \varepsilon_1^{\frac{2}{n}}]^{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}}$$

$$= \frac{1}{nC^{\frac{1}{n}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{(s^2 + 1)^{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}}.$$

En définitive, pour que l'intégrale $I = \int_{\mathcal{L}^h} \frac{ds}{s}$, étendue à *toute* la branche $\mathcal{L}^h$, reste inférieure au nombre τ du n° **9**, il suffira de prendre δ, C et ε de façon à vérifier la condition (18) et les suivantes

$$(24) \qquad \begin{aligned} &|\delta| \leq \frac{\pi}{2}, \quad \varepsilon \leq H_1 \tau, \\ &C \geq 1, \quad C \leq \frac{H_2}{\tau^{\frac{1}{n}}}, \end{aligned}$$

H_1 et H_2 étant des quantités numériques ne dépendant que de n.

13. Expression des intégrales $y_i(t)$ au moyen des intégrales canoniques. Intégrales paracanoniques. — Et maintenant, la démonstration de convergence, que nous avions commencée au n° **9**, se trouve complètement achevée : Sur l'une

quelconque des n branches de la courbe $\mathcal{L}$, les approximations convergent régulièrement vers une intégrale $Z_j(x)$ de (E_j) qui fournit une intégrale $y_j(x) = u_j(x)\, Z_j(x)$ de l'équation primitive (E). On peut observer dès à présent que ces intégrales satisfont sur $\mathcal{L}^h$ à la relation

$$(25) \qquad Z_j(x) = 1 + \frac{H\tau}{\gamma H\tau},$$

qui est une conséquence immédiate des inégalités du n° **9**; or γ et H ne dépendent que de l'équation (E), tandis que τ peut être pris aussi petit qu'on voudra pourvu que C (¹) et $|\varepsilon|^{-1}$ aient été choisis assez grands. Dès maintenant, nous pouvons donc affirmer que la méthode d'approximations successives du n° **8** fournit pour (E) des intégrales y_j, qui, sur les chemins $\mathcal{L}^h$, *se comportent très sensiblement comme les exponentielles u_j du n° 7*.

Mais, sur un chemin $\mathcal{L}^h$ donné (²), de façon à satisfaire aux conditions a et b, on peut préciser notablement l'allure des intégrales $y_j(x)$; à cet effet, nous allons montrer que *ces intégrales peuvent être définies*, indépendamment de la méthode des approximations successives, *au moyen des intégrales canoniques de* (E) *relatives aux points x_h et x_α*. En effet, les racines de (3) étant supposées distinctes, les m racines de chacune des équations fondamentales déterminantes, relatives aux x_h et à x_α, seront toutes distinctes pour $|\varepsilon|$ suffisamment petit. Dans le voisinage de x_h, l'équation (E) possédera donc un système d'intégrales canoniques de la forme

$$y_{1,h} = e^{\int \left(\frac{\lambda_{1,h}}{x-x_h} + \cdots\right) dx}\, \zeta_{1,h}(x), \quad \ldots, \quad y_{m,h} = e^{\int \left(\frac{\lambda_{m,h}}{x-x_h} + \cdots\right) dx}\, \zeta_{m,h}(x),$$

les $\zeta_{i,h}$ holomorphes dans le domaine de x_h se réduisant à l'unité en ce point. De même, autour de x_α, on aura le système canonique suivant :

$$y_{1,\alpha} = u_{1,\alpha}\, \zeta_{1,\alpha}(x), \quad \ldots, \quad y_{m,\alpha} = u_{m,\alpha}\, \zeta_{m,\alpha}(x).$$

Ceci posé, notre intégrale $y_j(x)$ satisfait le long de $\mathcal{L}^h$ à des rela-

---

(¹) Donc, aussi, τ_1 (n° **11**).

(²) Donc pour C fixe.

tions linéaires, à coefficients constants, de la forme

$$\begin{aligned} y_j(x) &= a_1 y_{1,h} + \ldots + a_j y_{j,h} + \ldots + a_m y_{m,h} \\ &= b_1 y_{1,\infty} + \ldots + b_j y_{j,\infty} + \ldots + b_m y_{m,\infty}. \end{aligned}$$

Cherchons à déterminer les a_j ou les b_j. Or, divisons par u_j les deux relations précédentes; il viendra

$$(26) \qquad \begin{aligned} Z_j(x) &= a_1 \frac{u_1}{u_j} \zeta_{1,h} + \ldots + a_j \zeta_{j,h} + \ldots + a_m \frac{u_m}{u_j} \zeta_{m,h} \\ &= b_1 \frac{u_1}{u_j} \zeta_{1,\infty} + \ldots + b_j \zeta_{j,\infty} + \ldots + b_m \frac{u_m}{u_j} \zeta_{m,\infty}. \end{aligned}$$

Mais il résulte de l'analyse du n° **13** que, si ξ se déplace vers x_h le long du chemin $\mathcal{C}^h$,

$$|\omega_{j,k}(x, \xi, \varepsilon)| = \left| \frac{u_k(x) : u_j(\xi)}{u_j(x) : u_k(\xi)} \right|$$

sera décroissant (ou croissant) lorsque les inégalités

$$f' \sin(\zeta_{j,k} - \theta) > \sin \eta, \qquad f' \sin(\theta - \eta) > 0$$

seront compatibles (ou non) pour une même racine carrée de l'unité, f'. Dès lors, $u_k(x) : u_j(x)$ tendra vers ∞ (ou o) quand x s'éloignera indéfiniment sur $\mathcal{C}^h$; il tendra vers o (ou ∞) quand x se rapprochera de x_h (sur $\mathcal{C}^h$).

Cela étant, plaçons-nous d'abord dans le cas le plus simple, et *supposons l'équation* (E) *telle que, pour toutes les valeurs de* h ($\neq j$), $u_k : u_j$ *tende vers l'infini avec* x [1]. S'il en est ainsi, on peut évidemment recommencer la démonstration du n° **9**, en prenant pour τ l'intégrale $\int r^{-2} ds$ *étendue, non plus à la branche* $\mathcal{C}^h$ *entière, mais à l'arc de* $\mathcal{C}^h$ *compris entre* x *et* x_h, *arc avec lequel coïncident tous les chemins d'intégration.* On peut donc substituer à τ une certaine fonction de $|x|$, nulle avec $|x^{-1}|$; dès lors, l'inégalité (25) montre qu'actuellement $|Z_j - 1|$ tend vers o pour x infini (sur $\mathcal{C}^h$). Il viendra donc, d'après (26),

$$b_j = 1, \quad b_1 = \ldots = b_{j-1} = b_{j+1} = \ldots = b_m = 0;$$

[1] Nous verrons plus loin (n° **21**) que cette circonstance peut effectivement se réaliser.

l'intégrale $y_j(x)$ qu'on aura calculée sera donc l'une des intégrales canoniques relatives à x_∞, et les a_k coïncideront alors avec les coefficients des substitutions de passage relatives au couple (x_h, x_∞). De plus, quand x tend vers x_∞, $\mathcal{L}_1(x)$ tend vers o; a_1 est donc très voisin de 1, si r_1 est très grand [1]. Mais $a_j - 1$ est évidemment indépendant de r_1; effectivement, nous verrons n° **17** que $a_j - 1$ est une fonction de ε qui tend vers o avec cette variable.

On montrerait de même que si tous les $u_k : u_j$ tendent vers ∞ quand x tend vers x_h (sur $\mathcal{C}^h$), $y_j(x)$ coïncide avec une des intégrales canoniques relatives à x_h.

Considérons enfin le cas général où pour certaines valeurs de l'indice k $(r_1, \ldots, r_p, \ldots, r_q)$, $u_k : u_j$ tend vers l'infini avec x, tandis que pour les valeurs restantes $(t_1, \ldots, t_\eta, \ldots, t_\theta)$ $(\theta = p + q - m - 1)$, $u_k : u_j$ tend vers o avec x [1]. Le raisonnement précédent montre qu'on aura

$$\begin{aligned} y_j(x) &= a_j y_j(x_\infty) + a_{r_1} y_{r_1}(x_\infty) + \ldots + a_{r_q} y_{r_q}(x_\infty) \\ &= b_{t_1} y_{t_1}(x_\infty) + b_{t_2} y_{t_2}(x_\infty) + \ldots + b_{t_\theta} y_{t_\theta}(x_\infty), \end{aligned}$$

a_j et b_k étant deux fonctions de ε dont on peut montrer qu'elles tendent vers 1 pour ε infiniment petit.

Ainsi donc, dans le voisinage du point régulier x_h, $y_j(x)$ s'exprimera au moyen de $p+1$ intégrales canoniques déterminées, et, dans le voisinage de x_∞, y_j sera une combinaison de

$$q + 1 \quad \text{ou} \quad p + 1$$

intégrales canoniques déterminées; nous dirons que $y_j(x)$ est une *intégrale paracanonique* pour le couple de points singuliers (x_h, x_∞); nous dirons encore qu'elle est d'*indice $p+1$ pour x_h, et d'indice $q+1$ pour x_∞*, ou, plus simplement encore, qu'*elle est d'indice $p+1$*, si l'on a $p < q$. Nous reviendrons d'ailleurs sur ces intégrales au n° **26**.

---

[1] Rappelons que $\mathcal{L}_1(x_\infty) = 1$, et que $\mathcal{L}_1(x_h)$ est très voisin de 1 pour r_1 très grand.

DEUXIÈME PARTIE.

LES SECTEURS Δ ET ∇

16. Les faisceaux $[\mathcal{C}^h]$. — Revenons au calcul effectif des intégrales y_j; nous ne l'avons effectué jusqu'ici que le long de l'arc de courbe $\mathcal{C}^h$: nous nous proposons maintenant de déterminer le *domaine* le plus étendu possible du plan (x) en tout point duquel on puisse calculer cette même intégrale y_j par la méthode d'approximations successives du n° **8**. A cet effet, nous établirons d'abord un lemme préliminaire.

Donnons pour l'instant une valeur fixe à h : les courbes $\mathcal{C}$ dépendent de deux paramètres arbitraires, C et δ : si le point x appartient à l'une d'elles (C_0, δ_0), il appartiendra encore à une multiplicité ∞^1 de branches $\mathcal{C}^h$ de courbes $\mathcal{C}$. Considérons alors dans cette multiplicité l'ensemble de toutes les courbes pour lesquelles on a

$$C' \leqq C \leqq C'', \quad \delta' \leqq \delta \leqq \delta'',$$

C', C'', δ', δ'' étant tels que C et δ variant dans les intervalles précédents : 1° les conditions (18) et (24) soient constamment réalisées; 2° les symboles f et $f_{j,k}$ conservent constamment les mêmes valeurs. Il est clair qu'on pourra toujours trouver des quantités C', C'' et δ', δ'' assez voisines de C et δ pour que les hypothèses précédentes soient vérifiées.

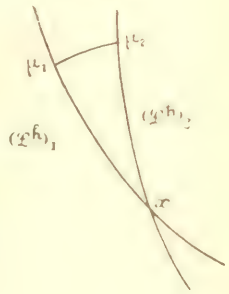
Cela étant, nous dirons de l'ensemble des branches $\mathcal{C}^h$ issues d'un même point fixe, correspondant à la même valeur de h, et satisfaisant aux conditions précédentes, qu'il constitue *un faisceau* $[\mathcal{C}^h]$, et nous établirons le lemme suivant :

Lemme. — *La valeur que les approximations successives fournissent au point x pour l'intégrale $y_j(x)$ est indépendante de la courbe du faisceau sur laquelle on effectue les approximations.*

Soient $[\mathcal{C}^h]_1$ et $[\mathcal{C}^h]_2$ deux branches s'enroulant autour du même point x_h et appartenant au faisceau, d'après nos hypothèses, le mode de parcours qu'il faudra adopter pour décrire les chemins d'intégration

gration $(\xi_k^h)_1$ et $(\xi_k^h)_2$ ne pourra varier d'une branche à l'autre. Désignons alors par μ_1 et μ_2, deux points pris sur $(\xi_k^h)_1$ et $(\xi_k^h)_2$, de telle sorte que les arcs $x\mu_1$ et $x\mu_2$ fassent respectivement partie de $(\xi_k^h)_1$ et $(\xi_k^h)_2$; on pourra choisir μ_1 et μ_2 aussi loin qu'on voudra

Fig.



(si les ξ_k^h vont à l'infini, ou aussi près qu'on voudra de x_∞ si les ξ_k^h tendent vers x_h) tout en satisfaisant constamment à la double condition suivante : les points μ_1 et μ_2 devront pouvoir être reliés par un chemin $\widehat{\mu_1\mu_2}$, dont tous les points ξ appartiendront, chacun, à une branche du faisceau $|\xi^h|$, et qui sera tel en outre que a'. Les $|\omega_{jk}(x, \xi, \varepsilon)|$ calculés au point ξ de $\widehat{\mu_1\mu_2}$ par variation continue à partir de la valeur adoptée en $\xi = \mu_1$ (ou en $\xi = \mu_2$) resteront inférieurs à $1 : h'$. L'intégrale $\int r^{-2}\,ds$ étendue à $\widehat{\mu_1\mu_2}$ sera infiniment petite.

Il est clair qu'on pourra toujours réaliser la double condition précédente : car, d'abord, tous les points de $\widehat{\mu_1\mu_2}$ appartenant à une branche du faisceau, la fonction $|\omega_{jk}|$, uniforme dans l'aire $x\mu_1\mu_2$, est nécessairement inférieure à 1 sur $\widehat{\mu_1\mu_2}$. De plus, les points μ_1 et μ_2 pouvant être choisis arbitrairement près de x_k (ou de x_∞), l'intégrale $\int r^{-2}\,ds$ étendue à $\widehat{\mu_1\mu_2}$ peut être rendue arbitrairement petite; il en serait de même, d'ailleurs, si l'on étendait cette intégrale de μ_1 et de μ_2 à x_h (ou à x_∞) le long de $(\xi^h)_1$ et de $(\xi^h)_2$.

Il résulte aussitôt de là que la quadrature de rang k figurant dans l'expression (10) de z_{p+1} et étendue successivement le long de $\widehat{\mu_1\mu_2}$,

et le long des arcs de $(\zeta_k^h)_1$ et $(\zeta_k^h)_2$, s'éloignant de x à partir de μ_1 et μ_2 respectivement, peut être rendue chaque fois aussi petite qu'on voudra en module, moyennant un choix convenable de μ_1 et μ_2. Étendue successivement à $(\zeta_k^h)_1$ et $(\zeta_k^h)_2$, la quadrature donnera donc des résultats égaux [1], et les valeurs obtenues en x pour z (donc pour Z_j) sur l'un et l'autre chemin sont nécessairement identiques. C. Q. F. D.

17. Les secteurs Δ. — Ce lemme établi, prenons pour (C', C''), (δ', δ'') les intervalles les plus étendus qui soient compatibles avec les conditions que nous venons de leur imposer; les branches ζ^h balaieront alors dans la région normale (s) [n° **11**] un domaine à deux dimensions, Δ, *en tout point duquel les approximations* (10) *fourniront sans ambiguïté la valeur d'une intégrale bien déterminée de* (E), *et cela, d'ailleurs, quelle que soit la branche de* ζ^h *qu'on aura adoptée*. Nous allons définir les frontières de Δ.

Tout d'abord, maintenons δ fixe, et faisons croître C depuis la valeur minimum C_0 (24); d'après la remarque qui termine le n° **12**, chacun des arcs de la branche ζ^h qui est compris à l'intérieur de (s) balaiera la portion de (s) extérieure à o, et comprise entre Γ_1 et la position initiale de ζ^h; soit Δ' cette région; nous allons étudier les variations de Δ' quand on fait varier δ.

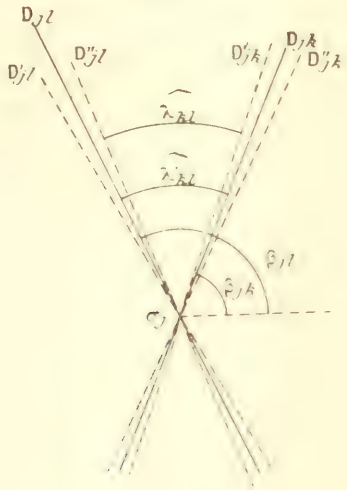
A cet effet, figurons dans un plan (σ) les m racines $\alpha_{n-1}^{(k)}$ de l'équation (5) (*fig.* 4, p. 138), racines que nous désignerons par σ_j pour abréger, et qui, nous le savons, tendent vers les s_j. Appelons D_{jk} la droite qui joint les points σ_j, σ_k et D_j la droite d'argument $n\varphi$ menée par σ_j; ces droites délimiteront autour de σ_j comme origine $2m$ angles adjacents, deux à deux opposés par le sommet, et, en général, non nuls [2]. Menons alors, par σ_j, $2m$ couples de droites D'_{jk}, D''_{jk}; D'_j, D''_j, telles que les droites de chacun d'eux fassent avec la droite D_{jk} ou D_j correspondante un angle égal à $\pm\eta_0$

[1] On observera que les fonctions à intégrer sont holomorphes dans le triangle curviligne $\mu_1\mu_2$.

[2] Le cas où il n'en serait pas ainsi n'offre d'ailleurs aucune difficulté (cf. la note suivante).

Nous désignerons encore par λ_{kl} l'angle formé par D_{jk} et D_{jl}, par λ_{kl} sa mesure ($< \pi$) : par λ_{kl} l'angle de mesure $\lambda_{kl} - \lambda'_{kl} - 2\eta$

Fig. 4.



formé par D''_{jl} et D'_{jk} par exemple ; de même, nous représenterons par λ_{jk}, λ_{kl}, λ_{kl}, λ_k les éléments analogues relatifs au couple D_{jk}, D_j. Nous aurons donc défini, autour de σ_j, $2m$ angles finis [1], d'amplitudes λ_{kl} ou λ_k ; ils seront séparés par $2m$ angles d'amplitude arbitrairement petite 2η, que nous désignerons sous le nom *d'échancrures*.

---

[1] Les σ_j tendant vers les s_j, si trois quelconques des s_j ne sont pas en ligne droite, on peut toujours supposer que les droites D_{jk} sont distinctes ; de plus, on peut encore supposer que la loi suivant laquelle ε tend vers 0 est telle qu'aucune des D_j ne coïncide avec aucune des D_{jk}. Dans ces conditions, si $|\varepsilon|$ a été pris assez petit, le nombre η du n° **10** pourra toujours être choisi assez petit [en fonction des constantes de l'équation (E) et des limites assignées à φ, par exemple] pour que les $2m$ angles λ_j aient, chacun, une amplitude positive. Le cas où cette double hypothèse ne serait pas réalisée n'offrirait d'ailleurs que des longueurs d'écriture. On verra, de plus (n° **20**), que les restrictions qu'on a imposées aux variations de φ sont sans influence sur le passage à la limite de (E) à ($\overline{\text{E}}$).

Ces notations présentées, observons que les arguments des directions D'_j, D''_j, D_{jk}, D_{jk} sont $n\varphi - \alpha_j$, $\beta_j - \alpha_j$ (à un multiple près de π); il en résulte aussitôt que *les conditions* (18) *et* (20) *ne pourront être vérifiées que si le rayon* D, *d'origine* σ_j, *et d'argument* δ, *n'appartient à aucune échancrure;* de plus, les symboles f et f_{jk} ne pourront conserver des valeurs fixes que si D reste intérieur à un même angle λ_{kl} ou λ_k. Le domaine le plus étendu possible où les approximations du n° **8** convergent vers une même intégrale $y_j(x)$ sera donc celui, Δ, qui est balayé par Δ' *quand* D *varie à l'intérieur d'un des angles* λ_{kl} *ou* λ_k. Nous allons délimiter ce domaine en nous plaçant par exemple dans le premier des deux cas précédents.

Supposons donc que D varie à l'intérieur de λ_{kl}; l'angle $\delta - n\varphi$ pouvant toujours être ramené à l'intervalle $(-\pi, +\pi)$, nous appliquerons les résultats du n° **12** : l'argument du point m_1 correspondant à φ^h variera de (¹)

$$-\frac{\beta_{jl}-\alpha_j}{n} - f\frac{\pi}{2n} + \frac{2h\pi}{n} \quad \text{à} \quad -\frac{\beta_{jk}-\alpha_j}{n} - f\frac{\pi}{2n} + \frac{2h\pi}{n};$$

pour m_2, les mêmes limites seraient encore valables, à condition de remplacer f par $-f$. Donc, quel que soit le signe de f, les points m_1 et m_2 ne cesseront d'appartenir à un arc dont les extrémités μ' et μ'' auront pour arguments respectifs

$$(27)\qquad \begin{cases} \varphi' = -\dfrac{\beta_{jl}-\alpha_j}{n} - \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{2h\pi}{n}, \\[2ex] \varphi'' = -\dfrac{\beta_{jk}-\alpha_j}{n} + \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{2h\pi}{n}; \end{cases}$$

l'amplitude de cet arc est donc

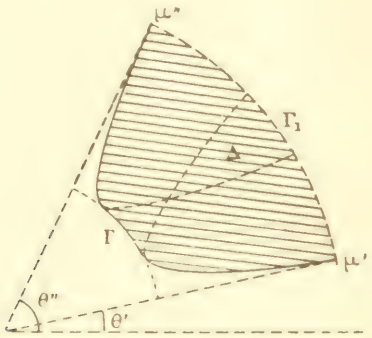
$$\frac{\beta_{jl}-\beta_{jk}-2\alpha_j}{n} + \frac{\pi}{n} = \frac{\pi+\lambda_{kl}-2\alpha_j}{n} = \frac{\pi-\lambda_k}{n} \qquad (\lambda_k = \pi).$$

Ainsi donc, Δ sera limité, d'une part, par deux arcs normaux

(¹) En négligeant des quantités de l'ordre de $\frac{1}{n^2}$ (n° **11**). Désormais cela restera sous-entendu.

appartenant à deux branches $\mathcal{L}^h$ différentes (mais de même indice h), et aboutissant aux points μ' et μ''; d'autre part, par le plus petit des deux arcs $\mu'\mu''$ de Γ_1, et enfin par un arc de Γ qu'il est inutile de préciser davantage (*fig.* 5). Nous donnerons désormais aux domaines Δ le nom de *secteurs;* les directions $O\mu'$, $O\mu''$ seront dites *les directions-frontières* du secteur. Le nombre des

Fig. 5.



secteurs correspondant à un même point σ_j est égal à $2mn$; le nombre total des secteurs est donc de $2m^2n$; d'ailleurs, les intégrales définies dans chacun d'eux ne sont pas nécessairement distinctes : nous en donnerons plus loin (n° **21**) un exemple important. Observons, enfin, que les $2m^2n$ secteurs Δ *se répartissent en* $2m^2$ *groupes, tels que les* n *secteurs de chaque groupe correspondent au même choix de valeurs pour* β_{jl} et β_{jk}, *et ne diffèrent que par la valeur* de l'entier h dans (27); à ces groupes de secteurs, que l'on déduit de l'un quelconque d'entre eux par des rotations successives de $2\pi : n$ autour de l'origine, nous donnerons le nom de *cycles de secteurs*.

Avant d'aller plus loin, montrons comment l'existence d'un domaine Δ, à l'intérieur duquel on sait calculer une même intégrale $y_j(x)$, nous permet d'établir, comme nous l'avions annoncé (n° **13**), que le coefficient a_j de la formule (26) tend vers 1 quand ε tend vers zéro.

Remarquons d'abord qu'on peut substituer à Γ un cercle Γ'',

de rayon r''_0 suffisamment grand pour que dans un secteur Δ'' d'une couronne (s'') limitée intérieurement par Γ'', $y_j(x)$ vérifie une relation (26) avec $|a_j - 1|$ arbitrairement petit : ceci exige d'ailleurs que $|\varepsilon|$ soit suffisamment petit [1]. Mais, si l'on a choisi le rayon extérieur r_1 de la couronne primitive (s) supérieur à r_1 (ce qui exige encore que $|\varepsilon|$ soit suffisamment petit), Δ'' empiétera sur un secteur Δ de (s); d'après sa nouvelle définition du n° **15**, l'intégrale y_j définie dans Δ sera le prolongement de celle qu'on aura définie dans Δ'' : sous une autre forme, c'est dire qu'on peut trouver un nombre ε_1^0 assez petit pour que l'inégalité $|\varepsilon| < \varepsilon_1$ étant vérifiée, $|a_j - 1|$ soit arbitrairement petit [2].

18. Extension de la théorie à l'équation $(\overline{E})$. — La méthode que nous venons d'employer pour calculer des intégrales de l'équation (E) dans des secteurs déterminés Δ du plan (x) peut être appliquée point par point à l'équation irrégulière $(\overline{E})$ qui en est la limite. Aussi, nous bornerons-nous à l'énoncé des résultats; nous ferons exception seulement pour la transformation analogue à celle du début (n° **7**); il sera entendu d'ailleurs, une fois pour toutes, que l'on surmontera d'un trait tous les symboles qui se rapporteront à l'équation limite.

Nous allons donc montrer que les racines s_j de l'équation caractéristique (3) étant distinctes, conformément à notre hypothèse fondamentale, on peut former m expressions

$$\overline{\varpi}_k(x) = \overline{\alpha}_{n-1}^{j} x^{n-1} + \ldots + \overline{\alpha}_0^{j} + \frac{\alpha_{-1}^{j}}{x},$$

telles que l'équation $(\overline{E})$ puisse s'écrire

$$(\overline{E}_1) \qquad \overline{F}(y) = \frac{1}{x^2}\left[\overline{C}_1 y^{(m-1)} + \ldots + \overline{C}_j y^{(m-j)} + \ldots + \overline{C}_m y\right].$$

---

[1] Car il résulte du n° **14** que $\overline{I}$ tend vers 0 avec $\overline{C}^{-1}$ (donc avec r_1^{-1}) (cf. n° **11**) et $|\varepsilon|$.

[2] Une démonstration analogue s'appliquerait pour le coefficient b_j dans le second cas envisagé, ainsi que pour les coefficients a_j et b_j relatifs à l'intégrale paracanonique considérée en troisième lieu.

l'équation $\overline{F}(u) = 0$ ayant pour intégrales les expressions

$$\overline{u}_k(x) = e^{\int \overline{\varpi}_k(x)\,dx} \quad (\overline{\varpi}_k(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{\varpi}_k^{(\nu)}(x^{-1})),$$

et les C_ν admettant $x = \infty$ comme pôle d'ordre $(\nu - 1)(n - 1)$.

Pour le voir, posons $y = z\,e^{\int \overline{\varpi}\,dx}$, et proposons-nous de prendre pour $\overline{\varpi}$ une expression du type donné pour ϖ_k, de telle sorte que le coefficient de z, dans l'équation transformée, présente $x = \infty$ comme pôle d'ordre $m(n-1) - n - 1$ au plus. Les termes d'ordres supérieurs de ce coefficient ne peuvent provenir que de la somme

$$\overline{\varpi}^m + \frac{m(m-1)}{2}\overline{\varpi}^{m-2}\overline{\varpi} + \sum_{\nu=1}^{m} \Lambda_\nu \left[\overline{\varpi}^{m-\nu} + \frac{(m-\nu)(m-\nu-1)}{2}\overline{\varpi}^{m-\nu-2}\overline{\varpi}\right];$$

dès lors, si $\Pi_k(x)$ désigne l'une des racines de l'équation

$$(28)\quad \Pi^m + \frac{m(m-1)}{2} n \Pi^{m-2} + \sum_{\nu=1}^{m} \Lambda_\nu \left[\Pi^{m-\nu} + \frac{(m-\nu)(m-\nu-1)}{2} n \Pi^{m-\nu-2}\right] = 0,$$

la différence $\varpi_k - \Pi_k(x)$ s'annulera pour $x = \infty$ comme x^{-2} au moins. L'équation (28) ayant ses m racines méromorphes et du type précité pour $x = \infty$ (en raison de l'hypothèse faite sur les s_j), l'existence des $\overline{\varpi}_k(x)$ se trouve établie.

Cherchons alors la forme la plus générale des coefficients Λ_ν conduisant aux mêmes expressions pour *tous* les $\overline{\varpi}_k$; si les systèmes Λ_ν' et Λ_ν'' $(\nu = 1, \ldots, m)$ répondent à la question, les différences

$$\Lambda_\nu' - \Lambda_\nu'' = a_\nu$$

devront satisfaire à m relations du type

$$a_1 \varpi_k^{m-1} + \ldots + a_\nu \varpi_k^{m-\nu} + \ldots + a_m = P_k,$$

où les P_k sont pour $x = \infty$ d'ordre au plus égal à $m(n-1) - n - 1$. Or le déterminant des coefficients des a_ν est *exactement* d'ordre $\frac{m(m-1)}{2}(n-1)$, en vertu de notre hypothèse fondamentale : a_ν est

donc au plus d'ordre $(\nu - 1)(n - 1) - \nu$, et, en raisonnant comme au n° **7**, on en déduit aussitôt la possibilité de la transformation annoncée [1].

Cela étant, pour intégrer (E_1), on posera, par exemple, $y = u_1 \overline{Z}_1$; $\overline{Z}_j$ satisfera à une équation (E_2) qui admettra comme intégrale la fonction limite $\overline{Z}_j(x)$ des approximations

$$\overline{z}_{j,0}(x) = 1,$$

$$\overline{z}_{j,k+1}(x) = 1 + \sum_{h=1}^{m} \int_{\overline{\mathcal{L}}^h} R_k(\xi)\, \overline{\omega}_{j,k}(x, \xi)\, f[\overline{z}_{j,k}(\xi), \varepsilon]\, \frac{d\xi}{\xi} \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

où les symboles R, $\overline{\omega}$, $\overline{f}$ ont des significations analogues aux R, ω, f du n° **8** (ils coïncident d'ailleurs avec ces dernières expressions quand on fait dans celles-ci $\varepsilon = 0$). Comme chemins d'intégration, on adoptera, pour la $k^{\text{ième}}$ quadrature, une certaine courbe $\overline{\mathcal{L}}^h$, suivie dans un sens qui pourra varier avec k. Pour que, x appartenant à un tel chemin, les approximations convergent régulièrement, il suffit que soient vérifiées deux conditions identiques à celles du n° **9**; la première d'entre elles le sera certainement si l'on prend pour $\overline{\mathcal{L}}$ l'une des n branches de la courbe $\overline{\mathcal{L}}$ (n° **12**). Quant au sens de parcours à adopter pour la $k^{\text{ième}}$ quadrature sur $\overline{\mathcal{L}}^h$, un calcul aisé montre qu'il sera défini par les conditions (20) et (22), où l'on aurait remplacé β_{jk} par $\overline{\beta}_{jk}$; il sera donc identique au sens de parcours obtenu pour l'arc normal de $\mathcal{L}^h$.

Aux intégrales que nous venons de définir pour l'équation (E_1), nous donnerons le nom *d'intégrales normales*; et, en procédant comme aux n°s **16** et **17**, on pourrait montrer que chacune d'elles est définie dans un secteur Δ. Toutefois, une double observation s'impose ici du fait de la *disparition de* ε :

---

[1] Il était bien aisé d'établir que les $\overline{\omega}_j(x, \xi)$ (n° **7**) répondent à la question. Pourtant, on a préféré procéder directement, car la méthode actuelle s'applique immédiatement à un cas analogue que nous rencontrerons plus loin (n° **33**) et pour dès lors, nous pourrons nous dispenser de traiter.

1° D'une part, le rayon r_1 de Γ_1 peut être pris actuellement *aussi grand qu'on voudra;* la couronne (s) sera donc remplacée par la région *illimitée* extérieure à Γ [1]. Actuellement les secteurs $\bar{\Delta}$ sont donc *illimités*.

2° D'autre part, la condition (18) n'a plus de raison d'être; les droites D_j disparaissent donc, et, en fait, *il n'y a plus que* $2mn(m-1)$ *secteurs* $\bar{\Delta}$, occupés par un égal nombre d'intégrales. Nous reviendrons sur cette réduction au n° **20**.

19. Convergence des intégrales de (E) vers celles de $(\bar{E})$. Secteurs ordinaires. — Pour l'instant, nous allons montrer qu'il existe $2mn(m-2)$ secteurs Δ à l'intérieur de chacun desquels l'intégrale correspondante tend vers une intégrale analogue de l'équation $(\bar{E})$.

Considérons, en effet, les $2mn(m-2)$ secteurs Δ que l'on obtient en faisant varier la droite D (n° **17**) à l'intérieur des angles λ_{jk} (à l'exclusion des λ_j). Ces secteurs, que nous appellerons *ordinaires*, tendent [2] vers la portion $(\bar{\Delta})$ des secteurs $\bar{\Delta}$ qui est intérieure à (s); et l'on peut toujours supposer que, pour $|\varepsilon|$ assez petit, tout point x de $(\bar{\Delta})$ appartient à un Δ. Ceci posé, la convergence de la suite des $z_p(x, \varepsilon)$ étant uniforme autour de $\varepsilon = 0$, il nous suffira d'établir que $z_0(x, \varepsilon), \ldots, z_p(x, \varepsilon), \ldots$ tendent respectivement vers $\bar{z}_0(x), \ldots, \bar{z}_p(x), \ldots$. Or observons qu'on a

$$\bar{z}_0(x) = 1 = z_0(x, \varepsilon),$$

et admettons qu'on ait déjà établi que $z_1(x, \varepsilon), \ldots, z_p(x, \varepsilon)$ tendent vers $z_1(x), \ldots, \bar{z}_p(x)$; il nous suffira de démontrer que $z_{p+1}(x, \varepsilon)$ tend vers $\bar{z}_{p+1}(x)$. Mais, d'après le n° **14**, on pourra toujours prendre $|\varepsilon|$ assez petit, et, en conséquence, le rayon r_1 de Γ_1

---

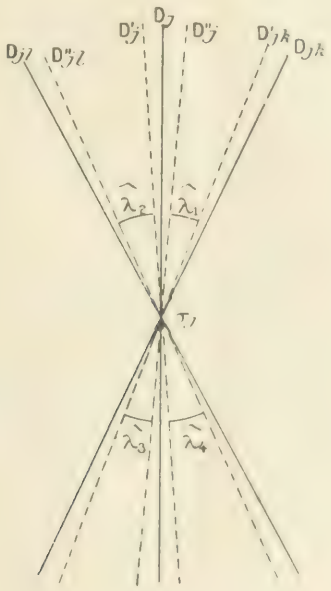
[1] On peut évidemment confondre Γ et $\bar{\Gamma}$.

[2] Ceci suppose implicitement que ε tend vers zéro comme il a été expliqué plus haut [note de la page 138]. On verra au numéro suivant que ceci n'implique aucune restriction essentielle, comme il a été déjà dit.

assez grand, pour que l'intégrale $\int r^{-2}\,ds$, étendue aux portions de $\mathcal{L}^h$ et $\bar{\mathcal{L}}^h$ extérieures à Γ_1, soit arbitrairement petite. Dès lors, la différence entre les parties des quadratures fournissant $z_{p+1}(x, \varepsilon)$ et $\bar{z}_{p+1}(x)$ et provenant des arcs des chemins d'intégration extérieurs à Γ_1 sera arbitrairement petite; mais, à l'intérieur de Γ_1, $z_p(x, \varepsilon)$ et ses dérivées tendent vers $z_p(x)$ et ses dérivées respectives; de plus, l'arc normal de $\mathcal{L}^h$ tend vers $\bar{\mathcal{L}}^h$ (n° **12**); $z_{p+1}(x, \varepsilon)$ tend donc vers $\bar{z}_{p+1}(x)$. C. Q. F. D.

20. Secteurs mixtes. — Le passage à la limite est un peu moins simple dans le cas que nous avons exclu, et que nous allons examiner maintenant, où le secteur Δ provient de la variation de D

Fig. 6.



à l'intérieur d'un des angles λ_i. Soient donc D_{jk} et D_{jl} les deux droites D_{jk} adjacentes à D_j, de part et d'autre de cette droite, aux droites D_{jk}, D_j et D_{jl} sont associées, comme il a été dit plus

haut (n° **17**), des droites de directions arbitrairement voisines, $D_{j'}$: D_{j}, D_{j} : et $D_{j'}$ qui déterminent deux couples d'angles opposés, que nous représenterons par λ_1, λ_3 et λ_2, λ_4. A ces quatre angles correspondent quatre cycles (n° **17**) de secteurs Δ dans lesquels on sait calculer quatre cycles d'intégrales de l'équation (E) : procédant ainsi pour les m points σ_j, on obtient bien les $4mn$ intégrales que nous avions exclues au numéro précédent. Or, appliquons le même procédé à l'équation-limite $(\overline{\mathrm{E}})$; les droites D_j disparaissant, nous obtiendrons autour de s_j $(=\sigma_j)$ un couple *unique* d'angles λ opposés ; et les secteurs correspondant à tous ces couples d'angles sont au nombre de $2mn$. Il nous faut donc expliquer *comment les $4mn$ intégrales en question de* (E) *peuvent se fondre deux à deux pour constituer un nombre moitié moindre d'intégrales de l'équation-limite* $(\overline{\mathrm{E}})$.

Considérons d'abord les angles λ_1 et λ_2 ; les rayons D, d'arguments θ, intérieurs respectivement à λ_1 ou à λ_2, vérifient l'un ou l'autre des systèmes d'inégalités

$$(\lambda_1) \qquad \pi + \alpha_1 - \theta_1 - n\theta_2 < \theta < \pi + \alpha_2 - \theta_2 - n\theta_1,$$

$$(\lambda_2) \qquad \alpha_1 - \theta_1 - n\theta_2 < \theta < \alpha_2 - \theta_2 - n\theta_1 + \pi.$$

pour λ_1 on a donc $j = j' + 1$, et pour λ_2, $j = j' + 1$; et D variant successivement dans λ_1 et dans λ_2, les variations des points m_1 et m_2 seront données par le Tableau

(1)

$m_1 \ldots$	$-\theta_1 + \frac{\alpha_1}{n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_1\pi}{n}$			$\theta_1 + \frac{\alpha_2}{n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_2\pi}{n}$		
$m_2 \ldots$	$\theta_2 + \frac{\alpha_1}{n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_1\pi}{n}$			$\theta_2 + \frac{\alpha_2}{n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_2\pi}{n}$		

(2)

$m_1 \ldots$	$\theta_1 + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_1\pi}{n}$			$\theta_1 + \frac{\alpha_2}{n} + \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_2\pi}{n}$		
$m_2 \ldots$	$-\theta_2 + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_1\pi}{n}$			$\theta_2 + \frac{\alpha_2}{n} + \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_2\pi}{n}$		

où h_1 et h_2 désignent les numéros d'ordre des deux secteurs, soient Δ_1 et Δ_2, dans les cycles issus de λ_1 et λ_2. Or, si h_1 et h_2 sont quelconques, Δ_1 et Δ_2 n'auront aucune région commune; à la limite, ils ne pourront constituer aucun des secteurs Δ. Mais, d'après le Tableau précédent, les arguments des directions frontières sont [1], pour Δ_1,

$$\theta_1 = -\varphi + \frac{\eta}{n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_1\pi}{n} \quad \text{et} \quad \theta_1' = -\frac{\beta_{jl} - \eta}{n} + \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_1\pi}{n},$$

et, pour Δ_2,

$$\theta_2' = -\frac{\beta_{jl} - \eta}{n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_2\pi}{n} \quad \text{et} \quad \theta_2'' = -\varphi - \frac{\eta}{n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_2\pi}{n}.$$

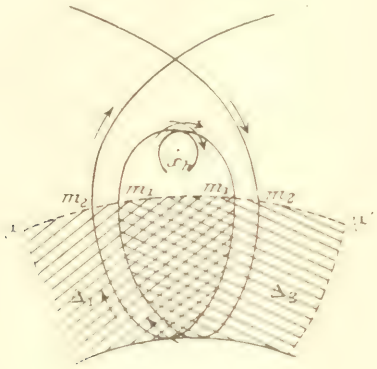
Pour que Δ_1 et Δ_2 empiètent, comme nous le voulons, on devra avoir d'abord $\theta_1 < \theta_2$, d'où $h_1 \geq h_2$ et $\theta_2 < \theta_1$, d'où $h_2 < h_1 + 1$ (puisque $\beta_{jl} - \beta_{jk} < \pi$). On a donc nécessairement $h_1 = h_2$, ce qui entraîne les inégalités $\theta_2' < \theta_1'$ et $\theta_2'' < \theta_1''$. En résumé, les secteurs Δ *se rapportent à un même point singulier* x_h, et leurs directions frontières sont rangées dans l'ordre $\theta_2' < \theta_1' < \theta_2'' < \theta_1''$. On voit de plus qu'*après la traversée de* D_j *par le rayon* D, *les points* m_1 *et* m_2 *se seront permutés :* le nouvel argument de m_2 (m_1) sera égal à l'ancien argument de m_1 (m_2), diminué de $-\frac{2\pi}{n}$.

D'autre part, observons que les branches ζ^h, correspondant aux rayons D voisins de D_j, seront convexes (n° **12**), $\cos(\delta - n\varphi)$ étant alors positif. Les courbes présenteront donc la disposition ci-après (*fig.* 7, p. 148); on remarquera que les deux secteurs Δ_1 et Δ_2 ont pour somme un secteur $\Delta_1 + \Delta_2$, de directions frontières θ_2', θ_1'', que nous désignerons sous le nom de secteur *mixte*, et qui *tend vers le secteur limite* Δ; d'ailleurs, Δ_1 et Δ_2 *ont constamment un domaine en commun*, soit $\Delta_1\Delta_2$ dont les directions frontières font entre elles, pour ε infiniment petit, l'angle *fini* $\frac{\pi - 2\varepsilon}{n}$. En tout point de $\Delta_1\Delta_2$

[1] Ces formules ne sont d'ailleurs que des variantes de [27], mais nous avons préféré donner le Tableau des arguments de m_1 et de m_2, afin de mieux mettre en lumière la disposition mutuelle de Δ_1 et Δ_2.

on peut démontrer, comme au n° **19**, que les intégrales y_1 et y_2, définies dans Δ_1 et Δ_2, tendent uniformément vers une même intégrale y de (E); *y_1 et y_2 tendent donc uniformément l'une vers l'autre à l'intérieur de $\Delta_1\Delta_2$*. En définitive, l'intégrale $\bar{y}$, qui occupe

Fig. 7.



le secteur-limite $\bar{\Delta}$, apparaît comme *la trace de deux intégrales y_1 et y_2 de l'équation* (E), *définies dans des secteurs Δ_1 et Δ_2 dont la somme constitue le secteur mixte $\Delta_1 + \Delta_2$ qui tend vers $\bar{\Delta}$; les secteurs Δ_1 et Δ_2 empiètent d'ailleurs mutuellement suivant un domaine $\Delta_1\Delta_2$, où y_1 et y_2 tendent uniformément l'une vers l'autre* (1).

Étudions maintenant les angles λ_3 et λ_4; $\delta - n\varphi$ étant toujours ramené à l'intervalle $(-\pi, +\pi)$, afin qu'on puisse appliquer les résultats du n° **11**, ces angles seront définis par les inégalités

$$(\lambda_3) \qquad \eta \leqq \delta - n\varphi \leqq \pi + \eta, \quad \delta - n\varphi \leqq \pi - \eta,$$

$$(\lambda_4) \qquad -\pi + \eta \leqq \delta - n\varphi \leqq \delta_{II} - n\varphi \leqq -\pi - \eta \leqq -\eta.$$

---

(1) A titre de vérification, examinons les variations des sens de parcours des courbes ζ^h pour les quadratures des approximations (10). Quand δ traverse la valeur $n\varphi$, tous les f_{jg} restent constants; $\frac{d\delta}{ds}$ change de signe d'après (21), de sorte que, relativement au point x_h, le sens de parcours a brusquement changé, ce qui s'accorde bien avec le fait que $\frac{d\delta}{ds}$ reste le même à l'intérieur de (8). *Cf.* la figure 7.

On en déduit pour m_1 et m_2 le Tableau de variations suivant :

$$(\lambda_3).$$

$$m_1 \ldots\ldots \quad -\varphi + \frac{\eta}{n} + \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_3\pi}{n} + \frac{\pi}{n} \qquad -\frac{\beta_{jl}-\eta}{n} + \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_3\pi}{n} + \frac{\pi}{n}$$

$$m_2 \ldots\ldots \quad -\varphi + \frac{\eta}{n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_3\pi}{n} + \frac{\pi}{n} \qquad -\frac{\beta_{jl}+\eta}{n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_3\pi}{n} + \frac{\pi}{n}$$

$$(\lambda_4).$$

$$m_1 \ldots\ldots \quad -\frac{\beta_{jl}-\eta}{n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_4\pi}{n} - \frac{\pi}{n} \qquad -\varphi - \frac{\eta}{n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_4\pi}{n} - \frac{\pi}{n}$$

$$m_2 \ldots\ldots \quad \frac{\beta_{jl}-\eta}{n} + \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_4\pi}{n} - \frac{\pi}{n} \qquad -\varphi - \frac{\eta}{n} + \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_4\pi}{n} - \frac{\pi}{n}$$

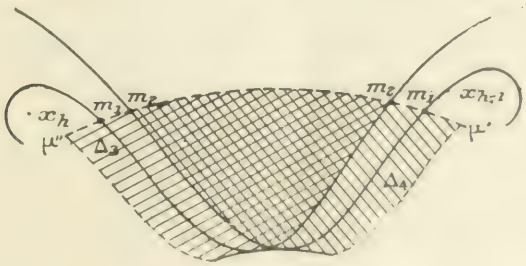
On obtient cette fois-ci, pour les directions frontières de Δ_3 et Δ_4,

$$\theta'_3 = -\varphi + \frac{\eta}{n} + \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_3\pi}{n}, \qquad \theta''_3 = -\frac{\beta_{jl}+\eta}{n} + \frac{3\pi}{2n} + \frac{2h_3\pi}{n},$$

$$\theta'_4 = -\frac{\beta_{jl}-\eta}{n} - \frac{3\pi}{2n} + \frac{2h_4\pi}{n}, \qquad \theta''_4 = -\varphi - \frac{\eta}{n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_4\pi}{n}.$$

Les conditions d'empiétement s'écrivent alors $\theta'_3 < \theta''_4$, d'où l'on tire $2h_4 > 2h_3 + 1$, et $\theta_4 < \theta'_3$, d'où $h_4 < h_3 + 2$ (puisque $\beta_{jl} - \beta_{jk} < \pi$). On a donc $h_4 = h_3 + 1$, et l'on en déduit aisément

Fig. 8.



les inégalités $\theta_4 < \theta_3 < \theta'_4 < \theta'_3$. On voit qu'actuellement les branches ζ^h seront concaves pour $|\delta - n\varphi|$ voisin de π : celles qui proviennent de rayons D intérieurs à λ_3 s'enrouleront autour du

point x_h, avec $h = h_3 + 1$, car, pour $\zeta = n\zeta = \pi - \eta$, l'argument du point m_1 relatif à x_h est

$$-\zeta + \frac{\alpha}{n} - \frac{\pi}{2n} - \frac{2h\pi}{n} = \zeta - \frac{\alpha}{n} - \frac{3\pi}{2n} - \frac{(2h-1)\pi}{n};$$

celles qui proviennent de rayons D intérieurs à λ_4 s'enrouleront autour du point x_{h-1}, car, pour $\zeta = n\zeta = -\pi + \eta$, l'argument du point m_1 relatif à x_{h-1} est

$$-\zeta - \frac{\alpha}{n} - \frac{\pi}{2n} - \frac{(2h-1)\pi}{n} = \zeta - \frac{\alpha}{n} - \frac{3\pi}{2n} - \frac{2h\pi}{n},$$

et, en vertu du Tableau précédent, ceci s'accorde bien avec le fait que $h = h_3 + 1 = h_4$. A part ces modifications, les conclusions que nous avons développées précédemment demeureront toujours valables [1].

21. Retour aux intégrales canoniques. Le polygone de sustentation II. — Et maintenant nous sommes en état de répondre à une question importante que nous avons posée antérieurement (n° **15**) : *définir tous les cas où l'intégrale $y_j(x)$ résultant des approximations du n° **8** peut être une intégrale canonique relative à un des points x_k (ou à x_∞)*; et dans l'affirmative, ajouterons-nous, *définir le secteur à l'intérieur duquel on sait la calculer.*

Pour que $y_j(x)$ soit une intégrale canonique, il faut et il suffit, comme nous le savons, que le point σ_j et le rayon D puissent être choisis de telle sorte que tous les f_{jk} aient la même valeur, quel que soit $k \neq j$: il faut donc et il suffit que, quel que soit $k \neq j$, $\sin(\zeta_{jk} - \zeta)$ ait un signe invariable : ce qui n'arrivera que si *tous les vecteurs $\overrightarrow{\sigma_j \sigma_k}$ sont du même côté de la droite* D, quel que soit

[1]) On peut se demander s'il ne serait pas possible de passer, par continuité, de l'intégrale y_1, définie dans Δ_1, à l'intégrale y_2, définie dans Δ_2. Or, dans les deux cas envisagés, lorsque D pénétrera dans l'échancrure pratiquée autour de D_j, les branches ζ^h tendront *de plus en plus lentement* vers x_h (ou x_∞), et la convergence des approximations sera de plus en plus lente; lorsque D sera venue en D_j, ces courbes seront des ovales séparés, ou des courbes étoilées d'un seul tenant (*cf.* note [2]), p. 128), le long desquels les procédés de démonstration que nous avons mis en œuvre tombent en défaut.

$k\ (\neq j)$. En définitive, pour que y_j soit une intégrale canonique, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient réalisées :

1° σ_j *doit appartenir au polygone de sustentation* H *des points* σ ;
2° *La droite* D *menée par* σ_j *doit être extérieure à* H.

Ce point acquis, établissons le résultat suivant : *les deux cycles d'intégrales canoniques* y_1 *et* y_2 *définies dans les cycles de secteurs provenant de chacun des angles opposés* λ_1 *et* λ_2, *extérieurs à* H *en* σ_j, *ne constituent qu'un seul cycle d'intégrales* (1).

En effet, les angles λ_1 et λ_2 correspondent à des valeurs de δ *dont la différence est* π. Quand on augmente δ de π, $\sin(\delta - n\varphi)$ et $\sin(\beta_{jk} - \delta)$ changent *simultanément* de signes ; d'après (20) et (21), $\frac{d\rho}{ds}$ *aura donc le même signe dans les deux cas*. Considérons alors les deux courbes, soient $(\mathcal{L})_1$ et $(\mathcal{L})_2$, qui correspondent à la même valeur de C et à des valeurs de δ dont la différence est π (2), et soit Δ_1 le secteur balayé par l'une quelconque $(\mathcal{L}^{h_1})_1$ des branches de $(\mathcal{L})_1$ quand D varie dans λ_1. Suivant que le signe commun de $\frac{d\rho}{ds}$ sera positif ou négatif dans les deux cas, c'est-à-dire suivant qu'on devra se rapprocher ou s'éloigner de x_∞ dans les deux suites d'intégrations, nous adjoindrons à $(\mathcal{L}^{h_1})_1$ une branche $(\mathcal{L}^{h_2})_2$ de $(\mathcal{L})_2$ choisie de telle sorte que les deux branches précédentes présentent soit deux points m_2, soit deux points m_1 très voisins.

Ceci posé, faisons varier δ et C comme il a été dit aux nos **16** et **17** ; les secteurs Δ_1 et Δ_2, balayés par $(\mathcal{L}^{h_1})_1$ et $(\mathcal{L}^{h_2})_2$, empiéteront néces-

---

(1) *A priori*, on devait s'attendre à une telle réduction dans le nombre des cycles, car il n'existe que n intégrales canoniques appartenant à des exposants ayant $\frac{\sigma_j}{n\lambda^n}$ comme partie principale (chacune étant relative à l'un des σ_j). Mais il était indispensable d'approfondir le mécanisme de cette réduction, en vue, surtout, des applications ultérieures. Aussi les considérations développées dans le texte n'ont pas seulement la valeur d'une simple vérification.

(2) Ces courbes ont été représentées plus haut (pp. [illegible]).

sairement; je dis que *dans l'aire commune $\Delta_1 \Delta_2$ les deux intégrales y_1 et y_2 coïncideront.*

Pour le voir, on observera d'abord que les deux branches des faisceaux $[\varphi^{h_1}]_1$ et $[\varphi^{h_2}]_2$, issues d'un même point x, peuvent être reliées par un arc de courbe $\mu_1 \mu_2$ satisfaisant aux conditions a' et b' du n° **16**, et qu'on mènera dans le voisinage de x_α ou de x_∞, suivant que le signe de $\frac{dz}{ds}$ sera négatif ou positif; ceci fait, il n'y aura plus qu'à reproduire la démonstration du lemme (n° **16**).

Au numéro suivant, nous fixerons les limites du secteur total où se trouve définie une même intégrale canonique; pour l'instant, insistons sur ce fait que *l'identification entre y_1 et y_2 n'a été possible que parce que les deux conditions énoncées plus haut étaient réalisées.*

En effet, supposons qu'il n'en soit pas ainsi, et plaçons-nous d'abord dans le cas où $\frac{dz}{ds}$ est négatif; $[\varphi^{h_1}]_1$ et $[\varphi^{h_2}]_2$ s'enroulent autour du même point x_h (1); la double hypothèse du début n'étant plus réalisée, il y aura des quadratures que l'on devra effectuer en s'éloignant vers x_∞ sur ces branches : mais alors, dans le triangle $x\mu_1\mu_2$, où $\mu_1\mu_2$ est pris très loin pour vérifier b', les fonctions à intégrer ne sont plus uniformes, et la démonstration du n° **16** n'est plus valable. Admettons maintenant que $\frac{dz}{ds}$ soit positif; $[\varphi^{h_1}]_1$ et $[\varphi^{h_2}]_2$ se déroulent à partir de points x_α et x_∞ différents (1); il y aura des quadratures que l'on devra effectuer en tendant vers l'un et l'autre de ces points suivant qu'il s'agit de y_1 ou y_2 : μ_1 et μ_2 devant être pris très près de x_α et de x_∞ respectivement, la réalisation de b' sera encore impossible (2).

---

(1) Pour le voir, il suffit de se reporter à la figure 2. Ce point sera d'ailleurs précisé au cours de la discussion du numéro suivant.

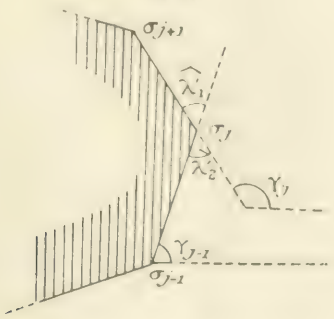
(2) Du moins, si l'on ne peut identifier y_1 et y_2 pour z donné, peut-être pourrait-on penser qu'en un point z appartenant à Δ_1 et Δ_2, $\frac{y_1}{y_2} - 1$ tend vers 0 avec z. En fait, il n'en est rien. Car, dans les deux cas que nous venons d'envisager, prenons μ_1 et μ_2 arbitrairement loin, et faisons tendre z vers 0; dans les deux cas, l'arc $\mu_1\mu_2$ traversera un arc de $[\varphi^{h_1}]_1$ ou $[\varphi^{h_2}]_2$ sur lequel $|\omega_1|$ sera très grand.

Nous observerons enfin que la réduction qu'on vient d'établir dans le nombre des cycles, relativement à l'équation (E), *se retrouve encore pour l'équation-limite* (Ē), lorsque $s_j(=\bar{\sigma}_j)$ est un sommet du polygone de sustentation $\bar{\Pi}$ des s_j, et que $\bar{D}$ a été menée extérieurement à Π.

22. Les secteurs canoniques Γ_{jh}. — Revenons maintenant au secteur total $\Delta_1+\Delta_2$, où nous avons montré qu'on peut définir une même intégrale canonique; nous désignerons un tel secteur sous le nom de *secteur canonique*. Les n secteurs canoniques correspondant au sommet σ_j formeront, par définition, un cycle de secteurs canoniques; nous représenterons par Γ_{jh} le secteur qui occupe le rang h dans un tel cycle, ou, plus simplement, par Γ_j, lorsqu'une telle précision ne sera pas nécessaire. Proposons-nous maintenant de déterminer les directions frontières d'un secteur canonique.

Pour simplifier l'écriture, nous adopterons les notations sui-

Fig. 9.



vantes : les points σ_j situés sur Π seront numérotés dans l'ordre où on les rencontre en décrivant le contour de Π dans le sens direct. Nous désignerons par γ_j l'argument [1] de la différence $\sigma_{j+1}-\sigma_j$

[1] Si M est le nombre de sommets de Π, on peut toujours supposer ces arguments rangés dans l'ordre $0=\gamma_1<\ldots<\gamma_j<\ldots<\gamma_M<\pi$, quitte à remplacer s'il y a lieu γ_2 par $\gamma_2-\pi$ ou γ_M par $\gamma_M-\pi$.

(avec nos notations antérieures, on aurait donc $\gamma_j = \beta_{j,j+1}$); si Π n'a que deux sommets, il en résultera $\gamma_2 = \gamma_1 + \pi$, mais cette circonstance, qui se présentera sûrement pour $m = 2$, ne modifie en rien les développements qui vont suivre. Soit alors λ'_1 l'angle formé par $\overrightarrow{\sigma_j \sigma_{j+1}}$ avec $\overrightarrow{\sigma_{j-1} \sigma_j}$, et λ'_2 l'angle opposé; nous supposerons d'abord qu'aucun de ces angles ne contient la droite D_j (d'argument $n\varphi$), et, de même qu'aux n^{os} **19** et **20**, nous envisagerons successivement deux cas.

Premier cas. — L'angle λ_1 est défini par les relations

$$(\lambda_1) \qquad -\pi + \eta \leq \gamma_{j-1} - n\varphi + \eta \leq \delta - n\varphi \leq \gamma_j - n\varphi - \eta \leq -\eta.$$

Dans λ_1, on aura $f_{jk} = +1 = f$ $(j \neq k = 1, \ldots, m)$; d'où, pour λ_1 et λ_2, $\frac{d\delta}{ds} < 0$, et l'on accouplera les branches $(\mathcal{L}^{h_1})_1$ et $(\mathcal{L}^{h_1})_2$ de manière que ce soient leurs points m_1 qui voisinent. Or, pour $(\mathcal{L}^{h_1})_1$, l'argument de m_1 est de la forme

$$-\frac{\delta}{n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_1\pi}{n}$$

(n^o **12**) et, pour $(\mathcal{L}^{h_1})_2$, il est égal à

$$\frac{\delta + \pi}{n} + \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_2\pi}{n};$$

on devra donc prendre $h_2 = h_1$; soit h leur valeur commune. Ce seront alors les m_2 qui donneront les frontières de ∇_{jh}; or, pour λ_1, l'argument de m_2 varie de

$$-\frac{\gamma_j - \eta}{n} + \frac{\pi}{2n} + \frac{2h\pi}{n} \quad \text{à} \quad -\frac{\gamma_{j-1} + \eta}{n} + \frac{\pi}{2n} + \frac{2h\pi}{n},$$

et, pour λ_2, de

$$-\frac{\gamma_j - \eta + \pi}{n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{2h\pi}{n} \quad \text{à} \quad -\frac{\gamma_{j-1} + \eta + \pi}{n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{2h\pi}{n}.$$

Les directions frontières de ∇_{jh} seront donc

$$(29)\qquad \begin{cases} \tau'_{jh} = -\dfrac{\gamma_j - \gamma_1}{n} + \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{2h\pi}{n}, \\ \tau''_{jh} = -\dfrac{\gamma_{j+1} + \gamma_1}{n} + \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{2h\pi}{n}. \end{cases}$$

L'amplitude du secteur canonique ∇_{jh} sera alors

$$\frac{\gamma_j - \gamma_{j+1} + 2\pi}{n} = \frac{2\alpha_j}{n};$$

elle est arbitrairement voisine de

$$\frac{V_j + 2\pi}{n},$$

V_j désignant *l'angle extérieur* au polygone Π en σ_j. Remarquons en outre que les deux branches $(\xi^{h_1})_1$ et $(\xi^{h_2})_2$ s'enroulent autour du même point singulier x_h, et que l'intégrale que nous savons calculer dans ∇_{jh} *est l'intégrale canonique relative au point* x_h et à l'exposant caractéristique $-\dfrac{\varpi_{jh}}{n\varepsilon^n}$.

Deuxième cas. — L'angle λ_1 est défini par les inégalités

$$(\lambda_1)\qquad \alpha_1 + \gamma_{j+1} - n\varphi + \alpha_1 + \delta - n\varphi + \gamma_j - n\varphi + \alpha_1 + \pi + \alpha_1.$$

Dans λ_1, on a $f_{jh} = +1$, $f = -1$; d'où, pour λ_1 et λ_2, $\dfrac{d\varphi}{ds} > 0$; cette fois, on associera donc $(\xi^{h_1})_1$ et $(\xi^{h_2})_2$ en accolant deux points m_2; or, pour λ_1, l'argument de m_2 est

$$-\frac{\delta}{n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_1\pi}{n},$$

et, pour λ_2, il vaut

$$-\frac{\delta - \pi}{n} + \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_2\pi}{n};$$

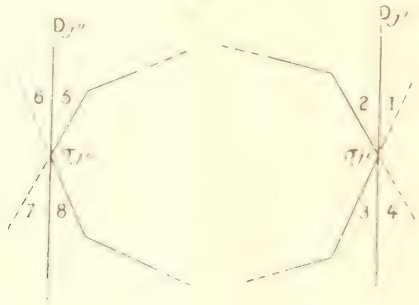
on doit donc prendre $h_2 = h_1 - 1$ (soit $h - 1$), et ce seront les m_2 qui donneront les frontières de ∇; dès lors, en opérant comme tout à l'heure, on trouvera que les directions frontières sont encore données par (29). Mais, dans ce cas, les branches ξ^h et ξ^{h-1} s'en-

roulent respectivement autour des points x_h et x_{h-1}; de plus, l'intégrale, qu'on vient de définir dans ∇_{jh}, coïncide dans ce secteur avec la branche *d'intégrale canonique, relative au point* x_∞, *appartenant à l'exposant* $\varepsilon^{-n}\alpha_{j'}$ *et calculée en* x *le long d'un chemin qui aboutit directement de* x_∞ *au secteur* ∇_{jh}, *en passant entre les points* x_{h-1} *et* x_h.

Supposons maintenant que le couple d'angles λ'_1, λ'_2, extérieurs à Π en σ_j, contienne une droite D_j; ceci arrivera d'ailleurs deux fois, et deux fois seulement : à savoir, lorsque σ_j coïncidera avec l'un des deux sommets $\sigma_{j'}$, $\sigma_{j''}$, tels que les droites $D_{j'}$, $D_{j''}$ d'argument $n\varphi$ menées par $\sigma_{j'}$ et $\sigma_{j''}$ comprennent Π entre elles deux. Il suffit alors de combiner les résultats qu'on vient d'obtenir avec ceux du n° **20** pour constater que les deux cycles de secteurs correspondants seront formés des secteurs canoniques mixtes $\nabla_{j'}$, $\nabla_{j''}$ dont les directions frontières auront encore la forme (29) : $\nabla_{j'}$, par exemple, sera la somme de deux secteurs d'amplitudes $(V'_j + 2\pi) : n$ et $(V'_j + 2\pi) : n$, (V'_j et V'_j désignant les amplitudes des angles déterminés par D_j avec $\overline{\sigma_{j'-1}\sigma_{j'}}$ et $\overline{\sigma_{j'}\sigma_{j'+1}}$), qui auront en commun un secteur d'amplitude $2\pi : n$.

Pour figurer la disposition des branches $\mathcal{L}^h$ à l'intérieur des secteurs précédents, il sera commode de dresser le Tableau suivant

Fig. [illegible]

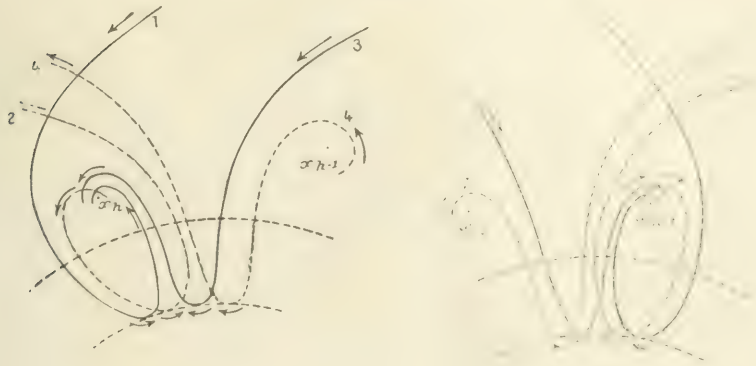


(où l'on a désigné chacun des angles formés par D_j ou $D_{j'}$ avec les côtés de Π par les mêmes lettres que dans la figure 10) :

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
f	+	—	—	[illegible]	[illegible]	[illegible]	—	—
f_{1k}	[illegible]	+	—	[illegible]	—	—	[illegible]	[illegible]
$\frac{d\varphi}{ds}$	—	+	—	[illegible]	[illegible]	—	[illegible]	[illegible]
$\frac{d^2\varphi}{ds}$	—	—	+	+	+	[illegible]	[illegible]	—

On obtient alors, pour les branches g^h associées à chaque angle γ,

Fig. 11.



la disposition ci-dessus (les courbes sont figurées avec le numéro d'ordre de l'angle auquel elles sont attachées).

25. Recouvrement de la région normale (s) par les secteurs canoniques ∇_{jh}. — Nous pouvons nous rendre compte maintenant d'une manière précise de l'agencement des secteurs canoniques ∇_{jh} correspondant aux différents points x_h et aux différents sommets σ_j de Π, ainsi que la nature des intégrales canoniques qui leur sont affectées. Faisons croître constamment l'angle δ tout en respectant les conditions (18) et (20) : le rayon D correspondant tournera dans le sens direct autour de chacun des sommets successifs $\sigma_1, \ldots, \sigma_M$ (M étant le nombre des sommets de Π), tout en restant extérieur aux échancrures que nous avons pratiquées (n° **17**). Les points m_1 et m_2 se déplaceront par continuité sur Γ_1 dans le sens rétrograde : il n'y aura exception que lorsque D tendra

vers $D_{j'}$ ou $D_{j''}$: mais alors, après la traversée de l'échancrure correspondante, nous choisirons le couple $(m_1 m_2)$ voisin du couple $(m_2 m_1)$ formé par les points primitifs m_1, m_2, préalablement permutés. Supposons qu'on ait $1 < j' < j'' \leqq M$: pour $1 \leqq j \leqq j'$, les secteurs ∇_{jh} seront balayés par des couples de chemins $\mathcal{C}_j^h$ *convergeant vers* x_h, et les intégrales seront *canoniques pour* x_h. Pour $j' \leqq j \leqq j''$, les ∇_{jh} seront balayés par des couples de chemins d'intégration *convergeant vers* x_∞, *l'un partant de* x_h, *et l'autre de* x_{h-1} ; les intégrales obtenues coïncideront avec les déterminations des intégrales *canoniques pour* x_∞ *et prolongées le long de chemins passant entre* x_h *et* x_{h-1}. Enfin, pour $j'' \leqq j \leqq M$, les chemins d'intégration *convergeront vers* x_{h-1}, et les intégrales seront *canoniques pour* x_{h-1} (¹). En définitive, quand on sera revenu au sommet initial σ_1, le secteur ∇_{1h} se sera transformé en le secteur (du même cycle) $\nabla_{M+1,h} \equiv \nabla_{1,h-1}$; on voit que, *grâce à l'intermédiaire des deux secteurs mixtes, on aura sauté d'un point singulier* x_h *à son antécédent* x_{h-1}. Comme, d'ailleurs, on peut procéder sur $\nabla_{1,h-1}$ de la même façon que sur ∇_{1h}, on voit encore que, *lorsque* σ_j *aura décrit n fois de suite le polygone* Π, *le secteur* ∇_{jh} *aura coïncidé successivement avec les* nM *secteurs canoniques* (ordinaires ou mixtes) *que l'on a défini antérieurement.*

Les résultats précédents entraînent une importante conséquence ; considérons, en effet, les secteurs ∇_{jh} et $\nabla_{j,h-1}$; ces deux secteurs d'amplitude voisine de $(V_j + 2\pi) : n$ se déduisent l'un de l'autre par une rotation de $2\pi : n$: *ils présentent donc un secteur d'empiétement*, commun à chacun d'eux, et dont l'amplitude est voisine de $V_j : n$; nous désignerons ce secteur par la notation $\nabla_j^{h,h-1}$; ses directions frontières sont d'ailleurs, en vertu de (29),

$$(30)\quad \begin{cases} -\dfrac{\sigma_j - \sigma_1}{n} - \dfrac{3\pi}{2n} = \dfrac{2h\pi}{n}, \\[2ex] -\dfrac{\sigma_j + \sigma_1 - \sigma_1}{n} - \dfrac{3\pi}{2n} = \dfrac{2h\pi}{n}. \end{cases}$$

(¹) Dans tous les cas, l'exposant auquel appartiendra l'intégrale sera celui qui a même partie principale que $-\dfrac{\sigma_j}{n\varepsilon^n}$ (pour x_h) ou que $\dfrac{\sigma_j}{\varepsilon^n}$ (pour x_∞).

C'est dire que, étant donnés un rayon quelconque $\vec{\rho}$ de la couronne $(\mathcal{S})$, et une valeur quelconque de l'indice j $(j = 1, \ldots, M)$:

1° *On pourra toujours trouver une valeur de h (indépendante de j) pour laquelle ∇_{jh} recouvrira le rayon $\vec{\rho}$;*

2° *Il existera une valeur de j (et une seule) pour laquelle les DEUX secteurs ∇_{jh} et $\nabla_{j,h-1}$ recouvriront le rayon $\vec{\rho}$*; ce couple de valeurs j, h sera celui pour lequel l'intervalle (30) correspondant contiendra l'argument θ du rayon $\vec{\rho}$.

Chaque rayon $\vec{\rho}$ de la couronne $(\mathcal{S})$ se trouve donc recouvert par $M + 1$ secteurs canoniques $\nabla_{1h}, \ldots, \nabla_{jh}, \ldots, \nabla_{Mh}$ et $\nabla_{j,h-1}$ (1), de sorte qu'*en tout point de la région normale $(\mathcal{S})$, on sait calculer $M + 1$ intégrales canoniques de l'équation* (E).

En particulier, *supposons que tous les points σ_j $(j = 1, \ldots, m)$ forment les sommets d'un polygone convexe* (ce qui aura toujours lieu pour $m = 2$); ceci arrivera sûrement, pour $|\varepsilon|$ assez petit, si les s_j forment eux-mêmes un polygone convexe. Un tel polygone coïncidant alors avec le polygone de sustentation Π des σ_j, le nombre M sera égal à l'ordre m de (E); *en tout point de la région normale, on saura donc calculer $m + 1$ intégrales de l'équation* (E) (2). D'ailleurs, à l'intérieur de l'un quelconque des secteurs d'empiétement (30), chacune de ces intégrales représentera la même fonction analytique, de sorte qu'*à l'intérieur d'un tel secteur, ces $m + 1$ intégrales satisferont à une relation à coefficients constants;* et

(1) Exception faite des rayons $\vec{\rho}$ correspondant aux échancrures relatives aux D_j; ils ne seront recouverts que par m secteurs. Mais cette restriction est sans importance pour notre but actuel.

(2) Pour préciser, il conviendrait d'ajouter que, puisqu'un secteur canonique mixte provient de deux secteurs ayant en commun un secteur d'amplitude $2\pi : n$, on saura définir en tout point de $(\mathcal{S})$, sauf dans les échancrures, un système de $m + 3$ intégrales; mais, de ces intégrales, deux couples sont infiniment voisins pour ε infiniment petit; comme nous n'avons en vue que les propriétés de l'équation limite (E), nous pouvons toujours supprimer l'un ou l'autre des intégrales de l'un quelconque de ces couples.

il y aura autant de ces relations que de secteurs d'empiétement, c'est-à-dire actuellement mn.

Nous allons étudier ces relations, qui deviendront, à la limite, les relations de structure du point irrégulier, et dont nous généraliserons d'ailleurs l'existence, lorsque les σ_j formeront une configuration quelconque.

TROISIÈME PARTIE.

LES RELATIONS DE STRUCTURE DU POINT IRRÉGULIER.

24. Les invariants du groupe de monodromie d'une équation linéaire. — Désignons d'une façon générale par $e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}$ les points singuliers (réguliers) d'une équation différentielle linéaire $(\mathcal{E})$, d'ordre m. Soient $y_1^h, \ldots, y_h^m$ les m intégrales qui forment le système fondamental canonique relatif à e_h, chacune d'elles n'étant d'ailleurs définie qu'à un facteur constant près; appelons encore S_h la substitution canonique correspondante, et $r_1^h, \ldots, r_m^h$ les racines de son équation caractéristique (racines que, pour simplifier l'écriture, nous supposerons distinctes); soit enfin Σ_h la substitution de passage qui lie les intégrales y_j^h aux y_j^{n+1}; on aura ainsi

$$(\Sigma_h) \qquad y_j^h = \sigma_{j1}\, y_1^{n+1} + \ldots + \sigma_{jm}\, y_m^{n+1} \qquad (j = 1, \ldots, m;\ h = 1, \ldots, n).$$

Le groupe de monodromie G de (s) est dérivé des n substitutions $T_h = \Sigma_h^{-1} S_h \Sigma_h$ qui, d'ailleurs, sont liées à S_{n+1} par la relation

$$(31) \qquad T_1 \ldots T_n \ldots T_1 S_{n+1} = 1,$$

de sorte qu'on peut dire encore, si l'on veut, que les substitutions fondamentales de G sont $T_1, \ldots, T_{n-1}, S_{n+1}$. Cherchons à définir *explicitement* un système d'invariants pour ce groupe.

Puisqu'on peut multiplier chacune des y_j^h par un facteur constant, on voit (en faisant abstraction du facteur commun par lequel on peut multiplier toutes les y_j^h) qu'il entre dans les (Σ_h)

$$nm - [(n+1)m - 1]$$

paramètres arbitraires. D'autre part, les racines r_i^h doivent être comptées pour $(m-1)n$ paramètres seulement (puisque la substitution $y|\lambda(x)y$ permet de prendre arbitrairement le produit $r_1^h \ldots r_m^h$). Enfin la relation (31), où S_{n+1} est connue dès qu'on s'est donné les S_h, introduit $m^2 - m$ relations non identiques entre les β. On voit donc que G doit dépendre de

$$nm^2 - (n+1)m + 1 + n(m-1) - m^2 + m - (n-1)(m^2-1) = 0$$

invariants, ce qui est bien le nombre obtenu par H. Poincaré [1], à la suite d'une énumération un peu différente.

On sait d'ailleurs que le choix effectif d'un système d'invariants comporte toujours une large part d'arbitraire, puisqu'on peut substituer à tout système de $\mathfrak{N}$ invariants un système formé par $\mathfrak{N}$ fonctions indépendantes (déterminées) de ces quantités [2]. Or, actuellement, le procédé d'énumération que nous avons employé va nous permettre de constituer un système très simple d'invariants. En effet, observons que les rapports

$$K_{jn}^{i} = \frac{\beta_{jn}^{i}}{\beta_{jn}^{1}} : \frac{\beta_{11}^{i}}{\beta_{11}^{1}}$$

sont indépendants de la dilatation arbitraire qu'on peut faire subir aux intégrales canoniques; mais ces rapports relatifs à $h = 1$ sont au nombre de $(m-1)^2$; ceux qui ont trait à $h = 2, \ldots, n-1$ [puisque nous pouvons négliger T_n en vertu de (31)] sont au nombre de $(n-2)m(m-1)$. L'ensemble de ces rapports, joints aux $n(m-1)$ racines r_i^h, fournit bien $\mathfrak{N}$ invariants, tous distincts, en vertu même de leur mode de formation.

Pour abréger, nous donnerons aux r_i^h le nom d'*invariants de*

---

[1] *Acta math.*, t. 4, 1884, p. 205; *Œuvres*, t. II, p. 303. Les calculs précédents supposent d'ailleurs $n \geq 2$, hypothèse que nous avons toujours le droit d'admettre.

[2] Ainsi, un calcul facile montre que les coefficients γ_{jk}^{i} de la substitution T_n sont de la forme $\frac{\beta_{11}^{i}}{\beta_{11}^{1}} f_{jk}(K)$, où les f_{jk} sont des fonctions rationnelles des r_i^h et des rapports K_{jn}^{i} que nous introduisons ci-après. Les expressions γ_{jk}^{i} et $\gamma_{jk}^{i}\gamma_{jk}^{i}$ qui, *a priori*, devaient être des invariants de G, s'expriment bien au moyen des r_i^h et des K_{jn}^{i}.

première espèce; les K'_{jh}, au nombre de $(m+1)[m(n-1)+1]$ seront *les invariants de seconde espèce de* G.

25. Les relations de structure et les invariants du point irrégulier de (E) : cas où les s_j forment un polygone convexe. — Revenons à (E). Soit encore y_j^h l'intégrale canonique pour x_h, et dont l'exposant admet $-\frac{\sigma_j}{n\varepsilon^n}$ comme partie principale; puisque les σ_j forment un polygone convexe, nous savons calculer cette intégrale par approximations successives, quels que soient j et h. Soit encore z_j^h l'intégrale, canonique pour x_∞, d'exposant voisin (relativement) de $\frac{\sigma_j}{\varepsilon^n}$ et prolongée jusqu'au point x le long d'un chemin direct [1] passant entre x_{h-1} et x_h. Les relations qui existent, entre les $m+1$ intégrales qu'on sait calculer en un point quelconque de (s), sont de l'une ou de l'autre forme que voici :

$$(32)\quad \begin{cases} y_j^{h-1} = a_{j1}^{h-1} y_1^h + \ldots + a_{jh}^{h-1} y_h^h + a_{j1}^{h} z_1^h + \ldots + a_{jh}^{h-1} z_{h-1}^h + a_{jh}^{h} y_h^{h-1} + \ldots + a_{jm}^{h} y_m^{h-1}; \\ z_j^{h-1} = b_{j1}^{h-1} y_1^h + \ldots + b_{jh}^{h-1} y_h^h + b_{jh}^{h} z_1^h + \ldots + b_{jh}^{h-1} z_{h-1}^h + b_{jh}^{h} y_h^{h-1} + \ldots + b_{jm}^{h} y_m^{h-1}. \end{cases}$$

Il est à noter d'ailleurs que l'écriture de ces relations comporte un certain arbitraire, en vertu de l'existence des deux secteurs mixtes $\nabla_{j'h}$, $\nabla_{j''h}$ (n° **22**) : aux relations (32) on pourrait en substituer d'autres qui contiendraient y_j^h, $z_{j'-1}^h$, $y_{j''-1}^{h-1}$, ou $z_{j''}^h$. Mais, puisque y_j^h et $z_{j'}^h$, par exemple, tendent l'une vers l'autre dans $\nabla_{j'h}$, comme il a été expliqué (n° **20**), *les coefficients des relations* (32) *tendront vers le même système de valeurs-limites, quelle que soit la forme donnée à ces relations*, et c'est là, pour nous, la seule chose qui importe.

Or les mn relations (32), quoique de forme légèrement différente des (Σ_h) [2], peuvent être évidemment utilisées de la même

---

[1] C'est-à-dire, sans tourner autour des autres points x_h.

[2] D'ailleurs, en procédant à partir des relations (32), il serait aisé de former un système de relations du type (Σ_h). En effet, on joindrait le point x_j aux points x_h par des chemins déterminés (directs, par exemple). Le long de ces chemins, on aurait des relations de la forme (Σ_h) dont l'ensemble comprendrait nm^2 coefficients inconnus. Mais, en exprimant les y et les z qui figurent dans ces relations au moyen de (32), on obtiendrait par identification nm^2 relations linéaires qui fourniraient les coefficients.

manière, et fourniront un système de $(m-1)[m(n-1)-1]$ invariants, pleinement équivalent à celui des K'_{jh}.

Et maintenant, il est bien facile de déterminer les limites vers lesquelles tendent les invariants du groupe de (E). En effet, on a vu (nos **19** et **20**) que les intégrales canoniques de (E) tendent vers des intégrales normales de $(\overline{E})$. Ces dernières sont définies dans des secteurs $\overline{\nabla}_{jh}$ qui ne sont autres que les limites des secteurs canoniques ∇_{jh} et qu'on obtiendrait par un procédé identique appliqué à l'équation-limite $(\overline{E})$. En tout point x (suffisamment éloigné), on saura donc calculer $m+1$ intégrales normales qui seront liées par des relations $(\overline{32})$, limites de (32). Nous appellerons ces relations-limites [1] LES RELATIONS DE STRUCTURE DU POINT IRRÉGULIER. Les combinaisons de formes analogues à celle des K'_{jh}, calculées au moyen des coefficients des relations de structure, seront, par définition, les INVARIANTS *du point irrégulier;* et nous pouvons ajouter aussitôt que le point irrégulier x_∞ (de rang n), de l'équation (E) (d'ordre m), possède $(m-1)[m(n-1)-1]$ invariants, qui sont les limites des invariants de seconde espèce du groupe G de $(\overline{E})$.

Quant aux racines des équations fondamentales déterminantes de (E), elles tendent vers l'infini. Mais leurs $n(m-1)$ combinaisons symétriques

$$\sum_{h=1}^{n} (\varepsilon\lambda_h)^{n-\nu} r_j^h = -\sum_{h=1}^{n} (\varepsilon\lambda_h)^{n-\nu} \frac{\varpi_{jh}}{n\varepsilon^n} = \begin{cases} -\alpha_{n-1}^{j} & (\nu \neq 0), \\ -\alpha_{n-1}^{j} - \varepsilon^n \alpha_{-1}^{j} & (\nu = 0) \end{cases}$$

---

[1] En apparence, ces mn relations sont à mn inconnues; mais, si l'on pratique une coupure rectiligne le long, par exemple, de la frontière commune de deux secteurs ∇ consécutifs, on apercevra aisément que ces relations contiennent en réalité $m(n+1)$ intégrales y_j^h; à savoir $(n-1)m$ intégrales dont les secteurs ne contiennent pas la coupure, et m intégrales définies de part et d'autre de la coupure. Pour former les invariants K, on ne tiendra compte que des relations où figurent les m dernières intégrales, définies d'un côté déterminé de la coupure : on obtiendra bien ainsi $(m-1)[m(n-1)-1]$ invariants K. L'utilisation des m équations restantes reviendrait à celle de (31).

$\nu = 0, \ldots, n-1$; $j = 1, \ldots, m-1$ tendent vers des limites finies, $-\bar{\alpha}^{\nu}_{n-1-\nu}$. En définitive, lorsque les s_j forment un polygone convexe, on peut constituer un système de π invariants du groupe de monodromie de (E) qui tendent vers des limites finies, calculables sur $(\overline{E})$.

26. Cas où le polygone des s_j n'est pas convexe. — Pour établir les résultats précédents, nous avons dû supposer que les s_j forment un polygone convexe; nous allons montrer maintenant que ces résultats subsistent lors même que cette hypothèse n'est plus réalisée; mais alors la formation des invariants devient d'autant moins simple que le polygone des s_j s'écarte davantage d'une forme convexe.

Lorsque les s_j, ou les σ_j, ne forment pas un polygone convexe, la méthode des approximations successives ne fournit plus directement les mn intégrales canoniques de (E) relatives aux x_h; mais, du moins, elle permet d'obtenir des intégrales paracanoniques dont l'allure au voisinage de x_h et x_α généralise, comme nous avons vu, celle des intégrales canoniques. On conçoit donc que, grâce à l'existence de ces intégrales paracanoniques, il soit encore possible de construire un système d'invariants tendant pour ε infiniment petit vers des limites déterminées. D'ailleurs, un tel système n'est pas défini d'une façon unique; on pourra, par exemple, le choisir de la façon suivante.

Appelons toujours $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$ les sommets du polygone de sustentation Π et supposons, ce qui n'introduit pas de restriction essentielle, que trois quelconques des σ_j ne soient pas en ligne droite. Soit alors σ_j un point σ intérieur à Π et λ_1, λ_2 l'un des couples d'angles opposés qu'on a attachés à σ_j (n° **17**); à l'intérieur de λ_1, λ_2 on ne rencontre aucun autre point σ; effectivement, tous ces points σ se trouvent répartis en deux groupes de ν'_j et ν''_j points situés, chacun, dans l'un des angles extérieurs à λ_1, λ_2; soit ν_j (≥ 1) le plus petit des deux entiers précédents. Quand λ_1 (et λ_2) varient de toutes les manières possibles (σ_j restant fixe), ν_j admet un

minimum ν_j (≥ 1) et, en vertu des résultats du n° **15**, on pourra définir, relativement à σ_j, deux cycles de $2n$ intégrales paracanoniques, d'indice $\nu_j + 1$ [1], dont chacune convergera dans un secteur d'amplitude $(\pi + V) : n (V > 0)$, de sorte qu'en tout point x [2] de la région normale (s) on pourra calculer l'une ou l'autre de ces intégrales paracanoniques.

Procédant de même pour tous les $m - M$ points σ_j intérieurs à Π, on pourra donc calculer, en tout point x de (s), $m - M$ intégrales paracanoniques déterminées; d'ailleurs, on sait déjà (n° **23**) qu'en un tel point, on peut calculer $M + 1$ intégrales canoniques. En définitive, l'ensemble de toutes les intégrales canoniques ou paracanoniques qu'on aura calculées sera caractérisé par cette propriété de provenir de tous les m points σ_j, *la somme des indices des intégrales étant minimum;* le nombre des paracanoniques d'indice donné ne dépend d'ailleurs que de la configuration des σ_j (au point de vue de la Géométrie de situation).

Ceci posé, les $m + 1$ intégrales qu'on sait calculer en un point quelconque de (s) sont liées par une relation linéaire, à coefficients indépendants de x; pour ε infiniment petit, cette relation, et les relations analogues, tendront vers des relations déterminées que nous appellerons encore *les relations de structure du point irrégulier.* Montrons comment on peut déduire des coefficients de ces relations un système complet d'invariants de seconde espèce; pour abréger l'écriture, nous nous bornerons au cas où l'on a $M = m - 1$, mais le procédé se généraliserait aisément.

Désignons par $y_1, \ldots, y_m$ un système de m intégrales canoniques, pour l'un des points singuliers, x_h, par exemple, et par $z_1, \ldots, z_m$ un système analogue pour x_∞. Si, entre ces intégrales, on connaissait des relations de la forme (Σ_h) [n° **24**], soit

$$z_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ij} y_j. \tag{33}$$

---

[1] D'une manière plus précise, celle qui correspond à l'angle γ étant d'indice $\nu_j + 1$ pour le point x_h, par exemple, celle qui correspond à l'angle opposé sera d'indice $\nu_j + 1$ pour le point x_∞.

[2] Dont l'argument ne correspond pas à une échancrure.

on en déduirait immédiatement $(m-1)^2$ invariants de la forme

$$\frac{c_{ij}c_{kl}}{c_{il}c_{kj}}.$$

Mais, autour de x_h, on ne connaît que $y_1, \ldots, y_{m-1}$, par exemple, et une combinaison de y_{m-1} et y_m qui doit se réduire à une combinaison de $z_1, \ldots, z_{m-1}$ seulement (les indices étant convenablement choisis) [1]. Cette combinaison sera donc de la forme

$$(34) \qquad y_{m-1} = \frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial c_{m-1\,m}} y_{m-1} + \frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial c_{m\,m-1}} y_m$$

(où $D = |c_{ij}|$). De même, en x_ν on ne connaît que $z_1, \ldots, z_{m-1}$ et une combinaison de z_{m-1} et z_m qui doit être linéaire en $y_1, \ldots, y_{m-1}$ [2] et qui est donc de la forme

$$(35) \qquad z_{m-1} = c_{m-1\,m} z_{m-1} + c_{m-1\,m} z_m.$$

Ainsi donc les relations, soit (33 *bis*), qu'on sait former entre les $y_1, \ldots, y_{m-1}, y_{m-1}, z_1, \ldots, z_{m-1}, z_{m-1}$ peuvent être considérées comme déduites de (33) au moyen de (34) et de (35). Appliquons alors à ces relations (33 *bis*) la méthode donnée au n° **24** pour la construction des invariants de G; il est bien facile de vérifier que les quantités K′, qu'on obtient ainsi comme invariants à partir de (33 *bis*), ne dépendent, en fait, que des invariants qu'on aurait déduits de (33). En effet, changeons y_i en $\lambda_i y_i$, z_i en $\mu_i z_i$ dans (33); c_{ij} sera remplacé par $\frac{\mu_i}{\lambda_j} c_{ij}$ et D par $\frac{\mu_1 \ldots \mu_m}{\lambda_1 \ldots \lambda_m} D$; de même, $\frac{\partial D}{\partial c_{m\,m}}$ et $\frac{\partial D}{\partial c_{m-1\,m-1}}$ seront multipliés respectivement par $\frac{\mu_1 \ldots \mu_{m-1}}{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$ et $\frac{\mu_1 \ldots \mu_{m-1}}{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}\lambda_m}$. Cette transformation reviendra donc à multiplier y_{m+1} par $\frac{\lambda_m \lambda_{m-1}}{\mu_m}$ et, de même, z_{m+1} par $\frac{\mu_m \mu_{m-1}}{\lambda_m}$; elle n'altérera donc pas les K′; en

---

[1] Ceci suppose implicitement $m > 2$, conformément d'ailleurs à une remarque que nous avons déjà faite (n° 23).

[2] Les deux intégrales paracanoniques précédentes proviennent d'un couple d'angles opposés λ_1', λ_2' (le nombre ν_j étant égal à 1).

d'autres termes, les K′ ne dépendent que des K : c'est ce que vérifie le calcul direct que nous omettons [1].

27. Les intégrales normales de [illegible] asymptotiquement équivalentes. Leur origine. — Revenons maintenant aux relations de structure du point irrégulier pour en faire de nouvelles applications. Nous nous bornerons d'ailleurs au cas où les σ_j [illegible]ment un polygone convexe; bien entendu, les résultats que nous obtiendrons pourraient être étendus au cas général moyennant des complications de détail, analogues à celles du n° **26**. De plus, en raison de notre but actuel, nous n'établirons aucune distinction entre les secteurs ordinaires et les secteurs mixtes; nous n'aurons donc pas à distinguer l'une de l'autre les deux intégrales canoniques d'un secteur mixte.

Nous avons déjà observé qu'à l'intérieur d'un secteur d'empiétement $\nabla_j^{h,h-1}$ on peut calculer $m+1$ intégrales ; d'après notre convention, nous pourrons les désigner par [2]

$$y_1^{h-1}, \quad \ldots, \quad y_{j-1}^{h-1}, \quad y_j^{h-1}, \quad y_j^h, \quad y_{j+1}^h, \quad \ldots, \quad y_m^h.$$

Cela étant, je dis d'abord qu'*à l'intérieur de* $\nabla_j^{h,h-1}$, *les rapports*

$$|y_k^h : y_j^{h-1}|, \quad |y_k^h : y_j^h|$$

sont très petits ($k \neq j$; $h' = h$ ou $h-1$).

En effet, d'après le n° **15**, il suffit évidemment de prouver que les rapports $|u_k : u_j|$ ($k \neq j$) sont très petits à l'intérieur de ∇[illegible]. Mais, pour ε infiniment petit, ces rapports tendent dans (8) vers $e^{\overline{\varpi}_k - \overline{\varpi}_j}$; pour légitimer notre assertion, il nous suffira donc d'établir

---

[1] A la vérité, le procédé précédent ne fournira pas $(m-1)^2$ invariants indépendants [illegible] on observera, par exemple, que dans les relations (33 *bis*) le coefficient $\frac{\partial z_{m+1}}{\partial y_{m+1}}$ est toujours nul [illegible]. Mais il sera toujours loisible d'obtenir des para[illegible] canoniques distinctes des précédentes en opérant, par exemple, sur l'un des sommets σ_j ($j \neq M$) de H, ce qui permettra de compléter [illegible] d'invariants requis.

[2] Actuellement y_j^h peut désigner une intégrale canonique pour [illegible]

qu'on a

$$(36) \qquad \cos(\beta_{jk} - n\beta) < 0$$

à l'intérieur de $\nabla_j^{h,h-1}$. Or on a, *quel que soit k*,

$$(37) \qquad \gamma_j - \eta < \beta_{jk} < \pi + \gamma_{j+1} + \eta,$$

et, d'ailleurs, à l'intérieur de $\nabla^{h,h-1}$, on peut écrire [*cf.* (30)] :

$$\beta_{jk} - \gamma_j + \eta - \frac{3\pi}{2} + 2h\pi < \beta_{jk} - n < \beta_{jk} - \gamma_{j+1} - \eta - \frac{3\pi}{2} + 2h\pi,$$

inégalités qui, jointes à (37), entraînent (36). C. Q. F. D.

Comme, d'ailleurs, les expressions

$$|\varepsilon_j - 1| = \left|\frac{y_j^{h}}{u_j} - 1\right| \quad \text{et} \quad \left|\frac{y_j^{h-1}}{u_j} - 1\right|$$

sont très petites en même temps que r_1^{-1} (nº **15**), c'est-à-dire en même temps que $|\varepsilon|$ (nº **17**), la relation de structure relative à $\nabla^{h,h-1}$ sera de la forme

$$(32\,bis) \qquad y_j^{h} - a_j^{h} y_j^{h-1} = a_1^{h-1} y_1^{h-1} + \ldots + a_j^{h-1} y_j^{h-1} + a_{j+1}^{h} y_{j+1}^{h} + \ldots + a_m^{h} y_m^{h},$$

où $|a_j^{h} - 1|$ est infiniment petit avec $|\varepsilon|$. Faisons tendre ε vers 0; à la limite, la relation (32 *bis*) deviendra

$$(\overline{32\,bis}) \qquad \bar{y}_j^{h} - \bar{y}_j^{h-1} = a_1^{h-1} \bar{y}_1^{h-1} + \ldots + \bar{a}_{j-1}^{h-1} \bar{y}_{j-1}^{h-1} + \bar{a}_{j+1}^{h} \bar{y}_{j+1}^{h} + \ldots + \bar{a}_m^{h} \bar{y}_m^{h},$$

et, de plus, les rapports $\left|\frac{y_j^{h}}{y_j^{h-1}}\right|$, $\left|\frac{\bar{y}_j^{h}}{\bar{y}_j^{h-1}}\right|$ seront très petits dans $\nabla^{h,h-1}$. Mais alors, il suit aussitôt de (32 *bis*) que non seulement $\bar{y}_j^{h-1}$ et $\bar{y}_j^{h}$ auront dans $\nabla_j^{h,h-1}$ un ordre de grandeur prépondérant, mais encore qu'*elles admettront même représentation asymptotique dans ce secteur* (illimité — *cf.* nº **18**) (¹); par rapport à la méthode des séries asymptotiques, *elles ne font qu'une seule et même intégrale.*

(¹) Ceci s'accorde bien avec la remarque classique que les fonctions $f(x)$ et $f(x) + e^{-x}$ de la variable positive x sont asymptotiquement indiscernables. Observons aussi que l'on pouvait prévoir *a priori* l'existence de deux intégrales figurant dans une relation de structure et ayant même développement asymptotique; mais cette remarque n'aurait pas suffi à déceler l'origine de ces intégrales.

Au contraire, la méthode des approximations successives nous a permis, non seulement d'individualiser ces deux intégrales sur l'équation-limite $(\overline{\mathrm{E}})$, mais encore d'assigner à chacune *une origine propre* : $\overline{y}_j^{h-1}$ et $\overline{y}_j^h$ sont, ou bien, des traces d'intégrales canoniques relatives à x_h et x_{h-1} (les exposants caractéristiques ayant même partie principale); ou bien, ce sont les valeurs prises en x par une intégrale, canonique pour x_∞ et calculée le long de deux chemins comprenant entre eux le point x_h (*cf.* n° **22**).

28. Les lignes de zéros de l'intégrale générale de (E) [1]. — Complétons les résultats que nous venons d'obtenir sur les ordres de grandeurs relatives des intégrales y, afin d'en déduire la configuration des lignes de zéros de l'intégrale générale de (E) (au voisinage de x_∞). A cet effet, nous nous appuierons sur la remarque suivante, conséquence immédiate de ce qui précède. Si, au lieu de rester à l'intérieur de $\overline{\nabla}_j^{h,h-1}$, *on pénètre dans une des échancrures qui bordent ce secteur*, pour s'éloigner par exemple suivant l'argument [2]

$$\vartheta = -\frac{\gamma_j}{n} - \frac{3\pi}{2n} + \frac{2h\pi}{n},$$

chacun des rapports $\overline{y}_k^{h-1} : \overline{y}_j^{h-1}$ $(k = 1, \ldots, j-1)$ et $\overline{y}_k^h : \overline{y}_j^{h-1}$ $(k = j+2, \ldots, m$ tendra vers zéro.

Cela étant, une intégrale *quelconque* y de (E) peut être représentée dans la direction ϑ sous la forme

$$\overline{y} = A_1 \overline{y}_j^{h-1} + B_1 \overline{y}_{j+1}^h + C_1 \overline{y}_1^{h-1} + \ldots + C_{j-1} \overline{y}_{j-1}^{h-1} + C_{j+1} \overline{y}_{j+1}^h + \ldots + C_m \overline{y}_m^h,$$

où A, B et les C sont des constantes arbitraires. Dès lors, en vertu de la remarque qu'on vient de faire, $\overline{y}$ possédera dans la direction ϑ

---

(1) Les résultats de ce numéro s'appliqueraient aussi à (E) (intérieurement à la région normale); la transcription des énoncés ne nécessiterait que quelques longueurs, sans intérêt d'ailleurs.

(2) Cet argument appartient à $\overline{\nabla}_{j,j-1}$, à $\overline{\nabla}_{j,j+1}$, aux $\overline{\nabla}_{k,j-1}$ $(k = 1, \ldots, j-1)$, et aux $\overline{\nabla}_{k,j}$ $(k = j+2, \ldots, m)$, mais non à $\overline{\nabla}_{j,j}$ (*cf.* [illegible]), p. [illegible].

des zéros très voisins de ceux de la combinaison $A\bar{y}_j^{h-1} + B\bar{y}_{j+1}^{h}$, ou, si l'on veut, très voisins de ceux de $A_1 u_j + B_1 u_{j+1}$. Pour $|x|$ très grand, ces zéros seront donc sensiblement donnés par la relation

$$(38) \qquad |\bar{\alpha}_{n-1}^{j+1} - \bar{\alpha}_{n+1}^{j}| r^n + n \operatorname{Log} A_1 B_1^{-1} = 0.$$

Soit $|\bar{\alpha}_{n-1}^{j+1} - \bar{\alpha}_{n+1}^{j}| = a_j$; ces zéros s'échelonneront sur la demi-branche infinie, d'argument $\bar{\zeta}$, de la courbe

$$(39) \qquad a_j r^n \cos(n\bar{\zeta} + \bar{\gamma}_j) + n \log|A_1 B_1^{-1}| = 0,$$

du type $\bar{\zeta}$. Si $\log|AB_1^{-1}|$ est suffisamment grand en valeur absolue et positif par exemple, cette demi-branche appartiendra à une branche de (39), doublement infinie dans deux directions, qui restera extérieure à Γ et sera d'abord intérieure au secteur

$$(40) \qquad -\frac{\gamma_{j+1} - \alpha}{n} - \frac{3\pi}{2n} - \frac{2h\pi}{n} < \bar{\zeta} < -\frac{\gamma_j - \alpha}{n} - \frac{\pi}{2n} - \frac{2h\pi}{n} - \frac{2\pi}{n},$$

où sont définies simultanément $\bar{y}^{h-1}$ et $\bar{y}_{j+1}$; extérieurement à ce secteur, l'arc précédent se terminera par une demi-branche d'argument $\bar{\zeta}' = \bar{\zeta} + \frac{\pi}{n}$.

Appelons ξ_ρ les zéros de (38); ils s'espaceront dans la direction $\bar{\zeta}$, avec des différences mutuelles de $2\pi i(\bar{\alpha}_n^{j+1} - \bar{\alpha}_{n-1}^{j})^{-1} \xi_\rho^{1-n}$, et l'on pourra entourer chacun d'eux d'un cercle λ de rayon $\mu|\xi_\rho|^{-n+1}$, où μ est très petit avec $|\xi_\rho^{-1}|$, de telle sorte que chacun d'eux ne contienne qu'un zéro de l'intégrale $\bar{y}$. Les zéros ainsi obtenus formeront une demi-ligne indéfinie, qu'on pourra suivre sans obstacle, et qu'on pourrait aussi remonter en sens inverse, *à condition de ne pas sortir de* (40). *Nous ne sommes donc pas sûrs encore que y possède des zéros voisins des ξ_ρ sur la demi-branche de* (39) *d'argument $\bar{\zeta}'$*. Mais l'existence de la relation de structure (32 *bis*) va nous permettre de sortir de cette difficulté.

En effet, grâce à cette relation, on pourra remplacer [1] l'inté-

[1] Il pourra être nécessaire de faire une substitution analogue sur quelques-uns

grale $\bar{y}_j'^{-1}$ qui figure dans l'expression de y par l'intégrale $\bar{y}_j'$ que l'on sait calculer pour $\theta = \xi'$. En définitive, on aura donc obtenu pour l'intégrale générale $\bar{y}$ une ligne *doublement illimitée* de zéros, dont chacun est enfermé à l'intérieur d'un cercle A_ρ de rayon très petit, décrit autour d'un point ξ_ρ d'une branche de la courbe (39). Ces zéros se succèdent avec des différences mutuelles voisines de $2\pi i\,(\bar{\alpha}_{n-1}^{j+1} - \bar{\alpha}_{n-1}^{j})^{-1}\,\xi_\rho^{1-n}$, et *sans qu'il y ait de lacune entre les deux extrémités de la ligne*, à condition d'ailleurs que $\log|A_1 B_1^{-1}|$ soit suffisamment grand en valeur absolue (¹); enfin, il est clair que, pour $\xi < \theta < \xi'$, l'intégrale $\bar{y}$ *ne pourra posséder* (extérieurement à Γ) *aucun autre zéro que ceux qu'on vient de définir.*

Il est d'ailleurs bien évident qu'en s'appuyant sur l'ensemble des relations de structure ($\overline{32\ bis}$) on pourrait construire des lignes de zéros analogues le long des $n-1$ autres branches de la courbe (39); c'est la généralisation d'un fait analogue établi par M. Pierre Boutroux à l'aide d'une autre méthode (²).

---

des y_g^{j} figurant dans l'expression de $\bar{y}$. Mais, si $\log|A_1 B_1^{-1}|$ est suffisamment grand en valeur absolue par rapport aux coefficients des relations de structure, c'est-à-dire par rapport à une quantité ne dépendant que des coefficients de (E), la modification qui pourrait en résulter pour $\log|A_1 B_1^{-1}|$ sera très petite, et les zéros de $\bar{y}$ resteront intérieurs aux cercles A_ρ.

(¹) Sinon, on ne pourrait définir que $2n$ lignes de zéros dont chacune serait illimitée dans une seule direction. De plus, si $|\log|A_1 B_1^{-1}|$ n'est pas assez grand, les cercles A_ρ ne seraient pas nécessairement enfilés le long des $2n$ demi-branches infinies de la *même* courbe (39).

(²) *Ann. sc. École Normale supérieure*, 3e série, t. 30, 1913, p. 281. On peut d'ailleurs retrouver le résultat de M. P. Boutroux en posant $y = zx^{-p}\cos(x - C)$ dans l'équation de Bessel $xy'' + 2py' + xy = 0$; z est une solution de l'équation intégrale

$$z(x) = 1 - p(p-1)\int_{x_1}^{x} \sin(x - \xi)\,\frac{\cos(\xi - C)}{\cos(x - C)}\,z(\xi)\,d\xi,$$

où le chemin d'intégration se fixe aisément $\left[\text{on peut le prendre parallèle à l'axe réel pour } \mathcal{R}\left(\frac{x - C}{i}\right) = 0\right]$.

Ici, comme au n° **27**, on observera que si un résultat a pu être obtenu, c'est grâce à la méthode des approximations successives : c'est elle qui nous a permis d'individualiser deux intégrales $\bar{y}_j^{h-1}$, $\bar{y}_j^h$, qui dans $\bar{\nabla}_j^{h,h-1}$ n'en auraient constitué qu'une pour la théorie des séries asymptotiques.

QUATRIEME PARTIE.

GÉNÉRALISATIONS ET APPLICATIONS.

29. Généralisation du problème primitif. — En définitive, nous aboutissons à la conclusion suivante : *toute singularité irrégulière de rang n d'une équation linéaire* (satisfaisant à l'hypothèse fondamentale du n° **7**) *peut être envisagée comme provenant de la fusion de $n+1$ singularités régulières infiniment voisines.* A vrai dire, une telle assertion peut paraître énoncée sous une forme trop générale, puisque les n points réguliers à distance finie x_h dont la fusion avec x_∞ engendre le point irrégulier ont été assujettis à la condition de constituer les sommets d'un polygone régulier. Mais, en fait, la configuration spéciale des points x_h n'a joué par elle-même aucun rôle essentiel; elle n'est intervenue que pour simplifier l'écriture, et l'on peut montrer que la conclusion précédente subsiste *quelle que soit la configuration des x_h, pouvu que leurs inverses x_h^{-1} soient des fonctions de ε, holomorphes et nulles pour $\varepsilon = 0$.*

Supposons donc que les x_h soient racines actuellement de l'équation

$$\varphi(x) = \prod_{h=1}^{n} (1 - \varepsilon \lambda_h x) = 0,$$

où, cette fois, les λ_h n'ont plus la même signification qu'au n° **7**, mais satisfont à l'équation

$$(41) \qquad \Phi(\lambda) = \lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0,$$

dont les coefficients p_i sont des fonctions de ε, holomorphes

pour $\varepsilon = 0$. Associons à $(\overline{E})$ l'équation

$$(E_\varphi)\quad y^{(m)} + \frac{A_1}{\varphi(x)} y^{(m-1)} + \ldots + \frac{A_\nu}{[\varphi(x)]^\nu} y^{(m-\nu)} + \ldots + \frac{A_m}{[\varphi(x)]^m} y = 0,$$

qui coïncide avec $(\overline{E})$ pour $\varepsilon = 0$, et reproduit d'ailleurs (E) si l'on prend $\Phi(\lambda) = \lambda^n - 1$. Si les racines de l'équation caractéristique (3) sont distinctes, *hypothèse qui est indépendante du choix de* $\varphi(x)$ et ne concerne que $(\overline{E})$, on pourra répéter sur (E_φ) les mêmes raisonnements que sur (E), moyennant quelques modifications faciles. Ainsi, à $\varpi_k(1 - \varepsilon^n x^n)^{-1}$, on substituera $\frac{\varpi_k}{\varphi(x)}$; en vertu de notre hypothèse fondamentale, les coefficients $\alpha^{(k)}$ de la nouvelle fonction ϖ_k satisferont à des relations de la forme

$$\alpha_{n-1}^{(k)} + \alpha_{n-2}^{(k)} \varepsilon \lambda_h + \ldots + \alpha_1^{(k)} \varepsilon^{n-1} \lambda_h^{n-1} = \sum_{g=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{+\infty} s_{k,l}^{(g)} \varepsilon^l \lambda_h^g$$

$$(h = 1, \ldots, n;\ s_{k,0}^{(0)} = s_k;\ s_{k,l}^{(g)} = 0, \text{ pour } n \geq l + g),$$

ou, en vertu de (41),

$$(42)\quad \begin{aligned} &\alpha_{n-1}^{(k)} + \alpha_{n-2}^{(k)} \varepsilon \lambda_h + \ldots + \alpha_0^{(k)} \varepsilon^{n-1} \lambda_h^{n-1} - \alpha_1^{(k)} \varepsilon^n (p_1 \lambda_h^{n-1} + \ldots + p_n) \\ &\quad = \varphi_0 + \varphi_1 \varepsilon \lambda_h + \ldots + \varphi_{n-1} \varepsilon^{n-1} \lambda_h^{n-1}, \end{aligned}$$

les φ_j étant holomorphes en ε, et $\varphi_0 - s_{k,0}^{(0)}$ étant de l'ordre de ε^n; de plus, $\alpha_{n-1}^{(k)}$ sera toujours défini par l'équation (6), et l'on aura toujours $\alpha_{k,0} = s_{k,0}^{(0)} = s_k$. Égalons alors les coefficients des puissances croissantes de λ_h dans (42) : on voit successivement que $\alpha_1^{(k)}, \alpha_{n-2}^{(k)}, \ldots, \alpha_0^{(k)}$ seront des fonctions de ε, holomorphes pour $\varepsilon = 0$, et l'on établirait de même les autres points de la démonstration des n°s 7-9. Quant au chemin d'intégration, ce sera une des branches de la courbe

$$\mathcal{R}\left[e^{i\theta} \int_0^x \frac{\xi^{n-1}}{\varphi(\xi)} d\xi\right] = 0,$$

suivie dans un sens qui pourra varier avec k.

D'ailleurs, dans l'Analyse précédente, *rien n'oblige essentiellement à supposer que l'équation* (41) *ait ses racines distinctes ou finies.*

On pourra donc prendre

$$\Phi(\lambda) = \lambda^{n-n_1-\dots-n_p}(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\dots(\lambda-\lambda_p)^{n_p},$$

avec $n_1 \geqq 1, \dots, n_p \geqq 1$, $n_1+\dots+n_p \leqq n-1$: à cet égard, tout point irrégulier x_∞, de rang n, peut donc être envisagé comme provenant de la fusion de $p+1$ points irréguliers $x_1, \dots, x_p, x_\infty$, de rangs $n_1-1, \dots, n_p-1$, $n-n_1-\dots-n_p$. En particulier, prenons

$$\Phi(\lambda) = \lambda^{n-1}(\lambda-1),$$

d'où

$$\varphi(x) = 1-\varepsilon x,$$

et l'équation (E_φ) s'écrit alors

$$(E_0') \quad y^{(m)} - \frac{A_1}{1-\varepsilon x}y^{(m-1)} + \dots + \frac{A_r}{(1-\varepsilon x)^r}y^{(m-r)} + \dots + \frac{A_m}{(1-\varepsilon x)^m}y = 0;$$

tout point irrégulier de rang n apparaît donc comme provenant d'une singularité de rang $n-1$ à laquelle s'est agrégé un point régulier.

D'ailleurs, il serait aisé d'étudier directement l'équation (E_0) en procédant comme aux n^{os} **7-9**; mais nous laissons ce soin au lecteur, nous bornant à montrer comment on construira les chemins d'intégration.

50. Les loxodromies des facteurs primaires de Weierstrass. — Actuellement ces chemins sont définis par l'équation

$$(L) \qquad \mathcal{R}\left[e^{i\delta}\int_{x_0}^{x}\frac{\xi^{n-1}}{1-\varepsilon\xi}d\xi\right] = C,$$

qui peut s'écrire encore

$$(43) \qquad \cos\delta\log X - Y\sin\delta = -C\varepsilon^{n},$$

en posant

$$(44) \qquad \varepsilon x = z$$

et

$$(1-z)e^{1+\dots+\frac{z^{n-1}}{n-1}} = X^{\varepsilon}$$

Les chemins d'intégration L *sont donc des loxodromies du facteur primaire de Weierstrass* (de genre $n-1$). Indiquons rapidement la construction de ces courbes, ou, plutôt, des branches de ces courbes qui peuvent être utilisées comme chemins d'intégration.

Considérons d'abord dans le plan $z = re^{\theta}$ la courbe L correspondant à $C = 0$: elle possède un point d'ordre n, l'origine, les tangentes en ce point étant définies par $\cos(n\theta + \delta) = 0$, et les cercles osculateurs en ce point passant par le point $\theta = 0$, $r = n+1$. La courbe possède en outre $n-1$ branches infinies, asymptotes à des droites issues du point $\theta = 0$, $r = -(n-2)^{-1}$ (pour $n > 2$), dans les directions $\cos[(n-1)\theta + \delta] = 0$; enfin, le point A ($\theta = 0$, $r = 1$) est un foyer de L (au sens de H. Poincaré). Il s'agit de montrer que *les arcs issus de* O *se relient à des arcs infinis ou tendant vers* A.

A cet effet, remarquons que (L) entraîne (quel que soit C) :

$$r\frac{d\theta}{dr} = \frac{\cos(n\theta + \delta) - r\cos[(n-1)\theta + \delta]}{\sin(n\theta + \delta) - r\sin[(n-1)\theta + \delta]};$$

considérons, par exemple, les courbes L′, d'équation

$$(\mathrm{L}') \qquad r = \frac{\cos(n\theta + \delta)}{\cos[(n-1)\theta + \delta]}.$$

Ce sont des strophoïdes d'ordre $n+1$, présentant l'origine comme point d'ordre n; les tangentes en ce point sont données par $\cos(n\theta + \delta) = 0$, et les cercles osculateurs en ce point passent par $\theta = 0$, $r = n$. L′ possède en outre une boucle passant par A, et les $2n-2$ arcs de L′, issus de O et étrangers à cette boucle, s'éloignent à l'infini, asymptotiquement à $(n-1)$ droites, issues de $\theta = 0$, $r = -(n-1)^{-1}$, dans les directions $\cos[(n-1)\theta + \delta] = 0$. Bien entendu, les courbes L″, d'équation

$$(\mathrm{L}'') \qquad r = \frac{\sin(n\theta + \delta)}{\sin[(n-1)\theta + \delta]}$$

jouissent de propriétés identiques; d'ailleurs, L′ et L″ ne peuvent se couper à distance finie qu'aux points O et A.

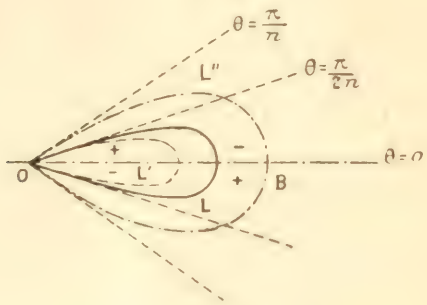
Ceci posé, la construction des arcs de courbes L, issus de O, repose tout entière sur la remarque que voici : *les courbes* L

et L″ *divisent le plan en régions à l'intérieur de chacune desquelles* $r\frac{d\delta}{dr}$ *garde un signe constant.*

Ainsi, considérons d'abord le cas où $\delta = 0$; L′ est alors symétrique par rapport à OA, et L″ est dégénérée en deux courbes, dont l'une coïncide avec l'axe réel OA, et dont l'autre forme une boucle passant par le point B $\left(\theta = 0,\ r = \frac{n}{n-1}\right)$.

Dans la région comprise à l'intérieur des boucles de L′ et L″, $\operatorname{tang} V = r\frac{d\delta}{dr}$ présente les signes figurés ci-dessous (*fig.* 12). Cela étant,

Fig. 12.



faisons croître θ à partir de $-\frac{\pi}{2n}$; d'après la valeur de son rayon de courbure en O [1], L pénétrera dans la région comprise entre L′ et L″; r croîtra donc, sans que L puisse atteindre d'ailleurs la courbe L″ [2]. L rencontrera donc AB à angle droit, et l'arc ainsi obtenu se prolongera jusqu'en O par un arc symétrique relativement à AB.

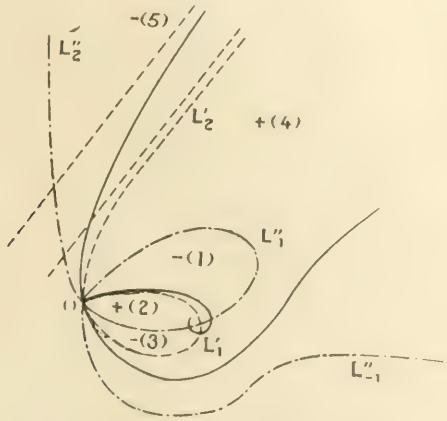
Supposons maintenant δ non nul, mais compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, pour fixer les idées; figurons les boucles L'_1, L''_1, des courbes L′ et L″ et les branches adjacentes L'_2, L_2, L''_2, L_1 et L'_1 comprennent

[1] D'ailleurs, il est facile de voir directement que L ne peut pénétrer à l'intérieur de la boucle de L″.

[2] Car la normale à L passerait par O. A moins que L ne rencontre L″ en B, il faudrait donc que L pénétrât dans l'intérieur de la boucle de L″ en venant de l'extérieur, ce qui est absurde. On peut d'ailleurs établir par des considérations arithmétiques (ou autres) que L ne passe pas par B.

entre elles trois régions (1), (2), (3) où tang V prend les signes —, +, —. L'un des arcs de L, issu de O dans la direction $\frac{\pi}{2n} - \frac{\delta}{4n}$, reste d'abord intérieur à (1); θ décroissant, r croît, et l'arc sortira

Fig. 13.



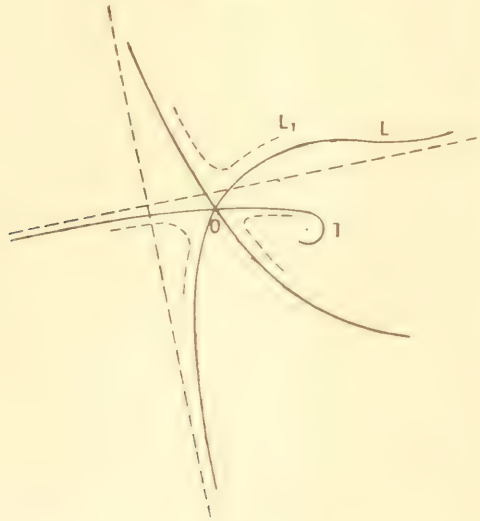
de (1) en coupant L''_1 pour se rapprocher de O; il ne peut d'ailleurs revenir en O [1]; *il s'enroulera donc asymptotiquement autour de* A. Un second arc de L, issu de O dans la direction $-\frac{\pi}{2n} - \frac{\delta}{n}$, pénètre dans la région (4) limitée par L'_1, L''_1, L''_{-1}, L'_2: sur cet arc, r sera une fonction croissante de θ; comme d'ailleurs l'arc ne peut pénétrer dans (1), [soit pour y rester, soit pour pénétrer dans (2)], *il s'éloignera indéfiniment de* O [et cela, quand bien même il sortirait de (4) pour pénétrer dans (5)].

Considérons maintenant les régions du plan (z) telles que (5), limitées par des arcs de L′ ou L″ distincts de L_1 et L_2. Faisons varier θ à partir de $\frac{3\pi}{2n} - \frac{\delta}{n}$; la courbure de L étant inférieure à celle de L'_2, L pénétrera dans (5); r croissant, θ décroîtra, et L ne pourra d'ailleurs pénétrer dans (4), car L'_2 ne possède aucune tangente issue de O; dès lors, θ *décroît constamment, et* L *se rapproche d'une asymptote parallèle à celle de* L_2.

[1] Sinon, il serait nécessairement coupé par l'arc asymptote à A, ce qui est absurde.

Les remarques précédentes permettent de construire aisément l'ensemble des arcs de L issus de O, et d'en déduire l'allure des courbes L pour $C \neq 0$. Sur la figure ci-dessous, on a pris $n=3$, et

Fig. 4.



l'on a représenté aussi, en traits mixtes, des arcs d'une courbe L_1, correspondant à la même valeur de δ, mais à une constante $C \neq 0$; d'ailleurs, observons à ce sujet qu'on pourra toujours s'arranger pour que : 1° C soit assez grand, en sorte que, dans le plan (x), la transformation (44) rejette L extérieurement à Γ, et pour que, 2° $C\varepsilon^n$ soit très petit, en sorte que L_1 soit très voisin de L dans le plan (z), d'après (43).

En définitive, il serait aisé d'établir que, ε tendant vers O, *les courbes* L *se comportent dans la région normale* s *comme les courbes* $\mathfrak{L}$, *et qu'à la limite, elles tendent vers* $\mathfrak{L}$, *à l'intérieur de* (s). Par contre, *elles se comportent à l'infini comme des courbes* $\mathfrak{L}$ *correspondant à la valeur* $n-1$ *de l'indice*. Ces courbes permettraient donc d'édifier une théorie analogue à celle que nous avons développée antérieurement. En fait, une telle méthode ne comporterait pas d'obstacle réel pour $m=2$; elle permettrait d'établir dans ce

cas l'identité des intégrales normales de $(\overline{E})$ avec les limites des intégrales canoniques correspondant aux différents points réguliers qu'on aurait introduits successivement; mais, pour $m > 2$, la méthode paraît peu appropriée pour établir l'identité des intégrales normales avec les limites des intégrales paracanoniques relatives à deux points réguliers agrégés à deux étapes différentes. Aussi, malgré l'intérêt que présente ce mode de génération de la singularité, nous ne nous y arrêterons pas davantage.

31. Cas ou l'équation caractéristique possède des racines égales : les équations (E') et (E'_1). — Occupons-nous maintenant du cas où notre hypothèse fondamentale du n° **7** n'est plus réalisée; l'équation caractéristique (3) possédant des racines égales, les racines ϖ_{kh} de (2), où h a reçu une valeur fixe, sont en général des fonctions algébroïdes (non uniformes) de ε; il sera impossible de réaliser la transformation du n° **7** avec des fonctions ϖ_k rationnelles en x, et pareille conclusion s'appliquera encore à l'équation (28) et à l'expression $\overline{\varpi}$ du n° **18**; dans ce cas, l'équation (E) possédera, en général, des intégrales d'*ordre fractionnaire*. Nous nous proposons de montrer que *ces intégrales*, que nous apprendrons d'ailleurs à calculer, *peuvent être considérées, elles aussi, comme des limites d'intégrales régulières d'une équation* (E'), qui dépend d'un paramètre variable infiniment petit.

Imitant la méthode adoptée au début, nous remplacerons les coefficients $a^{(j)}$ qui figurent dans (E) par des fonctions de ε, se réduisant pour $\varepsilon = 0$ à leurs valeurs primitives, et telles que, pour $\varepsilon \neq 0$, l'équation (3) possède ses m racines distinctes; et, à l'équation ainsi obtenue, nous associerons une équation à $n+1$ points réguliers infiniment voisins, comme au n° **6**. Un tel procédé est évidemment applicable quels que soient les groupes de racines égales que possède l'équation caractéristique de (E); mais comme nous avons surtout en vue de décrire le mécanisme qui permet de passer d'une intégrale régulière à une intégrale d'ordre fractionnaire, nous pourrons, pour plus de simplicité, développer les calculs

sur les équations linéaires d'ordre *minimum* qui possèdent des intégrales d'ordre fractionnaire donné, soit $n = \frac{l}{m}$; en d'autres termes, nous nous limiterons aux équations $(\overline{\mathrm{E}})$ du type

$$(\overline{\mathrm{E}}') \qquad y^{(m)} + \ldots + \Lambda_\nu y^{(m-\nu)} + \ldots + \Lambda_m y = 0,$$

où Λ_m admet x_∞ comme pôle d'ordre $m(n-1) - l$ (l étant premier avec m), tandis que Λ_ν ($\nu \neq m$) est pour $x = \infty$ d'ordre N_ν avec $N_\nu < \nu(n-1) - \frac{l\nu}{m}$. La construction du diagramme de V. Puiseux montre alors que l'équation (2) correspondant à $(\overline{\mathrm{E}}')$ possède dans le domaine de $\varepsilon = 0$ un cycle de m racines, se comportant comme $\varepsilon^{\frac{l}{m}}$. Procédant alors comme nous avons dit, nous adjoindrons d'abord à $(\overline{\mathrm{E}}')$ l'équation

$$(\overline{\mathrm{E}}'') \qquad y^{(m)} + \ldots + \Lambda_\nu y^{(m-\nu)} + \ldots + [-\varepsilon_1^m x^{m(n-1)} + \Lambda_m] y = 0,$$

qui, pour $\varepsilon_1 \neq 0$, vérifie l'hypothèse fondamentale du n° **7**; et à $(\overline{\mathrm{E}}'')$ nous associerons enfin l'équation régulière

$$(\mathrm{E}') \qquad y^{(m)} + \ldots + \frac{\Lambda_\nu}{(1-\varepsilon^n x^n)^\nu} y^{(m-\nu)} + \ldots + \frac{-\varepsilon_1^m x^{m(n-1)} + \Lambda_m}{(1-\varepsilon^n x^n)^m} y = 0;$$

d'ailleurs, nous choisirons la fonction $\varepsilon_1(\varepsilon)$ de telle sorte que $\frac{\varepsilon^{\frac{l}{m}}}{\varepsilon_1}$ tende vers zéro avec ε : nous pourrons prendre, par exemple, $\varepsilon_1 = \varepsilon^{\frac{1}{2m}}$; en définitive, (E') tendra vers $(\overline{\mathrm{E}}')$ quand ε tendra vers zéro.

Ces préliminaires établis, posons [1]

$$X^m = \varepsilon_1^m x^{m(n-1)} + \Lambda_m = \varepsilon^m x^{m(n-1)} + x^{m(n-1)+1} + a^m_{m+1,\,n-1} x^{m(n-1)+1} + \ldots;$$

nous allons montrer qu'on peut former une expression $\varpi(x)$, rationnelle en x et X, soit

$$\varpi(x) = X\left[\pi_0 + \frac{\pi_1}{X} + \ldots + \frac{\pi_{n-1}}{X^{n-1}}\right]$$

---

[1] On peut toujours supposer $a^m_{m+1,\,n-1} = 1$ moyennant une transformation $x/\lambda x$.

avec

$$\pi_0 \equiv q_0^0 + \frac{q_1^0}{x} + \ldots + \frac{q_{n-1}^0}{x^{n-1}} + \frac{q_n^0}{x^n},$$

$$\pi_g \equiv x^{N_g}\left[q_0^g + \frac{q_1^g}{x} + \ldots + \frac{q_{n-1}^g}{x^{n-1}}\right] \qquad (g \geq 0),$$

et telle que chacune des exponentielles $e^{\int_1^X \frac{\pi\, dx}{x^{n+1}}}$, où X a été pris successivement avec chacune de ses déterminations, appartienne aux mêmes exposants que l'intégrale y de (E′) dans le voisinage des points x_h et x_∞.

En effet, observons d'abord que les m racines de l'équation (2), écrite pour (E′), peuvent se développer actuellement sous la forme

$$\varpi_{kh} = \zeta\left[p_0 + \frac{p_1}{\zeta} + \ldots + \frac{p_{m-1}}{\zeta^{m-1}}\right],$$

où ζ désigne l'une des m déterminations du radical

$$[\varepsilon_1^m - (\varepsilon\lambda_h)^l - a_{m\,n-1-l-1}^{(m)}(\varepsilon\lambda_h)^{l+1} - \ldots]^{\frac{1}{m}},$$

et où $p_0, p_1, \ldots, p_{m-1}$ sont des fonctions holomorphes de $\varepsilon\lambda_h$, dont les coefficients contiennent, d'ailleurs, des puissances négatives de ε_1, et qui satisfont aux conditions suivantes :

1° $p_g : \varepsilon^{g(n-1)-N_g}$ est holomorphe en ε;

2° ε tendant vers 0, et $\varepsilon_1(\varepsilon)$ ayant été choisi comme il a été dit, p_0 tend vers 1 et $p_1, \ldots, p_{m-1}$, vers 0.

Or, reportons-nous à la signification de l'équation (2); si nous voulons que ϖ remplisse les conditions requises, relativement aux points x_h, il nous suffira de choisir les q^0 et les $q^{(g)}$ de façon à satisfaire aux égalités

$$(15)\qquad \begin{cases} q_0^0 + q_1^0\,\varepsilon\lambda_h + \ldots + q_{n-1}^0(\varepsilon\lambda_h)^{n-1} + q_n^0\varepsilon^n = p_0, \\ q_0^g + q_1^g\,\varepsilon\lambda_h + \ldots + q_{n-1}^g(\varepsilon\lambda_h)^{n-1} = \dfrac{p_g}{(\varepsilon\lambda_h)^{g(n-1)-N_g}}. \end{cases}$$

Mais l'un quelconque des p_g peut s'écrire sous la forme

$$p_g = p_g^0(\varepsilon^n) + \varepsilon\lambda_h p_g^1(\varepsilon^n) + \ldots + (\varepsilon\lambda_h)^{n-1} p_g^{n-1}(\varepsilon^n),$$

les p_g^g étant holomorphes en ε^n; substituons ces valeurs dans les

seconds membres des équations (45), et identifions de part et d'autre les coefficients des puissances de λ_h : l'équation (2) sera ainsi vérifiée quel que soit h, et nous obtiendrons pour les $q^{(0)}$ et les $q^{(g)}$ des fonctions déterminées de ε'', exception faite pourtant de q_0'' et q_n'' ; mais $q_0'' + q_n''\varepsilon''$ sera, aussi, holomorphe en ε'' (et se réduira d'ailleurs à 1 pour $\varepsilon = 0$) ; et, en explicitant la condition, de forme (5), que doit remplir $\varpi(x)$ relativement à x_∞, on verrait comme plus haut (n° **7**) que q_0'' et q_n'' sont aussi holomorphes en ε'' [1].

L'expression $\varpi(x)$ une fois obtenue, il est aisé de former l'équation linéaire $F(u) = 0$ (rationnelle en x), qui admet pour intégrales les m déterminations de l'exponentielle $e^{\int \frac{-\varpi(x)}{1-\varepsilon''\varpi(x)}}$, ce qui permet d'écrire (E') sous une forme (E'_1) analogue à celle de (E_1) (n° **7**) ; et, en procédant comme au n° **8**, on en déduit aisément la possibilité d'intégrer (E'_1) par approximations successives.

32. Les chemins d'intégration $\mathcal{L}'$. — Pour le passage à la limite que nous avons en vue, la construction des chemins d'intégration $\mathcal{L}'$ va jouer un rôle essentiel. Or, en opérant comme au n° **10**, on trouvera sans peine que ces chemins ont actuellement pour équation

$$\Re\left[e^{i\theta}\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{N(\xi)}{1-\varepsilon''\xi^{\mu}}\,d\xi\right] = C;$$

d'ailleurs, il sera loisible de transformer cette relation de la même façon que (11) ; on pourra donc la remplacer par la suivante :

$$(\mathcal{L}') \qquad \Re\left[e^{i\theta}\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\left[\xi(\xi-\xi_1)^{\mu-1}(\xi-\xi_2)^{\mu-1}\cdots(\xi-\xi_{\mu-1})^{\mu-1}\right]^{\frac{1}{\mu}}}{1-\varepsilon''\xi^{\mu}}\,d\xi\right] = C.$$

Pour construire les courbes $\mathcal{L}'$, posons d'abord

$$\xi = \xi_1 + \frac{\varepsilon_1}{y};$$

[1] q_0'' est une fonction de ε'', holomorphe et se réduisant à 1 pour $\varepsilon = 0$ (ε_1 restant fixe). A vrai dire, ε_1 figure au dénominateur dans les coefficients de cette fonction ; mais, d'après le choix de ε_1, q_0'' tend encore vers 1 quand on fait tendre ε et $\varepsilon_1(\varepsilon)$ vers zéro.

l'équation ($\mathcal{L}'$) s'écrira

$$(46)\qquad \mathcal{R}\left[e^{i\delta}\int_0^y \frac{|y^{m(n-1)} - y^{m(n-1-l)}|^{\frac{1}{m}}}{1-\varepsilon^n\varepsilon_1^{-\frac{mn}{l}}y^n}\,dy\right] = \varepsilon_1^{\frac{mn-l}{l}}\,C;$$

or, en vertu de la condition que nous avons imposée à ε_1 (n° **51**), $\varepsilon^n\varepsilon_1^{-\frac{mn}{l}}$ est infiniment petit avec ε, et, pour

$$|y| < \left|\varepsilon_1^{\frac{m}{2l}}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right|$$

(quantité indéfiniment croissante), la courbe (46) s'écartera relativement très peu de la courbe

$$(\mathcal{L}'')\qquad \mathcal{R}\left\{e^{i\delta}\int_0^y |y^{m(n-1)} - y^{m(n-1-l)}|^{\frac{1}{m}}\,dy\right\} = \varepsilon^{\frac{mn-l}{l}}\,C.$$

Il s'agit d'abord de discuter l'allure des courbes $\mathcal{L}''$, ou, du moins, des branches de ces courbes qui nous intéressent. Pour cela, nous procéderons comme au n° **50** : quel que soit C, les courbes $\mathcal{L}''$ satisfont à l'équation différentielle

$$\operatorname{tang}(mV) + \frac{r^l\sin(mn\theta+\delta') - \sin[(mn-l)\theta+\delta']}{r^l\cos(mn\theta+\delta') - \cos[(mn-l)\theta+\delta']} = 0,$$

où l'on a toujours $\operatorname{tang} V = \frac{r\,d\theta}{dr}$, et où δ' désigne un nouvel argument constant. Or les courbes

$$(47)\qquad r^l = \frac{\sin[(mn-l)\theta+\delta']}{\sin(mn\theta+\delta')}$$

sont aisées à construire : elles possèdent mn branches infinies, dont $mn-l$ passent par l'origine, et l passent respectivement par les points $A_1, \ldots, A_l$ d'affixes

$$y_1 = e^{\frac{i\pi}{l}}, \quad \ldots, \quad y_{l-1} = e^{\frac{i(l-1)\pi}{l}}, \quad y_l = 1;$$

ce sont d'ailleurs les seuls points-base à distance finie du faisceau de courbes (47), où δ' est variable. En tout point du plan (r, θ) distinct de $A_1, \ldots, A_l$, $\operatorname{tang} V$ est susceptible de m valeurs bien

déterminées, qui sont autant de branches d'une même fonction algébrique de r et $\cos\theta$ (par exemple); ces branches ne peuvent d'ailleurs se permuter dans aucun domaine du plan (r, θ). Enfin, on aurait des résultats identiques pour les courbes

$$(48) \qquad r' = \frac{\cos[(mn - l)\theta - \delta]}{\cos(mn\theta + \delta)}.$$

Cela étant, proposons-nous de construire la courbe $\mathcal{C}''_0$ pour laquelle on a $C = 0$; et, à cet effet, considérons d'abord la région du plan (r, θ) comprise entre deux branches de courbes (47) et (48), issues de l'origine, et ne comprenant entre elles aucune autre branche de ces courbes, ni aucun des points $A_1, \ldots, A_l$. Dans cette région, les m déterminations de $\operatorname{tang} V$ seront bien déterminées : en particulier, l'une d'elles s'annule pour $r = 0$, et

$$\operatorname{tang}[(mn - l)\theta - \delta] = 0.$$

Appliqué à cette détermination, un procédé analogue à celui du n° **50** permet de construire un arc de courbe $\mathcal{C}''_0$, tangent à l'origine à une branche de (47), suivant l'une des $(mn - l)$ directions précédentes, et s'éloignant indéfiniment dans la même direction que cette branche; *nous obtenons donc ainsi une première catégorie de $mn - l$ branches de $\mathcal{C}''_0$ issues de* o.

D'autre part, nous sommes sûrs de l'existence *d'une seconde catégorie de $2l$ arcs infinis de $\mathcal{C}''_0$, ne passant pas par l'origine, et s'éloignant suivant l directions bien déterminées*, données par

$$\operatorname{tang}(mn\theta + \delta) = 0.$$

Pour voir comment les branches de cette catégorie sont situées par rapport aux premières, faisons varier C par continuité, depuis o jusqu'à la plus petite, en valeur absolue, des quantités C_h telles que

$$C_h = \left[e^{\delta} \int_{\theta_0}^{\theta} \left(\frac{\cos[(mn - l)\theta - \delta]}{\cos(mn\theta + \delta)} \right)^{\frac{1}{m}} d\theta \right]^{mn} \quad (h = 1, \ldots, l).$$

Pour $|C|$ petit, partiront du voisinage de l'origine m systèmes d'arcs différents, composés chacun de $mn - l$ branches de la première catégorie de la courbe $\mathcal{C}''_0$; choisissons arbitrairement un de ces

systèmes, et suivons-le par continuité. *Pour* $C = C_h$, *une branche de ce système passera par* A_h, *où elle coupera une branche (au moins) de la seconde catégorie;* une branche de la courbe $\mathcal{C}''_{C_h}$ possédera A_h [1] comme point multiple d'ordre $m+1$ et *séparera deux branches de l'une et l'autre catégorie de courbes* $\mathcal{C}_C$ *voisines de* $\mathcal{C}_{C_h}$ ($C < C_h$). Et, en faisant toujours varier C par continuité, à partir de C_h (ou de 0) on obtiendrait des conclusions analogues relatives aux autres points $A_{h'}$.

Cela étant, il nous sera facile de terminer la construction des courbes (46) : aussi bien, pour

$$y > \left| \varepsilon_1^{\frac{m}{2l}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \right|,$$

et $|\varepsilon|$ suffisamment petit, on peut remplacer l'équation (46) par la suivante :

$$\mathcal{R}\left[e^{i\theta} \int_0^y \frac{y^{n-1}\,dy}{1 - \varepsilon^n \varepsilon_1^{\frac{mn}{l}} y^n} \right] = \varepsilon_1^{\frac{mn-l}{l}} C,$$

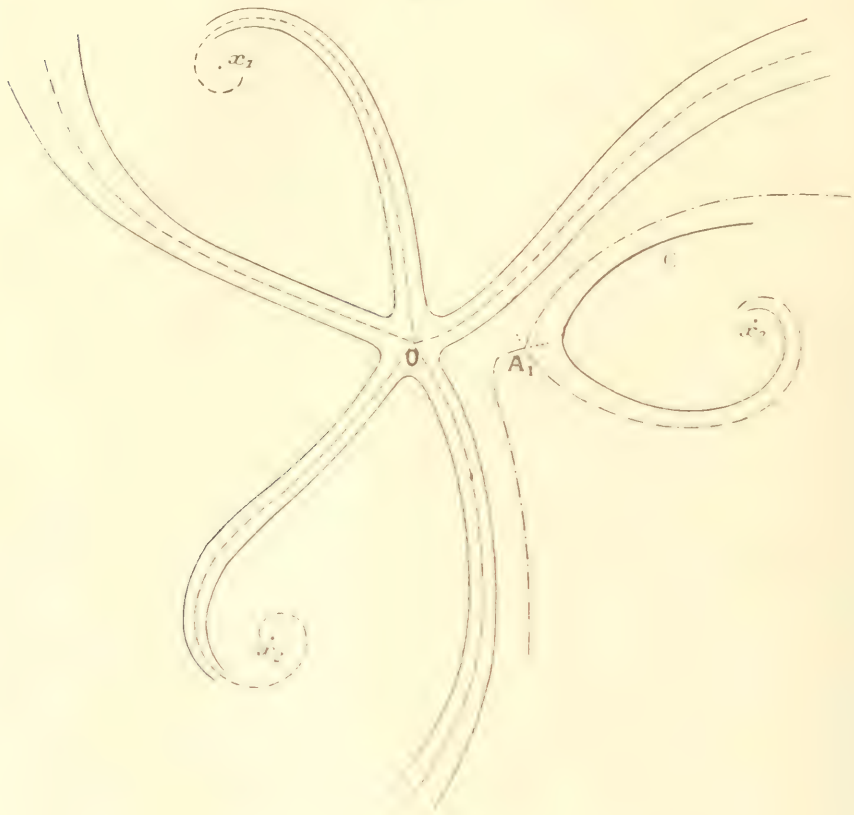
tout en ne commettant d'ailleurs qu'une erreur relative très petite; or cette dernière équation est du type étudié aux n^os **11-12**. Revenant alors à la variable x, on obtiendra, pour la courbe $\mathcal{C}'$, un tracé tel que le suivant (*fig.* 15, p. 186; ce tracé se rapporte au cas de $m = 2$, $n = 3$, $l = 1$ qu'on rencontrera plus loin, n° **53**). On a figuré en traits ponctués (- - -) la courbe $\mathcal{C}_0$, en traits mixtes (-·-·-) la courbe $\mathcal{C}'_{C_h}$ passant par A_h (ici $h = 1$) : en traits pleins (——) une courbe $\mathcal{C}'_C$ où C est quelconque; du reste, on s'est borné aux portions de ces courbes que nous aurons à utiliser (et, pour $\mathcal{C}'_{C_h}$, au voisinage du point A_h).

Il serait d'ailleurs aisé de multiplier les figures telles que la précédente; quelles que soient leurs particularités, le point important que nous voulons faire ressortir sur chacune d'elles, c'est *l'existence de* l *arcs de la seconde catégorie* (tels que C sur la figure) *qui sont à une distance de l'origine de l'ordre de* $|\varepsilon_1^{\frac{1}{l}}|$ *au moins*. Il en

[1] A_h est d'ailleurs un foyer pour $m+1$ autres branches de $\mathcal{C}_0$.

résulte que, lorsque ε n'est pas très petit, la figure jouit de propriétés analogues à celles des n^{os} **12**, **16**, **18**, et l'on pourra utiliser les courbes $\mathcal{L}'$ pour diviser la région normale en mn secteurs canoniques Γ, exactement analogues à ceux qu'on a introduits

Fig. 15.



plus haut (n° **22**). Mais, *lorsque* ε *tend vers* o, *les arcs de la seconde catégorie finissent par sortir de la région normale pour s'éloigner indéfiniment;* nous appellerons *intégrales évanouissantes* les intégrales canoniques correspondantes. Pour $|\varepsilon|$ suffisamment petit, la région normale ne peut donc plus être balayée que par $mn - l$ arcs $\mathcal{L}'$ (de la première catégorie); et l'on ne pourra calculer par

approximations successives [1] que $mn - l$ intégrales, en tout, à l'intérieur de la région normale; chacune d'elles, d'ailleurs, sera canonique pour l'un des x_h ou x_∞, et sera définie dans un secteur ∇' déterminé de (s).

Effectivement, nous allons montrer qu'à la limite, *le procédé des approximations successives ne fournit plus que $mn - l$ intégrales pour l'équation-limite* (E'); on vérifierait d'ailleurs sans difficulté que, dans (s), les intégrales de (E') convergent uniformément vers celles de $(\overline{\mathrm{E}}')$, et que, de même, les secteurs ∇' convergent vers les secteurs $\overline{\nabla}'$ qui jouent un rôle analogue pour $(\overline{\mathrm{E}}')$.

33. L'ÉQUATION-LIMITE $(\overline{\mathrm{E}}')$. — Pour intégrer l'équation $(\overline{\mathrm{E}}')$, nous opérerons comme au n° **18**, pour $(\overline{\mathrm{E}})$. Écrite actuellement pour $(\overline{\mathrm{E}}')$, l'équation (28) du n° **18** possède m racines $\Pi_1, \ldots, \Pi_m$ dont le développement dans le voisinage de x_∞ procède suivant les puissances décroissantes de $x^{\frac{l}{m}}$ $\left(\text{c'est-à-dire de } x^{\frac{1}{m}}\right)$; et ces racines forment un seul système circulaire. Arrêtons chacun de ces développements aux termes en x^{-1} (inclus) et appelons $\overline{\varpi}_1, \ldots, \overline{\varpi}_m$ les m développements ainsi limités (rationnels en x et $x^{\frac{1}{m}}$). Un raisonnement identique à celui du n° **18** montre que $(\overline{\mathrm{E}}')$ pourra s'écrire

$$(\overline{\mathrm{E}}'_1) \qquad \overline{\mathrm{F}}(y) = \frac{1}{x^2}\left[\mathrm{C}_1 y^{(m-1)} + \ldots + \mathrm{C}_m y\right],$$

l'équation $\overline{\mathrm{F}}(y) = 0$, à coefficients rationnels en x, admettant pour intégrales les expressions $e^{\int \overline{\varpi}_i dx}$, et les C_ν rationnels en x, étant, pour $x = \infty$, d'ordre inférieur à $(\nu - 1)\left(n - 1 - \frac{l}{m}\right) + 1$.

On pourra donc intégrer (E'_1) par l'algorithme d'approximations successives du n° **18**, à condition d'adopter comme chemin

[1] En écartant les paracanoniques. On observera, d'ailleurs, que les τ forment un polygone convexe.

d'intégration l'une des branches de la courbe

$$(\mathcal{L}') \qquad r^{n-\frac{l}{m}} \cos\left[\left(n-\frac{l}{m}\right)\delta + \delta_1\right] = C_1,$$

qui, pour δ_1 et C_1 convenablement choisis, est la limite des courbes $\mathcal{L}'$ dans la région (s). Or la courbe $\overline{\mathcal{L}}'$ se compose de $mn - l$ branches égales et qui (sauf pour $n = 1$) admettent pour asymptotes $mn - l$ droites, issues de l'origine, et faisant entre elles des angles égaux à $\pi : n'$, en posant

$$n' = n - \frac{l}{m}.$$

Quant au sens de parcours à adapter sur la branche envisagée, il sera encore donné par les inégalités (20), (22) dans lesquelles β_{jk} désigne actuellement l'argument du vecteur $\overrightarrow{s'_j s'_k}$, s'_j étant (comme σ_j pour ϖ_j, ou s_j pour l'expression $\overline{\varpi}_j$ du n° **18**) le coefficient de la plus haute puissance de x dans ϖ'_j, c'est-à-dire $e^{\frac{\pi}{m}}$, d'après notre convention sur $a'^{m}_{m(n-1)-l}$. Les s'_j formeront donc *un polygone convexe;* on pourra donc toujours choisir δ_1 et C_1 de telle sorte que sur la branche adoptée de $\mathcal{L}'$, les quadratures figurant dans les approximations successives soient effectuées *toutes dans le même sens. Les intégrales ainsi obtenues constitueront évidemment les limites des intégrales canoniques du n° 32.*

Il est aisé de déterminer les frontières du secteur canonique-limite $\overline{\nabla}'$ dans lequel chacune de ces intégrales peut être calculée : en effet, on a actuellement (*cf.* n° **22**)

$$\gamma' = \frac{\pi}{n} + \frac{(2j-1)\pi}{mn},$$

et, d'après (29), le secteur ∇' sera défini par les inégalités

$$-\frac{(2j+1)\pi}{mn} + \frac{\gamma_1}{n} + \frac{(2h-1)\pi}{n} < \delta < -\frac{(2j-1)\pi}{mn} + \frac{\gamma_1}{n} + \frac{2h\pi}{n}.$$

En définitive, on saura donc calculer [1] $mn - l$ intégrales de

[1] En partant d'un même point s_1 et en donnant successivement à h les valeurs $1, \ldots, mn - l$, on obtiendra $mn - l$ intégrales et $mn - l$ secteurs du type

$(\overline{E}')$, qui convergeront, chacune, dans un secteur d'amplitude voisine de $\frac{2(m+1)\pi}{mn-l}$, et, par suite, en tout point x, suffisamment éloigné (et n'appartenant pas à des échancrures analogues à celles du n° **17**), on connaîtra $m+1$ intégrales liées par une relation linéaire à coefficients constants. Leur ensemble constituera un système $(\overline{S}')$ de $mn-l$ relations, de forme analogue à (52 *bis*), et que nous appellerons encore les relations de structure du point irrégulier (que nous dirons encore de rang n); nous allons montrer comment on peut utiliser ces relations dans la recherche des valeurs-limites des invariants de seconde espèce du groupe de monodromie de (E').

54. Limites des invariants du groupe de monodromie de (E'). — Soit (S) le système des mn relations à coefficients constants qu'on a appris à calculer pour (E') au n° **25**. Moyennant une transformation linéaire [1] sur les équations de (S), on peut toujours supposer qu'il se décompose en deux groupes de relations : l'un, (S_1), formé de $mn-l$ relations qui, à la limite,

---

précédent. Il pourrait donc sembler que, en procédant de même avec chaque point s'_j, on devrait obtenir en tout $m(mn-l)$ intégrales et $m(mn-l)$ secteurs. Mais il faut remarquer que l'ensemble d'intégrales (et de secteurs) qu'on aura ainsi formé *sera le même quel que soit le point s'_j d'où l'on sera parti*. En effet, m et l étant premiers entre eux, l'ensemble des entiers $2hm-2j$, où j est fixe, tandis que h varie de 1 à $mn-l$ forme un système complet par rapport au module $mn-l$ $(=mn')$; les frontières des secteurs ∇ sont donc indépendantes de la valeur attribuée à j. Supposons alors que les deux couples (h_1, j_1), (h_2, j_2) conduisent au même arc $\mathcal{L}'$ et au même secteur ∇'. En tout point de $\mathcal{L}'$, les arguments de $x^{n'} = x^{\frac{n}{m}}$ différeront de $2(h_2-h_1)\pi - \frac{2(j_2-j_1)\pi}{m}$; la racine $e^{\frac{2j_1\pi i}{m}} x^{n'}$, introduite par ϖ et figurant au premier calcul, aura bien même argument que la racine analogue $e^{\frac{2j_2\pi i}{m}} x^{n}$ du second calcul. Les deux intégrales, provenant de quadratures successives étendues au même arc, et portant sur des fonctions identiques, seront donc identiques sur cet arc, et, par suite, sur le secteur qu'il balaie.

[1] *Cf.* la transformation analogue du n° **25** (note [2] de la p. 162).

tendent vers les $mn - l$ relations de $(\overline{S'})$; l'autre, (S_2), composé de l relations dont chacune contient une des l intégrales évanouissantes. Calculons alors pour les équations de (S_1) toutes les combinaisons K'_{jh} (n° **24**) qui sont distinctes les unes des autres lorsqu'on ne tient pas compte de la relation (31); ces combinaisons sont au nombre de $(m-1)(mn-l-1)$. Considérées comme des invariants du groupe (G) de (E'), elles ne seront d'ailleurs pas toutes distinctes; mais leurs valeurs-limites, pour $\varepsilon = 0$, se retrouveront dans les combinaisons analogues qu'on obtiendrait au moyen des équations de (S'); enfin, appliqué à (S_2), le même procédé fournirait encore un système de $(m-1)l$ combinaisons analogues aux K'_{jh}.

Mais nous n'avons pas encore tenu compte de la relation (31). Or, en un point quelconque x, de (s), choisissons, d'une façon quelconque, m intégrales parmi les $m+1$ qu'on sait y calculer; puis décrivons, à partir de x, un circuit fermé quelconque, intérieur à (s), et entourant le point O, de façon à traverser tous les secteurs ∇. Lorsqu'on sera revenu en x, après avoir décrit le circuit, les m déterminations primitives de ces intégrales auront été remplacées par m déterminations nouvelles qu'on peut calculer en fonction des premières, soit au moyen du système (S_1), soit au moyen de la relation (31). Comme au n° **24**, cela nous fournira $m(m-1)$ relations entre les invariants provenant de (S_1), et, pour $\varepsilon = 0$, ces relations tendront vers des limites bien déterminées. Nous obtiendrons donc ainsi pour l'équation (E') $(m-1)[m(n-1)-l-1]$ invariants de seconde espèce tendant vers des limites bien déterminées, qu'on calculera d'ailleurs par l'application d'un procédé analogue aux relations (S') de (E'). Enfin, joints aux précédents, les $l(m-1)$ invariants provenant de (S_2) viendront compléter le système des $(m-1)[m(n-1)-1]$ invariants de deuxième espèce qui ont été définis au n° **24**.

Ces invariants proviennent de relations entre des intégrales évanouissantes de (E'); pour $|\varepsilon|$ suffisamment petit, ils ne pourront plus être évalués au moyen d'un calcul par applications successives effectué à l'intérieur de la région normale (S).

En résumé, lorsque (E') tend vers (E'_0), *il n'existe que* $(m-1)[m(n-1)-l+1]$ *invariants de deuxième espèce* [1] *de* (E') *dont on puisse évaluer les limites par des calculs analogues, effectués sur les relations de structure du point irrégulier de l'équation-limite* (E'_0) [2].

55. Le problème de Riemann généralisé. Retour aux équations nouvelles de M. Painlevé. — Les considérations que nous avons développées aux nos **23** et **54** nous conduisent, tout naturellement, à généraliser le problème de Riemann pour une équation linéaire quelconque.

Nous l'énoncerons de la façon suivante :

Soit

$$(\mathcal{E}) \qquad A_0 y^{(m)} + A_1 y^{(m-1)} + \ldots + A_m y = 0$$

une équation linéaire dont les coefficients sont des polynomes de formes données, et *qui possède*, par conséquent, *des singularités* (*régulières ou* irrégulières) *de nature donnée. Peut-on choisir les coefficients de ces polynomes de telle sorte que les invariants du groupe de monodromie de* $(\mathcal{E})$ *et de ses points irréguliers aient des valeurs données ?*

Les résultats que nous avons obtenus montrent que le problème de Riemann généralisé n'est, au fond, qu'un *cas-limite* du problème primitif; il n'existe entre ces deux problèmes aucune différence spécifique : on peut donc regarder comme extrêmement probable que la solution du problème classique de Riemann

---

(1) Au sujet des invariants de première espèce, on se reportera aux remarques du no **25**.

(2) On étendrait aisément au cas actuel les résultats des nos **27** et **28**. Ajoutons encore qu'on pouvait envisager (E'_0) comme la limite de (E') (no **31**), pour cette dernière équation, l'hypothèse fondamentale est réalisée. On aurait traité le passage à la limite en introduisant comme chemins d'intégration les courbes $\mathcal{C}$ du no **32**. Mais l'interprétation des résultats aurait été moins simple par cette voie que par celle que nous avons suivie.

entraînera comme conséquence naturelle celle du problème généralisé.

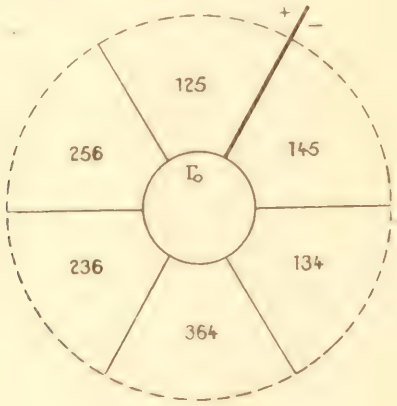
Bien entendu, il ne saurait être question, ici, d'aborder la solution de ces problèmes. Je voudrais seulement montrer comment, en cherchant à résoudre dans un cas particulier le problème de Riemann généralisé, on se trouve ramené, presque aussitôt, aux équations nouvelles de M. Painlevé.

Considérons donc une équation linéaire (E), d'ordre $m = 2$, possédant un seul point effectivement singulier, soit $x = x_0$, de rang $n = 3$; l'hypothèse fondamentale du n° **7** étant d'abord supposée réalisée, il existera actuellement six intégrales normales y^i (*cf.* n° **27**); pour abréger l'écriture, posons

$$y_1^1 = y_1, \quad y_1^2 = y_2, \quad y_1^3 = y_3, \quad y_2^1 = y_4, \quad y_2^2 = y_5, \quad y_2^3 = y_6.$$

La région illimitée $(\tilde{s})$ sera divisée en six secteurs à l'intérieur de chacun desquels on connaîtra trois intégrales y_i dont les indices

Fig. [illegible]



sont donnés par le schéma ci-dessus [1]. En se reportant aux remarques du n° **27**, on pourra donc écrire les relations de struc-

[1] Pour simplifier, on a supprimé les échancrures.

ture du point irrégulier sous la forme suivante [1] :

$$(49)\qquad \begin{cases} y_2 - y_1 = a_5 y_5, & y_5 - y_1 = a_4 y_4, \\ y_3 - y_2 = a_6 y_6, & y_6 - y_1 = a_4 y_4, \\ y_1 - y_3 = a_4 y_4, & y_5 - y_3 = a_6 y_6. \end{cases}$$

Quant aux invariants indépendants du point irrégulier, ils sont au nombre de $(m-1)[m(n-1)-1] = 3$; pour ces invariants, on pourra adopter les valeurs des produits

$$a_2 a_5, \quad a_2 a_6, \quad a_4 a_6.$$

Cela étant, posons-nous la question suivante : *Peut-on choisir pour les coefficients $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, figurant dans* (E) (n° **6**), *des fonctions d'un paramètre t telles que, quelle que soit la valeur attribuée à t, les invariants du point irrégulier aient des valeurs fixes, données une fois pour toutes ?*

Or, moyennant la substitution $y_i | \lambda_i y_i$ effectuée sur les

$$y_i \qquad (i = 4, 5, 6),$$

on peut toujours supposer que a_5, a_6, a_4 sont indépendants de t; a_1, a_2, a_3 devront donc être, aussi, indépendants de t. Déterminons alors deux fonctions de x, $A(x)$ et $B(x)$ par les relations

$$(50)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = A y_1 + B \dfrac{dy_1}{dx}, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = A y_2 + B \dfrac{dy_2}{dt}. \end{cases}$$

Le point x_z étant la seule singularité effective de (E), les seuls points singuliers que $A(x)$ et $B(x)$ peuvent admettre à distance finie sont des pôles [à savoir : les points apparemment singuliers de (E)]. De plus, les relations (50) montrent que, x s'éloignant à

[1] Si l'on trace une coupure entre les secteurs (14) et (15) (*pg.* 15), les symboles y_1 et y_2 figurant dans la première (dernière) ligne de (49) représenteront les valeurs de ces intégrales sur le bord positif (négatif) de la coupure. On sait d'ailleurs qu'on n'a pas à faire état des relations de la dernière ligne, par exemple pour le calcul des invariants du point irrégulier. (*cf.* n° **25**, note de la p. 115).

l'infini en restant dans les secteurs (125), (256), $A(x)$ et $B(x)$ se comportent comme des polynomes. Cela ne suffirait pas d'ailleurs pour qu'on puisse affirmer que $A(x)$ et $B(x)$ sont rationnelles; mais *en vertu des équations* (49), OÙ LES PRODUITS $a_i a_j$ SONT INDÉPENDANTS DE t ($i = 3, j = 4$), *l'assertion relative à* (125) *et* (256) *s'étend de proche en proche à tous les secteurs :* $A(x)$ et $B(x)$ sont donc bien des *fonctions rationnelles de* x.

Nous sommes alors ramenés au problème suivant, résolu dans ma Thèse [1], sous des hypothèses plus générales :

Étant donnée une équation linéaire du second ordre

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = p(x) y, \tag{51}$$

possédant un seul point effectivement singulier, $x = x_0$, choisir pour les coefficients de la fonction rationnelle $p(x)$ des fonctions d'un paramètre t telles qu'on puisse adjoindre à (51) une relation linéaire

$$\frac{\partial y}{\partial t} = A y + B \frac{\partial y}{\partial x}$$

formant avec elle un système complètement intégrable.

Il suffit de se reporter aux résultats que j'ai obtenus (*loc. cit.*) pour aboutir à la conclusion suivante : Si l'équation (E) ne possède aucun point apparemment singulier, le problème est impossible [car les invariants ne pourront être indépendants du paramètre t que si celui-ci ne figure pas dans la fonction $p(x)$]. Supposons donc qu'il y ait un point apparemment singulier, $x = \lambda$; on trouve alors

$$A(x) = \frac{1}{4(x-\lambda)}, \qquad B(x) = \frac{1}{2(x-\lambda)},$$

et $B(x)$ doit vérifier l'équation

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - 4p \frac{\partial B}{\partial x} - 2\frac{\partial p}{\partial x} B - 2\frac{\partial p}{\partial t} = 0.$$

On en déduit aisément que, moyennant des transformations

---

(1) *Ann. sc. École Normale supérieure*, 3e série, t. XXIX, 1912, p. 39.

simples sur x, y, λ, et un changement de variable sur t, on peut écrire

$$p(x) = p_{\mathrm{II}}(x) = x^3 - \lambda^3 + t(x^2 - \lambda^2) + 2c(x - \lambda) + \frac{3}{4(x-\lambda)^2} - \frac{\lambda}{x-\lambda} + \lambda^2,$$

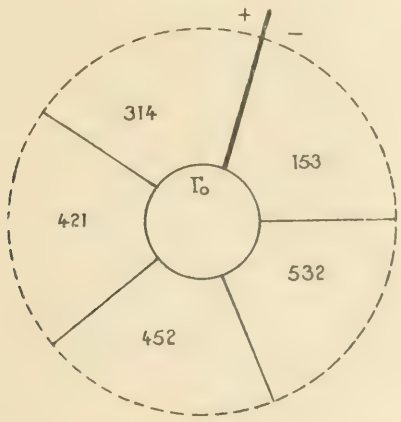
avec $\lambda' = \frac{d\lambda}{dt}$, et λ étant une intégrale de l'équation

$$\lambda'' = 2\lambda^3 + t\lambda + c,$$

qui n'est autre que l'équation (II) de M. Painlevé. On voit ainsi que l'équation $(\bar{\mathrm{E}})$, que nous appellerons $(\mathrm{E}_{\mathrm{II}})$, dépend de trois constantes : c, et les deux constantes arbitraires qui figurent dans l'expression de l'intégrale générale de (II). Résoudre le problème généralisé de Riemann pour l'équation $(\mathrm{E}_{\mathrm{II}})$ reviendrait à établir qu'*on peut toujours disposer de c et des constantes d'intégration de* (II) *de telle sorte que les invariants du point x_∞ aient des valeurs données.*

On aboutit à des résultats entièrement analogues lorsque l'hypothèse fondamentale du n° **7** n'est plus réalisée : on est alors

Fig. 17.



dans le cas du n° **51**, avec $m = 2$, $n = 3$, $l = 1$. Bornons-nous à l'énoncé des résultats.

La région $(\bar{s})$ est alors divisée en cinq secteurs, et l'on connaît cinq intégrales canoniques y_i. Le schéma ci-dessus montre qu'à l'intérieur de l'un de ces secteurs on peut calculer trois intégrales;

l'ensemble des relations de structure qui lient ces intégrales trois à trois peut s'écrire

$$\begin{aligned}
y_2 - y_1 &= a_1 y_4,\\
y_3 - y_2 &= a_2 y_4,\\
y_4 - y_3 &= a'_1 y_1,\\
y_4 - y_1 &= a'_2 y_2,\\
y_4 - y_2 &= a'_3 y_3,
\end{aligned}$$

et, actuellement, il n'y a plus que deux invariants (n° **34**), $a_1 a'_4$ et $a'_2 a'_4$ par exemple. Cherchons maintenant à résoudre pour l'équation linéaire correspondante le problème analogue à celui que nous avons traité pour l'équation précédente; $A(x)$ et $B(x)$ conservent leurs expressions antérieures, mais on a cette fois, moyennant un choix convenable des variables,

$$p(x) = p_1(x) = 4(x^3 - \lambda^2) + 2t(x - \lambda) = \frac{1}{4(x-\lambda)} - \frac{\lambda}{x-\lambda} + \lambda^2,$$

λ satisfaisant à l'équation

$$\lambda^3 = 6\lambda^2 + \lambda,$$

qui est l'équation (I) de M. Painlevé. Pour résoudre le problème de Riemann pour l'équation (E') correspondante, que nous appellerons (E_I), il faudrait donc montrer qu'on peut choisir une intégrale de (I) telle que $a'_1 a'_4$ et $a'_2 a'_4$ (par exemple) aient des valeurs arbitrairement données [1].

Inversement, si l'on quitte le domaine des équations linéaires

---

[1] On peut d'ailleurs déduire les résultats relatifs à E_I de ceux qu'on a établis pour E_{II}. Effectivement, faisons dans E_{II} la substitution

$$t = \frac{6}{\varepsilon^{10}} - \varepsilon^2 t, \quad \lambda \left| \frac{1}{\varepsilon^2} \right. = \varepsilon\lambda, \quad x \left| \frac{1}{\varepsilon^2} \right. = \varepsilon x, \quad c \left| \frac{1}{\varepsilon^{10}} \right. = c\varepsilon^2.$$

E_{II} deviendra

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} = \varepsilon^2\{x^3 - \lambda^2 + t(x^2 - \lambda^2) + 2c(x - \lambda)\} + p_1(x),$$

et, pour $\varepsilon = 0$, tendra vers E_I. C'est précisément le passage à la limite de $(\overline{E'})$ à (E') (n° **31**).

pour celui des équations de M. Painlevé, les résultats précédents peuvent être interprétés de la façon suivante :

Les coefficients de p_{II} étant des fonctions de λ', λ, t, on peut dire que *l'équation* (II) *admet les deux intégrales premières* $a_2 a_5 = \text{const.}$, $a_2 a_6 = \text{const.}$ (où les premiers membres sont des fonctions de λ' λ, t); de même, (I) *admet les deux intégrales premières*

$$a_1 a_4 = \text{const.}, \qquad a'_1 a'_4 = \text{const.}$$

Si l'on préfère, on peut encore énoncer les résultats précédents sous une forme un peu différente. Posons

$$\Omega_i = \frac{1}{y_i}\frac{dy_i}{dx}$$

(la notation s'appliquant à E_{I} et E_{II}); le rapport anharmonique

$$\alpha = (\Omega_{i_1}, \Omega_{i_2}, \Omega_{i_3}, \Omega_{i_4})$$

est indépendant de x; les relations de structure permettent évidemment de l'exprimer au moyen des a_i (ou des a'_i) : mais, comme α ne change pas quand on multiplie les y_i par des facteurs quelconques (indépendants de x), il ne peut dépendre que des invariants du point irrégulier : c'est d'ailleurs ce que vérifie aisément un calcul direct. On peut donc énoncer la proposition suivante :

L'équation (II) (*ou* I) *admet pour intégrales premières deux des rapports anharmoniques formés au moyen des dérivées logarithmiques des intégrales normales* y_i (calculées d'ailleurs en un point quelconque).

Observons enfin que *l'application des remarques du n° 29 nous ramènerait aussitôt aux quatre autres équations nouvelles de M. Painlevé.* En effet, on peut envisager l'équation linéaire (E_{II}) comme une forme dégénérée d'une équation linéaire pourvue :

1° De quatre singularités régulières;

2° Ou, de deux singularités régulières, et d'une, irrégulière, de rang 1;

3° Ou, d'une singularité régulière, et d'une, irrégulière, de rang 2;

4° Ou, de deux singularités irrégulières de rang 1,

et, en outre, dans chaque cas, d'un point apparemment singulier. Effectivement, les quatre équations linéaires que j'ai données dans ma Thèse (p. 51-52) répondent, chacune, à l'une des quatre conditions précédentes; à chacune d'elles correspond l'une des équations irréductibles dues à M. Painlevé et à M. Gambier, à savoir : les équations (VI), (V), (IV) et (III) en conservant l'ordre adopté tout à l'heure. Chacune de ces équations irréductibles joue pour un problème de Riemann (classique ou généralisé) le même rôle que l'équation (II) (ou I) pour les problèmes généralisés que nous avons posés plus haut, et les résultats acquis pour ces deux dernières équations s'étendent aisément aux quatre autres. Ainsi, on peut dire que :

Chacune des six équations irréductibles de M. Painlevé admet comme intégrale première tout invariant du groupe de monodromie ou d'un point irrégulier de l'équation linéaire associée ; ou encore, si l'on préfère : *l'équation irréductible admet comme intégrale première tout rapport anharmonique formé au moyen des dérivées logarithmiques de quatre intégrales (canoniques ou normales) de l'équation linéaire associée.*

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

1 à 5. Introduction ..... [illegible]

PREMIÈRE PARTIE.

LES CHEMINS D'INTÉGRATION Σ_h^h.

6. Les équations $(\overline{E})$ et (E) 111
7. Transformation de l'équation (E) ..... [illegible]
8. Établissement d'un algorithme d'approximations successives 115
9. Convergence des approximations ..... [illegible]
10. La condition a ..... [illegible]
11. La spirale Σ ..... [illegible]
12. La courbe $\mathcal{L}$ ..... [illegible]
13. Les chemins $\mathcal{L}_h^h$ ..... [illegible]
14. La condition b ..... [illegible]
15. Expression des intégrales $y_j(x)$ au moyen des intégrales canoniques. Intégrales paracanoniques ..... [illegible]

DEUXIÈME PARTIE.

LES SECTEURS Δ ET ∇.

16. Les faisceaux $\{\mathcal{L}^h\}$ ..... [illegible]
17. Les secteurs Δ ..... [illegible]
18. Extension de la théorie à l'équation (E) ..... [illegible]
19. Convergence des intégrales de (E) vers celles de (E). Secteurs ordinaires ..... [illegible]
20. Secteurs mixtes ..... [illegible]
21. Retour aux intégrales canoniques. Le polygone de sustentation Π ..... [illegible]
22. Les secteurs canoniques ∇_{ih} ..... [illegible]
23. Recouvrement de la région normale $\{S\}$ par les secteurs canoniques ∇_{ih} ..... [illegible]

TROISIÈME PARTIE.

LES RELATIONS DE STRUCTURE DU POINT IRRÉGULIER.

Pages.

24. Les invariants du groupe de monodromie d'une équation linéaire 166
25. Les relations de structure et les invariants du point irrégulier de (E) : cas où les s_j forment un polygone convexe 169
26. Cas où le polygone des s_j n'est pas convexe 174
27. Les intégrales normales asymptotiquement équivalentes de (E). Leur origine. 167
28. Les lignes de zéros de l'intégrale générale de (E) 169

QUATRIÈME PARTIE.

GÉNÉRALISATIONS ET APPLICATIONS.

29. Généralisation du problème primitif. 172
30. Les loxodromies des facteurs primaires d'Weierstrass. 174
31. Cas où l'équation caractéristique a des racines égales : les équations (L) et (L') . 179
32. Les chemins d'intégration $\mathcal{L}'$ 182
33. L'équation limite (L') 187
34. Limites des invariants du groupe de monodromie de (L') 189
35. Le problème de Riemann généralisé. Retour aux équations nouvelles de M. Painlevé 196

La notion d'énergie utile de la Thermodynamique;

PAR UMBERTO CRUDELI.

I. Beltrami, dans une Note parue, en 1895, dans les *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei* (1) montrait (se maintenant, pourtant, simplement dans le champ de la réversibilité) comment on pouvait établir une notion d'énergie utile (mécaniquement utile) d'un système thermodynamique, même en regard aux évolutions non isothermes, dont il déterminait le type.

Les résultats obtenus par Beltrami dans cette Note, susceptibles, comme nous le verrons, d'être obtenus plus simplement [résultats échappés, à ce que nous en savons, aux auteurs de Thermodynamique (2)] méritent d'être complétés et réunis aux vues modernes traitant ces questions, au moins pour éclaircir et systématiser certains points, reconnaissant, en même temps, la contribution apportée, à cet égard, par cet insigne mathématicien italien.

Nous supposerons (comme le suppose Beltrami, duquel, pourtant

(1) *Sui potenziali termodinamici*, p. 173 (1er semestre).

(2) Par exemple, dans le deuxième volume (paru en 1911) du Traité classique de Thermodynamique de Duhem (*Traité d'Énergétique ou de Thermodynamique générale*), où se trouve (p. 37) la notion d'énergie utile, avec une Note historique-bibliographique sur le sujet, il n'existe aucun rappel du travail de Beltrami.

Dans le cours de suppléance à la chaire de Physique mathématique près de l'Université de Rome, ayant eu l'occasion de développer, pendant deux années consécutives, la Thermodynamique, il m'a paru que, même en ce qui concerne la didactique, il convenait d'introduire, de la manière que nous verrons ensuite, les notions d'énergie utile (dite aussi libre) et d'énergie liée, énergies que j'appellerai respectivement *énergie physique potentielle interne* (la première) et *énergie thermique* (la deuxième).

nous ne suivrons pas le procédé démonstratif qu'il s'agit d'un système thermodynamique, dont l'état générique soit déterminé par un ensemble fini de paramètres indépendants $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \theta$.

Parmi ceux-ci, θ désignera la température absolue (uniforme) du système lui-même, pendant que les autres représenteront n variables normales qui seront désignées collectivement par φ. Cela posé, nous rappelant que la définition du système est supposée normale, nous verrons alors que l'expression du travail élémentaire dL, exécuté sur le système par les forces externes, sera

$$dL = \sum_{r=1}^{n} p_r \, d\varphi_r$$

où p_r représente l'action externe correspondant au paramètre φ_r. Et, considérant le potentiel thermodynamique G du système, c'est-à-dire $G(\varphi, \theta) = U(\varphi, \theta) - \theta S(\varphi, \theta)$, où U représente l'énergie interne de la Thermodynamique et S l'entropie, nous aurons, comme conditions d'équilibre thermodynamique du système lui-même [1],

$$\frac{\partial G}{\partial \varphi_r} = p_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n);$$

à ces relations on doit unir la relation supplémentaire, qui porte à $n + 1$ (autant que les paramètres φ, θ) le nombre des équations pour la recherche des états d'équilibre.

Or, l'investigation de Beltrami peut se traduire par la suivante :

Rechercher les fonctions les plus générales u, de θ et φ, et H de φ et u, pour lesquelles on ait identiquement

$$\frac{\partial G}{\partial \varphi_r} = \frac{\partial H}{\partial \varphi_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

où $\frac{\partial}{\partial \varphi_r}$ est symbole de dérivation explicite.

Beltrami (se maintenant simplement, comme nous l'avons déjà dit, dans le champ de la réversibilité) notait que la fonction H a vraiment l'office d'énergie libre (dite aussi utile) seulement

[1]) Duhem, *loc. cit.*, vol. I, p. 399.

pour les évolutions thermodynamiques satisfaisant à une relation $u =$ const. Que l'on observe que, pour $du = 0$, résultera

$$\sum \frac{\partial H}{\partial v_r} dv_r = dH;$$

donc, en correspondance aux évolutions du type susdit, nous aurons

$$dL = dH.$$

En supposant que, dans ces évolutions, ne soient pas comprises les isothermes, pour lesquelles, comme il est bien connu, c'est la G qui a le rôle d'énergie libre, nous supposerons que u contient au moins une v.

Or, pour que les équations (1) subsistent, nous devrons avoir

$$\frac{\partial (H - G)}{\partial v_r} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

c'est-à-dire

$$H - G = \text{fonction de } \theta \text{ et de } u \text{ seulement.}$$

Et ceci quelles que soient (arbitrairement) les valeurs de θ et de u, étant supposé que u contient au moins une v. Nous désignerons par $\psi(\theta, u)$ cette fonction de θ et de u. Donc, observant que $dH = 0$, il résulte qu'on devra avoir

$$(2) \qquad -\frac{\partial G}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}.$$

Mais, ainsi qu'il est bien connu,

$$-\frac{\partial G}{\partial \theta} = S;$$

donc

$$S = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}.$$

Maintenant il faut distinguer deux cas, dont, premièrement, nous considérons le suivant (omis par Beltrami) :

Soit S fonction de θ seulement, c'est-à-dire [suivant une dénomination de Duhem [1]] le système isothermo-isentropique. Cas

[1] *Loc. cit.*, vol. I, p. 375.

que l'on doit aussi considérer, dans un traitement complet, bien que, à ce qu'il semble, les systèmes isothermo-isentropiques soient d'un faible intérêt pratique [1]. Alors nous aurons

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = h(\theta),$$

d'où

$$\psi = h(\theta) + k(u).$$

Mais, pour les systèmes isothermo-isentropiques, on a, ainsi qu'il est connu,

$$G = \Phi(v) + W(v);$$

et alors, ayant égard à (2), nous pourrons écrire

$$G = -h(\theta) + W(v);$$

à quoi correspondra

$$H = W(v) + k(u). \tag{3}$$

Donc, pour les systèmes isothermo-isentropiques, les relations (1) subsistent indépendamment de chaque type de u, parce que, alors, H est de la forme (3). Cette observation avait échappé à Beltrami, lequel retenait que le travail externe élémentaire, correspondant aux évolutions réversibles, ne pouvait jamais être une différentielle exacte, tandis qu'il y a exception pour le travail exécuté sur les systèmes isothermo-isentropiques. Pour ceux-ci, le travail externe, accompli dans une évolution réversible quelconque, est, comme c'est clair, déterminé par la seule connaissance de W, dans les états initial et final.

Cela étant, il reste à considérer, pour notre recherche, le cas dans lequel S n'est pas fonction de la température seulement. Alors l'égalité

$$S = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

constituera une relation du type (type Beltrami)

$$u = u(\theta, S).$$

---

[1] Duhem, *loc. cit.*, p. 379. Ces systèmes, pourtant, dit Duhem, ont une grande importance théorique, à cause de leur caractère d'exception.

en y comprenant l'éventualité $u = u$ (S). Donc, dans l'hypothèse que le système ne soit pas isothermo-isentropique, la condition que u est du type u (θ, S) (type qui, quand il n'y a qu'une v parmi les paramètres, cesse, évidemment, d'être spécial) est nécessaire pour que l'on ait

$$\frac{\partial G}{\partial v_r} = \frac{\partial H}{\partial v_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Cette condition est aussi suffisante. En effet, ayant supposé précédemment que u contient au moins une v, nous devrons admettre que dans u (θ, S) figure effectivement S, et, par suite, nous pourrons écrire

$$S = f(\theta, u).$$

Donc, désignant $f(\theta, u)$ par $\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$, nous aurons

$$S = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

et, par suite, aussi

$$-\frac{\partial G}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}.$$

Il s'ensuit que la fonction $G + \psi$ que nous pourrons désigner par H ne dépendra pas explicitement de θ. Nous aurons donc

$$G + \psi = H(v, u);$$

d'où (nous rappelant que ψ ne contient pas explicitement v) on déduit

$$\frac{\partial G}{\partial v_r} = \frac{\partial H}{\partial v_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

comme on voulait le démontrer.

Lorsque la fonction u (θ, S) est assignée, nous obtiendrons ψ par l'intégration de l'équation

$$u = u\left(\theta, \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right).$$

La quanitté $H = G + \psi$ fut nommée par Beltrami énergie libre, tandis que Helmholtz nomma G énergie libre. La première peut se

dire inhérente au système par rapport aux évolutions satisfaisant à une relation $u =$ const.; à la seconde, qui peut se dire inhérente au système par rapport, aux évolutions isothermes, on attribue aussi la dénomination d'énergie utile ou d'énergie utilisable (Gouy) (1). Vraiment ces dénominations ne sont pas bien adaptées. Par exemple, l'expression *énergie utile* pourrait faire penser à l'existence d'une énergie utile et d'une énergie inutile, tandis que l'utilité d'une énergie donnée dépend du but pour lequel elle a été considérée. Ainsi il aurait été, semble-t-il, plus opportun de définir H (et d'une manière analogue G par rapport aux évolutions isothermes) *énergie physique potentielle interne* du système par rapport aux évolutions du type Beltrami (type qui peut, éventuellement, ne pas être spécial). Nous en verrons mieux encore la raison dans la suite.

Avec l'aide des résultats précédents, nous concluons :

Outre les systèmes isothermo-isentropiques (systèmes qui admettent une énergie physique potentielle interne indépendamment de tout type d'évolution), n'importe quel autre système thermodynamique admet une énergie physique potentielle interne, pourvu qu'elle se considère telle en regard aux évolutions isothermes ou en regard aux évolutions satisfaisant à une relation du type $u(\vartheta, S) =$ const., type qui, lorsque parmi les variables v il en existe une seule, cesse manifestement d'être spécial (2).

Au type $u(\vartheta, S) =$ const., on entend qu'appartiennent, comme type particulier, les relations $S =$ const., auxquelles satisfont les évolutions isentropiques, qui, dans l'hypothèse de la réversibilité, coïncident toujours avec les adiabatiques.

---

(1) Les raisonnements développés ici pour obtenir H (comme aussi pour ceux employés par Beltrami en dehors de la tractation qu'il adapte au cas isotherme) supposent préalablement que u contient au moins une v, motif pour lequel ces raisonnements excluent la considération des évolutions isothermes, pour lesquelles c'est G, comme on le sait, qui joue le rôle d'énergie utile (ou bien $G + \varphi(u)$, où $u = u(\vartheta)$ et $\varphi(u)$ = fonction arbitraire de u).

(2) Lorsque, pourtant, il n'existe qu'une seule v, nous saurons qu'une relation $u(\vartheta, S) = k$, où k est une donnée constante, représentera l'équation d'une seule évolution.

II. Les conclusions de Beltrami, regardant l'existence d'une énergie utile (énergie physique potentielle interne), subsistent en faisant abstraction de leur origine précédente, même si la notion d'énergie physique potentielle interne d'un système thermodynamique vient à être introduite par rapport aux évolutions non réversibles.

Dans la théorie des évolutions non réversibles effectives (dites aussi réelles), la notion en question peut s'introduire, comme nous le montrerons dans la suite, sans perdre de vue la façon de Beltrami. Façon qui, dans le cas présent, va être modifiée, car maintenant il ne s'agit plus d'évolutions constituées par une suite continue d'états d'équilibre.

Nous définirons, ici même, *énergie physique potentielle interne* du système, par rapport aux évolutions satisfaisant à une relation $u(\theta, S) = \text{const.}$, la quantité $H(\varphi, u_\varphi)$, c'est-à-dire $G + \psi(\theta, u_\varphi)$, déjà considérée précédemment. Et, même ici, ce sera G qui, par rapport aux évolutions isothermes, sera dite énergie physique potentielle interne (ou bien $G + \psi(u)$, où $u = u(\theta)$ et $\psi(u)$ fonction arbitraire de u).

Cela étant, soient : K_0 la force vive du système à l'instant t_0 et K celle à l'instant t, L le travail externe accompli sur le système pendant l'évolution parcourue et R le travail de viscosité correspondant à l'évolution même. Ainsi qu'il est connu, nous aurons [1]

$$(4) \qquad L + R + K_0 - K + G(\tau_0, \theta_0) - G(\tau, \theta) = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{dG(\tau, \theta)}{d\tau} \theta' \, d\tau = 0$$

ayant désigné par G le potentiel thermodynamique et par θ' la dérivée $\frac{d\theta}{d\tau}$.

Or, on se rappelle que

$$\frac{dG}{d\tau} = \frac{d\psi(\theta, u)}{d\tau},$$

dans l'hypothèse, que u contient au moins une φ. Donc, s'il s'agit d'une évolution satisfaisant à une relation du type $u(\theta, S) = \lambda$, où λ

[1] DUHEM, *Traité d'Énergétique*, vol. II, p. [illegible].

est une constante), l'intégrale, qui figure dans (4), deviendra

$$-\int_{\vartheta_0}^{\bar{\vartheta}} \frac{\partial \varphi(\vartheta, \gamma)}{\partial \vartheta} d\vartheta = \varphi(\vartheta_0, \gamma) - \varphi(\bar{\vartheta}, \gamma);$$

de sorte que, alors,

$$-L + \bar{K} - K_0 - B = H(\vartheta_0, \gamma) - H(\bar{\vartheta}, \gamma).$$

S'il s'agit d'une évolution isotherme, ayant alors $\theta' = 0$, nous aurons, à cause de (4),

$$-L + K - K_0 - B = G(v_0, \vartheta_0) - G(\bar{v}, \vartheta_0).$$

S'il s'agit d'un système isothermo-isentropique, ayant alors

$$G = \Phi(\vartheta) + W(v),$$

nous aurons, quel que soit le type de l'évolution,

$$\int_{\vartheta_0}^{\bar{\vartheta}} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} d\vartheta = \Phi(\bar{\vartheta}) - \Phi(\vartheta_0);$$

et alors

$$-L + K - K_0 - B = W(v_0) - W(\bar{v}).$$

Dans tous les cas susdits, comme on le voit, l'énergie physique potentielle se manifeste par un effet, dont la partie $-L + \bar{K} - K_0$, c'est-à-dire l'effet externe, s'appelle *effet mécanique utile*. Cet effet utile, pourtant, ne rappelle pas toujours à l'esprit la notion correspondante de l'industrie où, comme on le sait, existent certaines machines (par exemple : monte-charges), dans lesquelles le vrai effet mécanique utile est représenté seulement par $-L$, et certaines (par exemple les balistiques), dans lesquelles le vrai effet mécanique utile est représenté simplement par $\bar{K} - K_0$.

Ceci dit, voici la conclusion : que, outre les systèmes isothermo-isentropiques (systèmes qui admettent une énergie physique potentielle interne indépendamment de tout type d'évolution) tout autre système thermodynamique admet une énergie physique potentielle interne, pourvu qu'elle se considère telle par rapport aux évolutions isothermes ou par rapport aux évolutions satisfaisant à une relation du type $u(\theta, S) = \text{const.}$, type qui, lorsque les va-

riables φ se réduisent à une seule, cesse manifestement d'être spécial [1]. Au type $u(\theta, S) = \text{const.}$, on entend qu'appartiennent, comme type particulier, les relations $S = \text{const.}$, auxquelles satisfont les évolutions isentropiques.

Lorsque le système n'est pas isothermo-isentropique, observons que, en dehors des évolutions isothermes, les seules évolutions, pour lesquelles l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\partial G}{\partial \theta} \theta' \, d\tau$$

n'est pas une fonction de ligne, sont les évolutions satisfaisant à une relation du type $u(\theta, S, \lambda) = 0$, c'est-à-dire du type $u(\theta, S) = \lambda$, où λ désigne une constante donnée. En effet, si le système n'est pas isotherme-isentropique, nous n'aurons que seulement pour les évolutions du type en question $S = f(\theta, \lambda)$, et alors, désignant cette $f(\theta, \lambda)$ par $\frac{\partial \psi(\theta, \lambda)}{\partial \theta}$, nous pourrons écrire

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\partial G}{\partial \theta} \theta' \, d\tau = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial \psi(\theta, \lambda)}{\partial \theta} d\theta = \psi(\theta_0, \lambda) - \psi(\theta, \lambda).$$

Observons, enfin, que de $H = G + \psi$ et de $G = U - \lambda S$, résulte

$$U = H + \theta S - \psi.$$

Nous appellerons la quantité $\theta S - \psi$ *énergie thermique* du système par rapport aux mêmes évolutions en correspondance auxquelles la H fut définie énergie physique potentielle interne [2].

Maxwell, à ce qu'il semble, aurait, le premier, montré (*Theory of Heat;* Londres, 1871) que l'effet utile relatif à une évolution isotherme ne peut jamais dépasser la diminution d'une certaine quantité (seulement fonction de l'état du système), quantité qu'il

---

[1] Lorsque, pourtant, il n'existe dans f qu'une seule φ, nous saurons qu'une relation $u(\theta, S) = k$, où k est une donnée constante, représentera l'équation d'une seule évolution.

[2] Rappelons-nous que, pour ces évolutions, la somme de la quantité élémentaire de chaleur (en unités mécaniques) cédée par le système et du travail élémentaire de viscosité est égale à $-d(\theta S - \psi)$.

appelait incorrectement entropie. Dans la quatrième édition de la susdite *Theory of Heat*, il adopta la dénomination d'énergie utilisable (*Available Energie*), employée également par Gibbs [1]. Analoguement, Helmholtz appela énergie libre la même quantité $U - \theta S$, et donna le nom d'énergie liée à la quantité θS. Comme on le voit, ces auteurs se limitèrent, pour les notions qui ont fait l'objet de ce travail, seulement à la considération des évolutions isothermes. C'est à Beltrami que l'on doit la plus vaste recherche concernant les notions mêmes (quoique limitées par lui à la réversibilité) dont nous avons déjà parlé.

---

(1) J.-W. Gibbs, *On a Representation by Surfaces of the Thermodynamic Properties of Substances* (*Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences*, vol. II, 1873).

Figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide en rotation. Variation du grand axe avec moment de rotation constant;

PAR ALEX. VÉRONNET.

Une masse liquide homogène peut prendre en tournant la forme d'un ellipsoïde de révolution aplati ou celle d'un ellipsoïde à trois axes. On obtient toutes les figures intermédiaires depuis la sphère jusqu'au disque aplati et à l'aiguille allongée. On a étudié la variation de ces figures avec la variation de la vitesse de rotation ω, ou du moment de rotation $\mu = I\omega$, ou de la densité ρ [1]. Il est intéressant d'introduire dans les formules comme paramètre le grand axe de l'ellipsoïde au lieu de la densité. On obtient alors la *variation de la grandeur des figures*, en même temps que la variation de la forme et l'on peut *calculer les éléments réels* correspondant aux différents cas et aux différentes formes. On fera les calculs numériques pour une masse analogue à la Terre.

I. — Ellipsoïde de révolution homogène ou ellipsoïdes de Maclaurin.

Pour les ellipsoïdes de révolution aplatis on a les formules

$$(1) \qquad h = \frac{\omega^2}{2\pi f \rho} = \frac{3 + l^2}{l^3} \operatorname{arc\,tang} l - \frac{3}{l^2}, \qquad 1 + l^2 = \frac{a^2}{b^2},$$

$$(2) \qquad k = \frac{50\,\mu^2}{3 f M^3}\left(\frac{4\pi\rho}{3M}\right)^{\frac{1}{3}} = 4h(1 + l^2)^{\frac{1}{3}}.$$

[1] M. Appell a fait son cours d'avant guerre sur la question générale des figures d'équilibre d'un liquide homogène en rotation, en publication chez Gauthier-Villars. Un intéressant résumé en a paru dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1919. On y trouvera les formules et les résultats connus.

où a est le rayon équatorial et b le rayon polaire, correspondant à l'axe de rotation. M représente la masse. Si l varie de 0 à l'infini, la figure passe de la sphère à celle d'un ellipsoïde de plus en plus aplati. La valeur de h part de 0 pour retourner à 0 en passant par un maximum égal à 0,224 pour $l = 2{,}53$. La valeur de k, au contraire, part de 0 et croît indéfiniment.

Si l'on considère la densité ρ comme constante, la première formule indique que la vitesse de rotation croît d'abord jusqu'à un maximum pour décroître ensuite. Au-dessous du maximum, il y a deux valeurs de l et deux valeurs de l'aplatissement correspondant à une même valeur de la vitesse de rotation ω. La seconde formule indique que le moment de rotation μ croît indéfiniment avec l'aplatissement et réciproquement.

Si l'on considère le moment de rotation comme constant (c'est le cas d'astronomie pratique d'un astre qui se contracte en dehors de toute action extérieure), la seconde formule indique que la densité ρ doit croître indéfiniment, comme k, avec l et l'aplatissement. Mais la densité ne peut pas devenir pratiquement infinie. Il est intéressant de voir quelles seraient la figure et les dimensions limites.

Nous avons ici

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho a^2 b = \frac{4}{3}\pi\rho\frac{a^3}{\sqrt{1+l^2}}.$$

En éliminant ρ de (2) au moyen de cette relation, on obtient

$$(3) \qquad g = \frac{50}{3fM}\frac{a^3}{a} = 4h\sqrt{1+l^2} = \frac{k}{(1+l^2)^{\frac{1}{6}}}.$$

C'est cette expression g qui va nous donner la variation du grand axe a en fonction de l.

Pour $l = 0$, on a $g = 4h = 0$ et pour $l = \infty$, en se reportant à la valeur de h, on a $g = 2\pi$.

Prenons la dérivée de cette expression g par rapport à l, on a

$$\frac{dg}{dl} = 4\frac{9+7l^2}{l^2\sqrt{1+l^2}}\left(\frac{9+4l^2}{9+7l^2}l - \operatorname{arc\,tang} l\right).$$

Cette expression est toujours positive. La valeur de g est donc toujours croissante de 0 à 2π quand l croît de zéro à l'infini. En effet,

pour $l = 0$, l'expression entre crochets tend vers $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{l}{5}$, et sa dérivée, qui est

$$\frac{9 + 4l^2}{9 + 7l^2} - \frac{54l^2}{(9 + 7l^2)^2} - \frac{1}{1 + l^2} = \frac{54l^2 - 36l^4}{(1 + l^2)(9 + 7l^2)^2},$$

reste toujours positive. Par conséquent, quand l va de zéro à l'infini, c'est-à-dire quand l'aplatissement de l'ellipsoïde augmente indéfiniment, g croît de 0 à 2π. Comme le moment de rotation reste constant pendant la contraction, la formule (3) indique que a part d'une valeur très grande et décroît continuellement en tendant finalement vers une valeur limite définie par

$$(4) \qquad \frac{50\mu^2}{3fM^3a} = 2\pi.$$

Pour de faibles aplatissements, en développant la formule (3) en fonction de l et en négligeant l^4, on obtient

$$(5) \qquad g = \frac{16}{15} l^2 \ldots = \frac{32}{15} e \ldots,$$

l'aplatissement e étant relié à l par la formule

$$(6) \qquad \frac{a^2}{b^2} = 1 + l^2 = \frac{1}{(1 - e)^2} = 1 + 2e \ldots.$$

En tenant compte de la valeur de g, on peut donc écrire

$$(7) \qquad \frac{\mu^2}{ae} = \frac{3fM^3}{25\pi} = \text{const.} \qquad \text{ou} \qquad ae = \text{const.}$$

avec μ constant. Ainsi, pour de faibles aplatissements et dans le cas où le moment de rotation reste constant, l'*aplatissement varie en raison inverse du rayon équatorial* de l'ellipsoïde et réciproquement.

J'avais démontré dans ma thèse [*Rotation de l'ellipsoïde hétérogène et figure exacte de la Terre* (*Journal de Mathématiques*, 1912, p. 385)] que pour un fluide hétérogène, dans le cas de faibles aplatissements, la loi de variation de ces aplatissements ne dépend que

de celle des densités et l'aplatissement superficiel est proportionnel à h, pour la même répartition des densités. Les formules (7) sont donc conservées, e ayant seulement une valeur différente de celle qu'il aurait dans le cas de l'homogénéité [1]. Pour la Terre, par exemple, il faudrait qu'elle se contracte jusqu'à un rayon moitié moindre pour que son aplatissement devienne double. Il res-

---

[1] Pour la Terre, dans l'hypothèse de Clairaut, vitesse de rotation égale sur toutes les surfaces de niveau, l'aplatissement déterminé par la constante de précession et le rapport de la force centrifuge à l'attraction est renfermé en première approximation dans les deux limites très voisines (*Journal de Mathématiques*, 1912, p. 390) :

$$297,10 < \frac{1}{e} < 297,40.$$

La première limite est celle de Poincaré, la seconde est déterminée par ce fait, démontré dans le travail indiqué, que la fonction de Radau est toujours croissante pour la Terre. En faisant les calculs exacts correspondant aux lois de densité de Legendre, Roche, Lipschitz, Lévy, Radau, on trouve, pour 21 déterminations, des nombres qui ne s'écartent pas de 0,04 de la valeur moyenne

$$\frac{1}{e} = 297,17.$$

En deuxième approximation, en tenant compte du carré de l'aplatissement, les autres corrections en e^3 ... étant négligeables, on obtient les limites définitives

$$296,00 < \frac{1}{e} < 296,85.$$

et les calculs numériques donnent à quelques centièmes près (p. 416)

$$\frac{1}{e} = 296,45.$$

Ces déterminations sont indépendantes de celles du pendule ou des mesures géodésiques. Si l'aplatissement réel était de $\frac{1}{292}$, d'après les nombres de Clarke et de Faye, il s'ensuivrait que la vitesse de rotation de l'écorce serait ralentie par le freinage des marées de telle sorte que la vitesse de rotation au centre serait un peu plus grande, $\omega_1 = 1,16\,\omega_1$ (p. 427). Si l'aplatissement réel est voisin de $\frac{1}{297}$, comme les dernières déterminations de Helmert, Hayford semblent l'indiquer, il s'ensuivra que la vitesse de rotation est uniforme, que le freinage dû aux marées est sensiblement nul et que cette action retardatrice, invoquée par Darwin pour ses explications cosmogoniques, est insensible.

terait encore très petit, de l'ordre de $\frac{1}{300}$ environ. Mais la densité devrait être 8 fois plus grande, c'est-à-dire égale à 44. Ce n'est guère possible et l'aplatissement de la Terre n'atteindra jamais cette limite.

Soient maintenant M′, r, ω' la masse, la distance et la vitesse de rotation de la Lune. Le moment de rotation du système Terre-Lune sera

$$\mu' = I'\omega' = \frac{2}{5} M a^2 \omega + M' r^2 \omega' = 4,82\mu.$$

Supposons les deux masses réunies, avec leur quantité de mouvement totale, on peut négliger l'accroissement de I et de a, on aura

$$\frac{\mu^2}{e} = \text{const.}, \qquad \frac{1}{e'} = \frac{267}{4,82^2} = 12,4.$$

L'aplatissement ne serait encore que de $\frac{1}{12}$, de l'ordre de celui de Jupiter ou de Saturne. Le moment de rotation serait 4,82 fois plus grand qu'actuellement, ainsi que la nouvelle vitesse de rotation

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\mu'}{\mu} = 4,82.$$

Nous serions encore très loin d'un dédoublement possible de la masse. En supposant la Terre homogène, ce qui nous sera utile pour rendre les résultats suivants comparables, on aura

$$\frac{1}{e} = 231,7, \qquad \frac{1}{e'} = \frac{232}{4,82^2} = 19,0.$$

Pour de très grands aplatissements, si nous désignons par a_0 la valeur limite du grand axe, par r le rayon de la sphère dans le cas des petits aplatissements, les formules (7) et (4) peuvent s'écrire

$$(8) \qquad ag = \frac{50\mu^2}{3fM^3} = \frac{32}{15} er = 2\pi a_0, \qquad \frac{a_0}{r} = \frac{16}{15}\frac{e}{\pi}.$$

Comme la limite 2π s'applique seulement dans le cas d'une masse homogène, il faut faire $\frac{1}{e} = 232$ pour la Terre. On obtient

$$\frac{a_0}{r} = \frac{1}{681} \qquad \text{et} \qquad a_0 = 9 \text{ km},4.$$

Le rayon de la Terre à la limite de contraction devrait être 681 fois plus petit. Elle tendrait à se réduire à un disque de $9^{km},4$ de rayon avec densité indéfiniment croissante.

On pourrait voir que, dans le cas d'une masse hétérogène, la limite, tout en étant différente de 2π, reste du même ordre. En introduisant l'aplatissement réel actuel dans les formules, on aura

$$\frac{a_0}{r} = \frac{1}{874} \qquad \text{et} \qquad a_0 = 7\,\text{km},3.$$

On a d'ailleurs

$$\mu = I\omega = \frac{2}{5} M a^2 \omega = \text{const.}$$

La vitesse de rotation serait inverse du carré du grand axe, c'est-à-dire 462 000 fois plus grande qu'actuellement, dans le cas de l'homogénéité. Le disque limite ferait 5,35 tours par seconde. On aurait une vitesse 763 000 fois plus grande et 8,84 tours dans le second cas [1].

Si l'on suppose la Lune réunie à la Terre, avec le moment de rotation total, alors g et a_0 sont multipliés par $4{,}82^2$ et ω est divisé par $4{,}82^3$, d'après les formules

$$\frac{a_0'}{\mu'^2} = \frac{a_0}{\mu^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mu'}{\mu} = \frac{a'^2\omega'}{a^2\omega}; \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\omega'}{\omega} = \left(\frac{\mu}{\mu'}\right)^3.$$

Le grand axe limite du disque aurait 219^{km} et la vitesse de rotation limite serait de 2,86 tours par minute.

A la limite, pour le disque aplati, il y a équilibre entre la force centrifuge et l'attraction. En effet, l'attraction F dans le plan équatorial de l'ellipsoïde homogène de révolution, à une distance quelconque x du centre (elle est proportionnelle à x comme la force centrifuge), est donnée par la formule

$$(9) \qquad \frac{F}{2\pi f \rho x} = \frac{1 + l^2}{l^2} \operatorname{arc\,tang} l - \frac{1}{l^2}.$$

---

[1] Ces résultats, publiés dans une Note des *Comptes rendus* (t. 169, 1919, p. 320), ont été retrouvés par H.-G. Plummer [*On the ellipticities of the Maclaurin ellipsoids* (*Monthly Notices*, t. 80, n° 1, nov. 1919, p. 26-33)].

En comparant avec la valeur h, formule (1), on obtient pour le rapport entre la force centrifuge et l'attraction

$$(10)\qquad \frac{\omega^2 x}{F} = \frac{(3+l^2)\operatorname{arc\,tang} l - 3l}{(1+l^2)\operatorname{arc\,tang} l - l} = 1 - \frac{2(l - \operatorname{arc\,tang} l)}{(1+l^2)\operatorname{arc\,tang} l - l}.$$

Le dernier terme est égal à 1 pour $l = 0$, cas de la sphère. Il est égal à zéro pour $l = \infty$, cas du disque aplati. Il est toujours décroissant. La force centrifuge est donc toujours plus petite que l'attraction dans un ellipsoïde homogène de révolution en équilibre. Il en est de même d'ailleurs pour un ellipsoïde hétérogène (*Journal de Mathématiques*, 1912, p. 478, thèse). Elle tend à équilibrer l'attraction à l'équateur à mesure que l'ellipsoïde s'aplatit. Il y aura équilibre entre ces deux forces à la limite, pour un disque aplati, considéré comme la limite d'un ellipsoïde de révolution indéfiniment aplati. Il en serait de même pour un ellipsoïde hétérogène.

Toutefois la *pression à l'intérieur* ne tend pas à s'annuler à cause de ρ infini, mais tend au contraire vers une limite finie. En effet, la composante de l'attraction suivant l'axe polaire est $-Bz$ où

$$B = 4\pi f\rho \frac{1+l^2}{l^3}(l - \operatorname{arc\,tang} l).$$

La pression est donnée par la formule générale

$$p_0 - p = \frac{1}{2}\rho[(A - \omega^2)(x^2 + y^2) + Bz^2].$$

En évaluant cette pression le long de l'axe polaire $x = y = 0$, la pression superficielle étant nulle, $p = 0$ pour $z = b$, on aura pour la pression centrale p_0

$$p_0 = \frac{1}{2}\rho B b^2 = \frac{9fM^2}{8\pi a^2}\frac{1+l^2}{l^3}(l - \operatorname{arc\,tang} l).$$

La dérivée du terme en l est toujours positive. Cette expression croît de $\frac{1}{3}$ à 1 quand l croît de zéro à l'infini. La pression centrale est ainsi comprise entre les deux limites

$$\frac{9fM^2}{8\pi a^2} > p_0 > \frac{3fM^2}{8\pi a^2}.$$

La première correspond à la sphère, la seconde au disque aplati. Dans une sphère qui s'aplatit, en conservant le même grand axe, la pression centrale est toujours croissante. A la limite, dans le disque aplati, elle est trois fois plus grande que dans la sphère.

Le long de l'axe équatorial, on aura, comme dans l'ellipsoïde ordinaire,

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho(A - \omega^2)x^2 = p_0\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

La pression diminuera du centre à la surface comme le carré de la distance.

L'*application à la Terre* de la formule (8) peut nous permettre de calculer également quel serait son moment de rotation μ et sa vitesse de rotation si elle était réduite à un disque de même rayon que son rayon actuel et où la force centrifuge ferait équilibre à la pesanteur. En faisant $a_0 = r$, on a

$$(11) \qquad \frac{5\omega}{3fM^3} = \frac{32}{15}\frac{\omega r}{g^2} = 2\pi\frac{a}{g^2},$$

et comme I resterait le même, on aura

$$(12) \qquad \frac{\mu'^2}{\mu^2} = \frac{\omega'^2}{\omega^2} = \frac{r}{a} = 681 = 26,1^2.$$

Le moment de rotation et la vitesse de rotation devraient être 26 fois plus grands qu'actuellement dans l'hypothèse d'une Terre homogène.

On peut vérifier qu'alors la force centrifuge ferait bien équilibre à la pesanteur. En effet, l'attraction sur l'équateur dans un ellipsoïde de révolution homogène, donnée par la formule (9), peut s'écrire, en remplaçant ρ par sa valeur en fonction de M et de e,

$$(13) \qquad F = -\frac{3fM}{2a^2}\frac{(1+B)}{B}\left(\operatorname{arc\,tang} l - \frac{l}{1+B}\right).$$

A la limite, pour $l = \infty$, on obtient pour l'attraction en un point de l'équateur d'un disque aplati, qui serait la limite d'un ellipsoïde de révolution, la valeur

$$(14) \qquad F = -\frac{3\pi}{4}f\frac{M}{a^2} = -2,37\gamma$$

L'attraction y serait 2,37 fois plus grande que l'attraction à la surface d'une sphère de même rayon et de même masse. Or on sait que pour la Terre, supposée solide et sphérique, on devrait avoir pour l'équilibre entre la force centrifuge et l'attraction une vitesse de rotation 17 fois plus grande. On a donc

$$\omega^2 r = \frac{1}{17^2}\gamma$$

et, d'après (12),

$$\omega'^2 r = 681\,\omega^2 r = \frac{681}{17^2}\gamma = 2,36\gamma.$$

La force centrifuge, à la limite, serait bien égale à l'attraction I du disque aplati, dans les limites d'approximations envisagées ici.

Au voisinage de la limite du disque aplati, comme l est très grand, en désignant par λ et par ε des quantités très petites, on peut écrire

$$\frac{1}{l^2} = \lambda^2, \qquad \operatorname{arc\,tang} l = \frac{\pi}{2} - \alpha;$$

$$g = 4\sqrt{1+\lambda^2}\left[(1+3\lambda^2)\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - 3\lambda^2\right].$$

Or

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha = l \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{l} = \lambda.$$

On peut prendre l'arc pour la tangente, ou $\alpha = \lambda$, et en négligeant λ^2 devant λ, il vient

$$g = 4\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 4\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{l}\right) = \frac{50}{3fM^3}\frac{\mu^2}{a}.$$

En comparant avec la valeur limite, on aura

$$\frac{50\mu^2}{3fM^3} = 2\pi a_0 = 2(\pi - 2\alpha)a.$$

Cette formule permet de déterminer la valeur de a et b au voisinage de a_0 en prenant

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{1+l^2}} = \frac{1}{l}\ldots = \alpha.$$

Pour $\alpha = 0,1$, c'est-à-dire pour un aplatissement de 0,9, le disque

terrestre aurait un axe équatorial de 10^{km}, un axe polaire de 1^{km}, avec un volume qui serait près de 2,6 milliards de fois plus petit que le volume actuel et par conséquent une densité 2,6 milliards de fois plus grande.

Pour $\alpha = 0{,}01$ ou un aplatissement de 0,99, le grand axe aurait $9^{km},5$, le petit axe 95^{m} et la densité serait 10 fois plus grande que dans le cas précédent, le volume étant sensiblement 10 fois plus petit.

Pour l'ellipsoïde de bifurcation qui conduit des Maclaurin aux Jacobi, des ellipsoïdes de révolution aux ellipsoïdes à trois axes, on a

$$h_0 = 0{,}1871, \qquad l_0 = 0{,}340 = \frac{b^2}{a^2} = 1 + l^2.$$

La formule (3) donne alors

$$g_0 = 4h\sqrt{1 + l^2} = 4h\frac{a}{b} = 1{,}28. \tag{16}$$

Dans le cas où μ reste constant, la formule (8) devient

$$ag = 1{,}28a = 27a_1. \tag{17}$$

On obtient 46^{km} et $26^{km},8$ pour la valeur des deux axes. Le volume serait 46 millions de fois plus petit et la densité 46 millions de fois plus grande qu'actuellement. La vitesse de rotation serait de 13,4 tours par minute.

En supposant la Lune réunie à la Terre, avec le moment de rotation total, les axes seraient multipliés par μ^2 ou $4{,}82^2$. Ils auraient respectivement 1070^{km} et 622^{km} et la densité devrait être encore 365 fois plus grande qu'actuellement. La vitesse de rotation serait de 7,16 tours par heure.

Si au contraire nous conservons à la Terre le même volume et la même densité qu'actuellement, la valeur des éléments pour l'ellipsoïde de bifurcation serait

$$a^2 = a^2 b = r^3\sqrt{1 + l_0^2}. \tag{18}$$

Le rayon équatorial aurait 7650^{km} et le rayon polaire 4460^{km}. La valeur de g reste la même, puisqu'elle ne dépend que de l. La valeur de μ^2 seule est changée. Les formules (3), (8) et (16)

donnent

$$\frac{ag_0}{\mu'^2} = 1,28\frac{a}{\mu'^2} - \frac{32}{15}\frac{er}{\rho^2}. \tag{19}$$

Or d'après la valeur de μ dans (18) on a

$$\frac{\mu'^2}{\mu^2}\frac{r}{a} = \frac{a^3\omega'^2}{r^3\omega^2} = \frac{\omega'^2}{\omega^2}\sqrt{1+l_0^2}.$$

d'où il vient

$$\frac{\omega'^2}{\omega^2} = \frac{15}{32}\frac{g}{l\sqrt{1+l_0^2}} = \frac{15}{32}\frac{g}{l}\sqrt{s}. \tag{20}$$

La vitesse de rotation devrait être 9 fois plus grande qu'actuellement. D'ailleurs, en partant des valeurs de h, on aurait directement

$$\frac{\omega'^2}{\omega^2} = \frac{h'}{h} = \frac{15}{8e}0,1871, \tag{21}$$

expression qui donnerait la même valeur.

II. — Ellipsoïdes homogènes à trois axes ou ellipsoïdes de Jacobi.

Les axes sont reliés par l'équation de condition (Appell, *Annuaire*, p. A.16, et *Mécanique rationnelle*, t. III, p. 170) :

$$(1-s-t)\int_0^\infty \frac{x\,dx}{D^3} = st\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{D^3} \qquad (c<b<a). \tag{1}$$

$$D^2 = (1+x)(1+sx)(1+tx), \qquad s = \frac{c^2}{a^2}, \qquad t = \frac{c^2}{b^2}.$$

Sur l'ellipsoïde de révolution d'où partent les Jacobi, on a $s = t = t_0$. A mesure que l'ellipsoïde à trois axes s'en éloigne, b tend vers c et c vers zéro. Alors t tend vers 1 et s vers zéro. La limite est un ellipsoïde de révolution allongé en aiguille.

La vitesse de rotation est donnée ici par la formule

$$h = \frac{\omega^2}{2\pi f\rho} = st\int_0^\infty \frac{x(1+x)\,dx}{D^3} = st(A+B), \tag{2}$$

en représentant par A et B les intégrales de (1).

Les fonctions k et g qui exprimeront la variation en fonction du moment de rotation et du grand axe a s'écriront

$$(3) \qquad k = \frac{50\mu^2}{3fM^3}\left(\frac{4\pi\rho}{3M}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{(s-t)^2}{(st)^{\frac{2}{3}}}h,$$

$$(4) \qquad g = \frac{50}{3fM^3}\frac{\mu^2}{a} = k\frac{s^{\frac{1}{3}}}{t^{\frac{1}{3}}} = \frac{(s-t)^2}{st}\frac{h}{\sqrt{t}},$$

où t correspondra à l'axe moyen b et passera de la valeur t_0 à 1.

Désignons par h_0, k_0, g_0, les valeurs correspondant à l'ellipsoïde de bifurcation où $s = t = t_0$. Alors h décroît et tend vers zéro à mesure que l'ellipsoïde s'allonge et que s tend vers zéro. La vitesse de rotation tend vers zéro, si l'on suppose la densité constante, ou bien la densité ρ tend vers l'infini si l'on suppose ω constant.

Au contraire, k tend vers l'infini, quand s tend vers zéro. Si le moment de rotation μ reste constant, la densité ρ tend vers l'infini, et si ρ reste constant, il faut que μ tende vers l'infini.

Déterminons la valeur de g pour $t = 1$ et s tendant vers zéro, cas limite de l'aiguille allongée. On a, d'après (1) et (2),

$$(5) \qquad g = \frac{h}{s} = A + B = \int_{x_0}^{x} \frac{x\,dx}{(1+x^2)} = \mathrm{L}\,x - 1.$$

La valeur de g tend donc logarithmiquement vers l'infini. Il en résulte, avec μ constant, d'après (4), que le grand axe a tend vers zéro en même temps que b et c, mais beaucoup plus lentement. *La figure d'équilibre prend la forme d'une aiguille allongée, mais de longueur indéfiniment décroissante.* Les axes a, b, c tendent donc ici tous trois vers zéro à la limite, mais b et c sont infiniment petits du second ordre par rapport à a.

Le grand axe ne tendra donc pas vers une valeur limite, comme pour le disque aplati, mais nous verrons, par les calculs numériques, que, pratiquement, il aurait une valeur voisine de celle du disque pour des aplatissements très grands, presque limites, où les deux autres axes seraient tous deux excessivement petits.

On ne peut pas démontrer que g, à partir de $t = t_0$ reste toujours décroissant comme h ou toujours croissant comme k. On verra, par

les calculs numériques, qu'il décroît d'abord jusqu'à un minimum avant de tendre vers l'infini.

Au voisinage de la limite, la force centrifuge tend à égaler l'attraction, dans la direction du grand axe, comme pour l'ellipsoïde de révolution, quand l'allongement de l'ellipsoïde devient considérable par rapport à sa section.

Nous pouvons poser alors $1 - t = \varepsilon$ et considérer ε et s comme très petits. L'équation (1) pourra s'écrire en conservant seulement les termes du premier ordre

$$(6) \qquad (\varepsilon - s)A = sB, \qquad \varepsilon A = s(A + B) = h.$$

Avec la même approximation, on aura

$$A = \int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+x)^3(1+sx)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si nous négligeons d'abord s dans cette expression, on a

$$(7) \qquad \frac{x}{(1+x)^3} = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)^3} \qquad \text{et} \qquad A = \frac{1}{2}.$$

Le terme en s dans A est égal à 1 pour $x = 0$ et nul pour $x = \infty$. Il n'introduit que des corrections de l'ordre de s, que l'on peut négliger, en première approximation, devant $\frac{1}{2}$. On aura donc

$$(8) \qquad \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{1}{2}(1 - t) = s(A + B),$$

formule qui déterminera t, en fonction de s, au voisinage de la limite.

Il faut calculer A et B pour avoir t et h. En faisant de même $t = 1$ dans D, on a

$$(9) \qquad A + B = \int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^2} \frac{dx}{(1+sx)^{\frac{3}{2}}}.$$

Posons

$$z^2 = \frac{s}{1+sx}, \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{s - z^2}{sz^2} \qquad \text{et} \qquad 1 + x = \frac{s - (1 - s)z^2}{sz^2}.$$

Les limites sont 0 et $\sqrt{s}$. Si l'on néglige d'abord s devant 1 dans $1 + x$,

on obtient

$$A + B = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_0^{\sqrt{s}} \frac{z^2\,dz}{s - z^2} - \left| L \frac{z + \sqrt{s}}{z - \sqrt{s}} \right|_0^{\sqrt{s}} - 2,$$

valeur qui devient infinie sans être déterminée par rapport à s. C'est la même valeur qu'en (5). Si, au contraire, dans la valeur de x nous remplaçons z^2 par la valeur $(1 - s)z^2$, qui lui est égale, à un terme très petit près, on peut écrire

$$x = \frac{s - (1 - s)z^2}{s z^2} = \frac{1 - l^2 z^2}{z^2}, \qquad 1 + l^2 = \frac{1}{s} = \frac{a^2}{c^2},$$

et l'on obtient

$$(10) \qquad A + B = \frac{2}{\sqrt{s}} \int_0^{\sqrt{s}} \frac{l^2 z^2}{1 - l^2 z^2}\,dz - \left| L \frac{1 + l z}{1 - l z} \right|_0^{\sqrt{s}} - 2 = L \frac{4}{s} - 2,$$

en faisant dans le calcul de la valeur aux limites

$$l\sqrt{s} = \sqrt{1 - s} = 1 - \frac{1}{2} s \ldots.$$

On aura ainsi la valeur de $A + B$ et de h en fonction de s, quand s est très petit et l'ellipsoïde très allongé.

La valeur de g, donnée par (5), devient

$$(11) \qquad g = \frac{h}{s} = A + B = L \frac{4}{s} - 2.$$

L'attraction à l'extrémité du grand axe a, dans un ellipsoïde à trois axes, est donnée par l'expression

$$P = -\frac{X}{a} = 2\pi f \rho a b c \int_0^\infty \frac{du}{(a^2 + u) D},$$

$$D^2 = (a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u).$$

Si l'on pose $u = c^2 x$, on obtient l'expression en s et t :

$$(12) \qquad P = 2\pi f \rho s \int_0^\infty \frac{dx}{(1 + s x) D} = 2\pi f \rho s \int_0^\infty \frac{dx}{(1 + x)(1 + s x)^{\frac{3}{2}}}.$$

La deuxième forme est celle obtenue au voisinage de la limite avec $t = 1$. Si l'on y fait la transformation en z^2 de l'expression (9)

on obtiendra pour l'intégrale la même forme qu'en (10). On aura donc

$$(12') \qquad P = -\frac{X}{a} = 2\pi f\rho s(A + B) = 2\pi f\rho s\left(L\frac{4}{s} - 2\right).$$

En comparant avec la formule (2), où l'on fait $t = 1$, on a bien

$$(13) \qquad \omega^2 = P \qquad \text{ou} \qquad \frac{\omega^2 a}{-X} = 1.$$

Il y a bien égalité entre la force centrifuge $\omega^2 a$ et l'attraction $-X$, en tous les points de l'ellipsoïde à trois axes, tendant vers sa limite d'ellipsoïde de révolution très allongé.

Remarque. — On retrouve les mêmes résultats au moyen des *formules relatives à l'ellipsoïde de révolution allongé.*

La formule (12) donne, par la transformation indiquée en z^2, quel que soit la valeur de s, avec $t = 1$, c'est-à-dire $b = c$,

$$(14) \qquad \frac{P}{4\pi f\rho} = \frac{1}{l^3\sqrt{s}}\left[L\frac{1 + lz}{1 - lz}\right]_0^{\sqrt{s}} - \frac{1}{l^2} = \frac{1 - l'^2}{l'^3}\left(\frac{1}{2}L\frac{1 + l}{1 - l'} - l'\right),$$

où

$$l'^2 = l^2 s = 1 - s = 1 - \frac{c^2}{a^2}.$$

C'est la formule connue de l'attraction suivant le grand axe, de l'ellipsoïde de révolution allongé. Si c tend vers zéro, alors l' tend vers 1, et l'on retrouvera la formule (12') en considérant s comme très petit :

$$(15) \qquad P = -\frac{X}{a} = 2\pi f\rho s\left(L\frac{4}{s} - 2\right) = 2\pi f\rho s L\frac{4}{s}.$$

L'autre composante serait de même

$$Q = R = -\frac{Y}{b} = -\frac{Z}{c} = 2\pi f\rho\frac{1 - l'^2}{l'^3}\left(\frac{l'}{1 - l'^2} - \frac{1}{2}L\frac{1 + l'}{1 - l'}\right).$$

En considérant s comme très petit, il vient

$$(16) \qquad R = 2\pi f\rho\left(1 - \frac{s}{2}L\frac{4}{s}\right) = 2\pi f\rho.$$

Les conditions d'équilibre dans la rotation autour du petit

axe c s'écrivent

$$(17) \qquad a^2(P - \omega^2) = b^2(Q - \omega^2) = c^2 R.$$

Ces équations ne sont pas compatibles si $b = c$ et $Q = R$. Elles le deviennent quand b et c tendent vers zéro, précisément dans le cas limite de Jacobi. On a alors

$$a^2(P - \omega^2) = c^2 R.$$

En remplaçant P et R par leurs valeurs (15) et (16), on obtient

$$(18) \qquad h = \frac{\omega^2}{2\pi f\rho} = s\left(L\frac{4}{s} - 1\right), \qquad g = L\frac{4}{s} - 1.$$

C'est bien la même valeur que (11) à une unité près devant le logarithme très grand et tendant vers l'infini. A la limite, en comparant (15) et (18), on a bien égalité entre la force centrifuge et l'attraction :

$$\frac{\omega^2 a}{X} = \frac{L\frac{4}{s} - 1}{L\frac{4}{s} - 2} = 1 \ldots.$$

La formule (17) permet encore de déterminer l'ordre de grandeur de la composante Q dans la direction de l'axe moyen :

$$Q - \omega^2 = \frac{c^2}{b^2} R, \qquad Q = \omega^2 + tR.$$

On a $Q > \omega^2$, l'attraction est supérieure à la force centrifuge. Puis vers la limite, par approximations successives, avec s tendant vers zéro, il vient

$$\frac{Q}{2\pi f\rho} = s\left(L\frac{4}{s} - 1\right) + t\left(1 - \frac{s}{2}L\frac{4}{s}\right) = t\left(1 - \frac{s}{2}L\frac{4}{s}\right) = t,$$

valeur qui tend vers 1 comme pour R. Il y a bien concordance entre les différents résultats des méthodes différentes.

Considérons un ellipsoïde homogène ayant la masse de la Terre et le même moment de rotation. Nous avons vu qu'en conservant la forme d'un ellipsoïde de révolution, il aboutissait finalement à un

disque de $9^{km},4$ de rayon. Nous pouvons calculer les éléments de l'ellipsoïde à trois axes qui aurait même grand axe.

Le deux valeurs de g sont alors égales d'après (4). On a, d'autre part, d'après (10),

$$(19) \qquad \mathrm{L}\frac{4}{s} - 2 = 2\pi.$$

On trouve pour s et le petit axe c

$$s = \frac{1}{362}, \qquad \frac{c}{a} = \frac{1}{19,0}, \qquad c = 500^{m}.$$

L'axe moyen est donné par la formule (8) qui devient

$$(20) \qquad t = 1 - 2s\left(\mathrm{L}\frac{4}{s} - 2\right), \qquad \frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{t}} = 1 + s\left(\mathrm{L}\frac{4}{s} - 2\right).$$

On en tire $b = 510^{m}$. La Terre se réduirait à un ellipsoïde très allongé de $18^{km},8$ pour le grand diamètre, sur 1020^{m} et 1000^{m} pour les autres.

La vitesse de rotation ω', comparée à celle de Maclaurin de même axe a, serait donnée par

$$(21) \qquad \mu = \mathrm{I}'\omega' = \mathrm{I}\omega = \frac{1}{5}\mathrm{M}a^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)\omega' = \frac{2}{5}\mathrm{M}a^2\omega.$$

Comme $\frac{b^2}{a^2}$ est sensiblement égal à s et négligeable, on a ici

$$\omega' = 2\omega.$$

La vitesse de rotation du Jacobi devient sensiblement égale au double de celle du Maclaurin de même grand axe, dès que l'aplatissement devient considérable. Notre ellipsoïde ferait donc 10,7 tours par seconde dans le cas de l'homogénéité et 17,7 dans le second cas.

Nous pouvons calculer de même les éléments de notre ellipsoïde pour différentes valeurs assez petites de s. En comparant toujours à la valeur limite a du grand axe de Maclaurin limite, et considérant que μ est constant, on peut écrire

$$(22) \qquad \frac{50\mu^2}{3fM^3} = a\left(\mathrm{L}\frac{4}{s} - 2\right) = 2\pi a_0.$$

Cette formule donnera a; la valeur correspondante de s donnera c. Enfin la valeur ci-dessus (20) de t donnera b. On obtient le Tableau suivant :

$1 : s$	100.	200.	500.	10^3	10^6.	10^9.	10^{10}.
a km	$11^{km},8$	$10^{km},4$	$8^{km},9$	$8^{km},1$	$6^{km},2$	$4^{km},1$	$2^{km},5$
b	$1^{km},38$	750^{m}	404^{m}	262^{m}	62^{m}	$4^{m},1$	25^{mm}
c	$1^{km},18$	750^{m}	400^{m}	260^{m}	62^{m}	$4^{m},1$	25^{mm}

On voit que la valeur de a diminue très lentement, de 12^{km} à $2^{km},5$, soit de 5 fois sa valeur, tandis que b et c diminuent beaucoup plus rapidement de $1^{km},38$ et $1^{km},18$ à 25^{mm}, c'est-à-dire dans la proportion de 50 000 fois, soit 10 000 fois plus vite.

La densité est donnée par les formules

$$\rho \frac{c^3}{\sqrt{s}} = \rho_1 r^3, \qquad \frac{\rho}{\rho_1} = \frac{r^3}{c^3}\sqrt{s}, \tag{23}$$

où ρ_1 et r représentent la densité et le rayon actuels de la Terre. Cette formule se déduit immédiatement de l'expression de la masse, où l'on fait $t = 1$, c'est-à-dire $b = c$:

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho abc = \frac{4}{3}\pi\rho\frac{c^3}{\sqrt{st}} = \frac{4}{3}\pi\rho\frac{c^3}{\sqrt{s}}. \tag{24}$$

La valeur de la densité serait de 16 milliards de fois la densité actuelle, pour $a = 11^{km},8$. Elle serait de 11 000 milliards pour $a = 6^{km},2$. Enfin elle serait de 400 milliards de milliards pour $a = 2^{km},5$.

Le moment de rotation μ étant constant et b négligeable devant a, pour de forts aplatissements, on a $a^2\omega = \text{const}$. La vitesse de rotation est inverse du carré du grand axe et croît indéfiniment à mesure que a tend vers zéro.

Nous pouvons considérer au contraire *la Terre avec sa densité actuelle* et chercher le moment de rotation et la vitesse de rotation, qui pourraient donner à la masse les valeurs de s et l'allongement correspondant aux valeurs du Tableau ci-dessus.

En désignant par μ' et a' les nouvelles valeurs du moment

de rotation et du grand axe correspondant à s ou a, d'après (22),

$$(25)\qquad \frac{\mu'^2}{a'} = \frac{\mu^2}{a} = \frac{3fM}{5\rho}\left(1 - \frac{1}{s} - 2\right).$$

Pour la même forme d'équilibre, même s, et la même masse M, les grands axes a sont proportionnels au carré du moment de rotation. C'est ce qu'indique la formule générale (4) qui donne g.

Comme ici b est très petit par rapport à a, on peut le négliger dans l'expression de I, on aura

$$(26)\qquad \frac{\mu'}{\mu} = \frac{a'^2\omega'}{a^2\omega}, \qquad \text{d'où} \qquad a'\omega' = a\omega,$$

en comparant avec (25). Les vitesses de rotation sont inverses des grands axes, pour les mêmes aplatissements, dans le cas de forts aplatissements.

Dans le cas présent, on fait $\rho = \rho_1$. La formule (23) donne

$$c'^3 = r^3\sqrt{s}, \qquad \text{d'où} \qquad a' = \frac{c'}{\sqrt{s}} = \frac{r}{\sqrt[3]{s}}.$$

Il vient

$$(27)\qquad \frac{\mu'^2}{\mu^2} = \frac{a'}{a} = \frac{r}{a}\,\frac{1}{\sqrt[3]{s}}.$$

Or on peut écrire aussi

$$(28)\qquad \frac{\mu'}{\mu} = \frac{a'^2\omega'}{2r^2\omega}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{\mu'}{\mu}\,\frac{2r^2}{a'^2} = 2\,\frac{\mu'}{\mu}\,s^{\frac{2}{3}}.$$

On aura μ' et ω' en fonction du rayon actuel r de la Terre et des valeurs de a du Tableau ci-dessus.

Le Tableau suivant indique quelles devraient être les valeurs des quantités cherchées, par rapport à leurs valeurs actuelles. Celles du grand axe a' et du petit axe c' sont en milliers de kilomètres. Celles de μ' et de ω' sont exprimées par rapport à leurs valeurs actuelles :

$1 : s$	100.	200.	500.	10 .	10[illegible]	10[illegible]	10[illegible]
a' km : 10^3	29,6	37,2	50,7	63,8	137	638	13700
c' km : 10^3	2,96	2,63	2,26	2,02	1,37	0,638	0,137
$\mu' : \mu$.....	50,1	60,0	75,3	88,7	149	392	2340
$\omega' : \omega$.....	4,67	3,52	2,39	1,77	0,64	0,08	0,001

On voit que pour un allongement de 10 fois, $s = 0,01$, il faudrait

que le moment de rotation soit 50 fois plus grand que le moment actuel, soit 10 fois plus grand que le moment de rotation du système Terre-Lune. Cette valeur croît indéfiniment avec l'allongement, comme l'indique la discussion du paramètre k. La vitesse de rotation devrait être près de 5 fois plus grande qu'actuellement (4,67). Elle décroît indéfiniment comme l'indique la valeur de la fonction h.

On verra dans les calculs du paragraphe suivant les valeurs de l'ellipsoïde terrestre pour des conditions moins éloignées des conditions normales et en particulier pour les ellipsoïdes de bifurcation et les figures piriformes susceptibles peut-être de donner lieu à une rupture.

Les conditions à remplir par un système double, pour qu'il provienne d'un dédoublement d'une masse unique, peuvent se déduire de la valeur du moment de rotation de ce système.

En appelant M et m les deux masses, a le grand axe de l'orbite de m autour de M, et T étant la période, on a

$$4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} = f(M + m) \tag{28}$$

En supposant les orbites à peu près circulaires et appelant r la distance des masses, on peut écrire

$$\omega^2 r^3 = f(M + m). \tag{29}$$

En désignant, d'autre part, par r_1 et r_2 leur distance au centre de gravité, on a

$$r = r_1 + r_2, \qquad M r_1 = m r_2 \qquad \text{ou} \qquad (M + m) r_1 = m r, \tag{30}$$

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 = (M r_1^2 + m r_2^2)\omega = M r_1 \omega r. \tag{31}$$

En remplaçant r_1 par sa valeur en r tirée de (30), on a

$$\mu = \frac{M m}{M + m} \omega r^2. \tag{32}$$

Telle est l'expression du moment de rotation de l'ensemble en fonction des masses, de leur distance et de leur vitesse de rota-

tion [1]. Cette valeur portée dans (29) donne

$$\frac{\mu^2}{r} = f\frac{M^2 m^2}{M+m} = \frac{\alpha^2}{1+\alpha} f M^3. \tag{33}$$

expression du moment de rotation indépendante de ω.

Nous pouvons porter cette valeur de μ dans l'expression (4) de g, puisque le moment de rotation doit rester constant après comme avant la rupture. On obtient la formule simple et remarquable

$$g = \frac{50}{3}\,\frac{\alpha^2}{1+\alpha}\,\frac{r}{a}, \tag{34}$$

où g ne dépend plus que du rapport des masses α et du rapport de la distance r des masses du système double, et du grand axe a de l'ellipsoïde antérieur, correspondant à g et à l'aplatissement s, qui aurait pu donner naissance au système double.

Il est facile de voir que dans le fractionnement d'un ellipsoïde on a $r \leqq a$, on a donc

$$\frac{\alpha^2}{1+\alpha} > \frac{3g}{50}.$$

Considérons, comme ellipsoïde de comparaison, l'ellipsoïde de bifurcation qui donne naissance aux figures piriformes et soit a son grand axe. La valeur calculée de g serait alors de 1,35, comme on le verra dans la troisième Partie. La valeur de α déduite de (34) serait $\alpha = 0{,}327$, avec $r = a$. Comme il faut qu'il y ait encore contraction à partir de cet ellipsoïde, avant la rupture, on aura $r < a$. On aura donc pour le rapport des composantes d'un sys-

---

[1] En tenant compte de l'excentricité e des orbites, ωr^2 dans (32) serait remplacé par le double de la constante des aires :

$$\omega r^2 = \frac{2\pi ab}{T} = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T},$$

les seconds membres de (33) et (34) seraient multipliés par $1-e^2$ et r représentant alors le grand axe de l'orbite du compagnon autour de l'astre principal. Mais au début, les orbites devaient être circulaires, car il fallait que la force centrifuge fasse équilibre à l'attraction pour qu'il y ait dédoublement.

tème double la condition

$$\frac{m}{M} < 0.327 \qquad \text{ou} \qquad M < 3m.$$

Le rapport des composantes doit être plus grand que $\frac{1}{3}$. *Leurs masses doivent être du même ordre* et assez voisines l'une de l'autre. La Lune n'a pas pu provenir d'une rupture de ce genre avec la Terre.

En faisant $r = \frac{1}{2}a$, c'est-à-dire en admettant que la distance des centres de gravité des composantes provenant de la rupture soit la moitié du grand axe de l'ellipsoïde de bifurcation correspondant aux figures piriformes, on obtient

$$\frac{m}{M} = 0.492 \qquad \text{ou environ} \qquad M = 2m.$$

La grosse masse devrait être seulement le double de l'autre. La valeur probable du rapport doit être plus voisine de 2 que de 3, car, au voisinage des figures piriformes, a a dépassé sa valeur maximum et décroît avec la contraction. Il en sera de même de r.

En tout cas, dans un système homogène, si la figure piriforme aboutit à une rupture (système double, les ellipsoïdes de bifurcation d'ordre supérieur donneraient des systèmes triples, quadruples, etc.), le rapport $\frac{r}{a}$ aura une valeur bien déterminée et toujours la même. Si l'on pouvait déterminer ce rapport, on déterminerait par le fait même le rapport des masses commun à tous les systèmes doubles engendrés ainsi. Mais il faudrait savoir d'abord si les ellipsoïdes de bifurcation donneront naissance à des figures d'équilibre où la force centrifuge finira par l'emporter sur l'attraction, au lieu de tendre seulement à lui faire équilibre comme à la limite des ellipsoïdes de Maclaurin et de Jacobi. Or nous n'en savons rien.

III. — Calculs numériques et courbes représentatives.

Les formules (1), (2), (3) du paragraphe I donnent les valeurs de h, k, g par rapport à l dans le cas des *ellipsoïdes de révolution*.

Comme l varie de zéro à l'infini, il est préférable d'exprimer ces valeurs en fonction de s, qui ne varie que de 0 à 1, ce qui permet de représenter tout l'ensemble de la variation. On a

$$(1) \qquad 1 + l^2 - \frac{1}{s} = \frac{a^2}{c^2}.$$

Pour la sphère, $l = 0$ et $s = 1$. Pour le disque aplati, $l = \infty$ et $s = 0$. Ces valeurs et ces courbes n'avaient pas été calculées exactement, mais seulement leurs valeurs principales et l'allure générale. Les Tableaux ci-dessous donnent ces valeurs pour 10 valeurs de s assez voisines pour permettre le tracé exact de la courbe.

s....	0.	0,02.	0,04.	0,06.	0,08.	0,25.	0,50.	0,60.	0,70.	0,80.	0,90.	1.
h....	0	0,155	0,190	0,208	0,216	0,210	0,158	0,109	0,081	0,053	0,027	0
k....	∞	8,39	6,49	5,41	4,64	2,12	0,88	0,61	0,41	0,25	0,12	0
g....	2π	4,39	3,79	3,39	3,04	1,68	0,78	0,56	0,39	0,23	0,11	0
a....	0,204	0,291	0,337	0,377	0,440	0,760	1,64	2,27	3,30	5,40	11,2	∞
c....	0	0,041	0,067	0,092	0,124	0,386	1,16	1,76	2,76	4,82	10,8	∞

Les valeurs de h sont représentées par la courbe OMS de la figure 1, ellipsoïdes de Maclaurin. La courbe OJS représente les ellipsoïdes à trois axes de Jacobi (p. 236). On remarquera que la courbe de Maclaurin est presque droite, très légèrement concave vers le haut, entre J et S. En effet, la formule (1) du paragraphe I donnerait comme dérivée l'expression

$$\frac{dh}{dl} = \frac{9 + l^2}{l^4}\left(\frac{9 + 7l^2}{9 + l^2}\,\frac{l}{1 + l^2} - \operatorname{arc\,tang} l\right) = \frac{8}{15}\,l \ldots$$

La valeur indiquée à droite est ce que devient cette expression pour l très petit, en négligeant l^3. De plus, nous avons

$$\frac{dh}{ds} = \frac{dh}{dl}\,\frac{dl}{ds} \qquad \text{et} \qquad \frac{dl}{ds} = -\frac{1}{2s^2 l} = -\frac{1}{2l^3}$$

en dérivant la formule (1) ci-dessus et faisant $s = 1$. Il vient donc pour l très petit ou pour $s = 1$

$$\frac{dh}{ds} = -\frac{4}{15} \ldots = -0,267.$$

Telle est la valeur de la tangente à la courbe MS au point S. Or,

au point J on a la valeur $h_0 = 0{,}1871$ et $s_0 = 0{,}340$. La pente de la droite JS serait de 0,283, valeur assez voisine de la précédente. La tangente en S passerait à 3^{mm} au-dessous de J. On peut donc dire qu'à partir de la sphère jusqu'à l'ellipsoïde de bifurcation de Jacobi la valeur de ω^2 croît à peu près proportionnellement à $1 - s$, avec ρ constant. Elle passe ensuite par un maximum M pour décroître indéfiniment à mesure que l'ellipsoïde s'aplatit davantage et tend vers le disque aplati.

La courbe des valeurs de k en SJM (*fig.* 2) croît continuellement de zéro, au point S, à l'infini. Le moment de rotation μ croît continuellement avec l'aplatissement si la densité ρ est constante, ou bien la densité croît indéfiniment si μ reste constant.

Les valeurs de g sont représentées par la courbe SJM de la figure 3. Elles croissent de zéro, en S, à 2π quand s décroît de 1 à 0.

Les deux dernières lignes du Tableau donnent les valeurs des axes, en prenant comme unité la valeur du grand axe au point de bifurcation des Jacobi. La valeur de ces axes est donnée par les formules suivantes déduites de (3) du paragraphe I et de (1) ci-dessus, $g_0 = 1{,}28$ désignant la valeur de g au point de bifurcation :

$$(2) \qquad a = \frac{g_0}{g}, \qquad c = a\sqrt{s}.$$

La valeur limite du disque serait alors 0,204, c'est-à-dire le cinquième du grand axe au point de bifurcation.

Pour les ellipsoïdes à trois axes ou de Jacobi, les valeurs de h et des axes a, b, c, avec la condition $abc = 1$ ont été calculées par G.-H. Darwin (*Scientific papers*, t. III, p. 130 ou *Proceedings of the royal Society*, t. XLI, 1887), en fonction d'un angle γ défini par

$$(3) \qquad \cos\gamma = \frac{c}{a} = \sqrt{s}.$$

Il est facile de traduire ces valeurs en fonction de s et de calculer celles de k et g correspondant, par les formules (3) et (4) du paragraphe II. On obtient le Tableau suivant :

γ	54°21'.	57°.	60°.	65°.	70°.	75°.	80°.	85°.	90°.
s	0,340	0,296	0,250	0,178	0,117	0,066	0,030	0,008	0
t	0,340	0,384	0,438	0,536	0,640	0,748	0,853	0,944	1
a	1,197	1,279	1,383	1,601	1,899	2,346	[illegible]	[illegible]	∞
b	1,197	1,123	1,045	0,923	0,811	0,702	[illegible]	[illegible]	0
c	0,698	0,696	0,692	0,676	0,649	0,607	[illegible]	[illegible]	0
h	0,187	0,186	0,181	0,166	0,141	0,107	[illegible]	[illegible]	0
k	1,527	1,561	1,629	1,935	2,565	[illegible]	6,812	[illegible]	[illegible]
g	1,276	1,220	**1,178**	1,208	1,350	[illegible]	[illegible]	[illegible]	∞
a	1,000	1,046	**1,083**	1,056	0,945	0,776	0,586	0,379	0
b	1,000	0,918	0,819	0,609	0,404	0,184	0,108	[illegible]	[illegible]
c	0,583	0,569	0,542	0,446	0,393	0,160	[illegible]	[illegible]	0
ρ	1,00	1,06	1,21	2,04	4,73	16,2	88,5	1370	∞

Les trois premières lignes donnent les valeurs de s et de t correspondant aux valeurs de γ de Darwin. Les trois lignes suivantes donnent les valeurs des axes a, b, c avec la condition $abc = 1$, ce sont des valeurs relatives correspondant à celles de s et t et donnant la forme de la figure d'équilibre et non ses dimensions réelles.

Les courbes représentatives des ellipsoïdes de Jacobi peuvent être tracées au moyen des valeurs des fonctions h, k, g indiquées dans les trois lignes correspondantes du Tableau.

Ces courbes des Jacobi en fonction de s et t seraient des courbes gauches dans un espace à trois dimensions, la troisième étant l'une des fonctions h, k, g. Comme les formules sont symétriques en s et t dont les valeurs peuvent s'interchanger, en redonnant le même ellipsoïde, il est plus simple de prendre la projection de ces courbes sur le plan de celles des Maclaurin. La courbe OJ_1J (*fig.* 1) représente les valeurs de h pour s croissant de 0 à 0,340. La portion JJ_1S représentera les valeurs de h pour s croissant de 0,340 à 1, qui sont égales à celles de t dans le Tableau ci-dessus.

La figure 1 donne donc les courbes représentatives de h pour les Maclaurin et pour les Jacobi. Si l'on a $h > H$, il n'y a pas de figures d'équilibre. Si l'on a

$$h_0 < h < H,$$

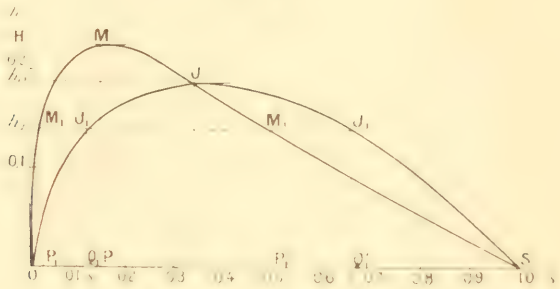
par exemple $h = 0{,}20$, la parallèle à OS rencontre la courbe des Maclaurin en deux points. Il y a deux ellipsoïdes de Maclaurin

comme figure d'équilibre. Si l'on a

$$h = h_1 < h_0,$$

la parallèle à OS rencontre la courbe des Maclaurin en deux

Fig. 1.



points M_1 et M'_1 qui déterminent deux ellipsoïdes d'équilibre dont les aplatissements sont donnés par

$$s = OP_1 \quad \text{et} \quad s = OP'_1.$$

Cette parallèle rencontre également la courbe des Jacobi en deux points J_1 et J'_1 qui déterminent, non pas deux ellipsoïdes, mais les deux aplatissements de l'ellipsoïde de Jacobi correspondant

$$s_1 = OQ_1 \quad \text{et} \quad s_1 = OQ'_1.$$

On a deux ellipsoïdes de Maclaurin et un ellipsoïde de Jacobi comme figures d'équilibre.

La figure 2 représente de même les courbes de k en fonction de s. Pour $k < k_0$, on a un ellipsoïde de Maclaurin et un seul comme figure d'équilibre. Pour $k > k_0$ on a un ellipsoïde de Maclaurin M_1 d'aplatissement $s = OP_1$ et un ellipsoïde de Jacobi $J_1 J'_1$ d'aplatissement

$$s_1 = OQ_1 \quad \text{et} \quad s_1 = OQ'_1.$$

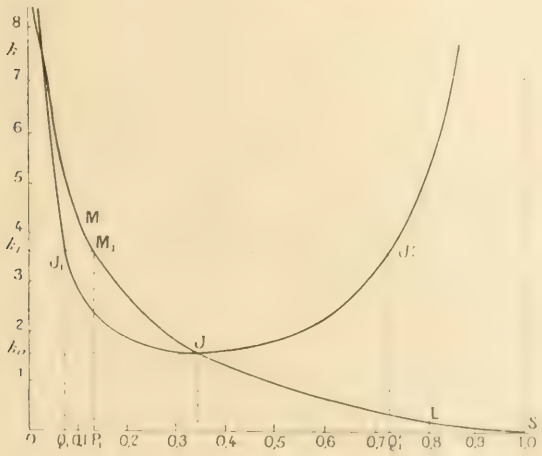
Enfin, la figure 3 représente l'ensemble des valeurs de g pour les Maclaurin et les Jacobi. Elle est beaucoup plus curieuse et instructive.

La courbe des Maclaurin SJM croît de E à un maximum 2π,

comme on l'a vu. Celle des Jacobi bifurque en J. Elle est d'abord décroissante jusqu'à un minimum m_1, m'_1 pour les valeurs approximatives

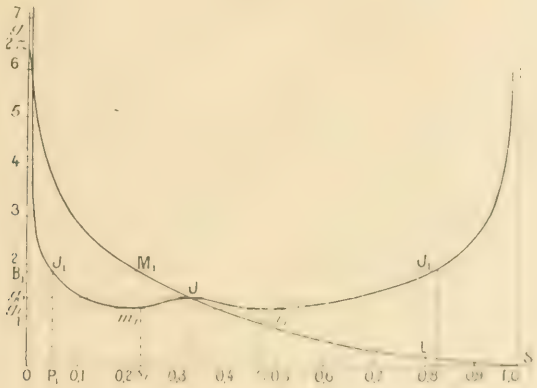
$$g_1 = 1,18, \qquad s_1 = 0,24, \qquad t_1 = 0,40,$$

Fig. 2.



déterminées par interpolation, au moyen de la parabole voisine

Fig. 3.



Elle se rapproche ensuite beaucoup de l'axe vertical qu'elle suit jusqu'à l'infini.

Or on a vu que le premier membre de g dépend de $\frac{C}{M}$ et le

second uniquement de s (ou encore de t déterminé par s). Si donc on a

$$g > 2\pi, \qquad a < \frac{25\mu^2}{3\pi f M^3},$$

il n'y a pas d'ellipsoïde de Maclaurin possible comme figure d'équilibre, mais seulement un ellipsoïde de Jacobi. Au-dessus de M, en effet, la parallèle à OS ne rencontre que la courbe des Jacobi. Ceci n'avait pas lieu pour les autres cas où la région des Maclaurin était toujours plus étendue que celle des Jacobi.

Pour $g_0 < g < 2\pi$, la droite rencontre la courbe des Maclaurin et celle des Jacobi. On a un ellipsoïde de révolution et un ellipsoïde à trois axes comme figures d'équilibre.

Pour $g_1 < g < g_0$, la droite rencontre quatre fois la courbe des Jacobi, ce qui détermine deux ellipsoïdes à trois axes et une fois celle des Maclaurin. Il y a donc ici un ellipsoïde de Maclaurin comme figure d'équilibre, mais il y a deux ellipsoïdes de Jacobi différents, avec des axes différents, qui sont tous deux figures d'équilibre.

Enfin, pour $g < g_1$, il n'y a qu'un ellipsoïde de Maclaurin comme figure d'équilibre.

Les valeurs réelles des trois axes des Jacobi, et leurs variations, sont données dans les dernières lignes du Tableau, en prenant comme unité la valeur du grand axe au point de bifurcation [formule (2), § III]. La dernière ligne donne la densité correspondante en prenant comme unité sa valeur au point de bifurcation.

On voit que la valeur de a commence d'abord par croître jusqu'à un maximum 1,083 pour $s = 0{,}25$, et décroît ensuite lentement. Pour $s = 0{,}008$, on a encore $a = 0{,}38$, alors que b parti de la même valeur est déjà descendu à 0,034, à peine supérieur à $c = 0{,}033$.

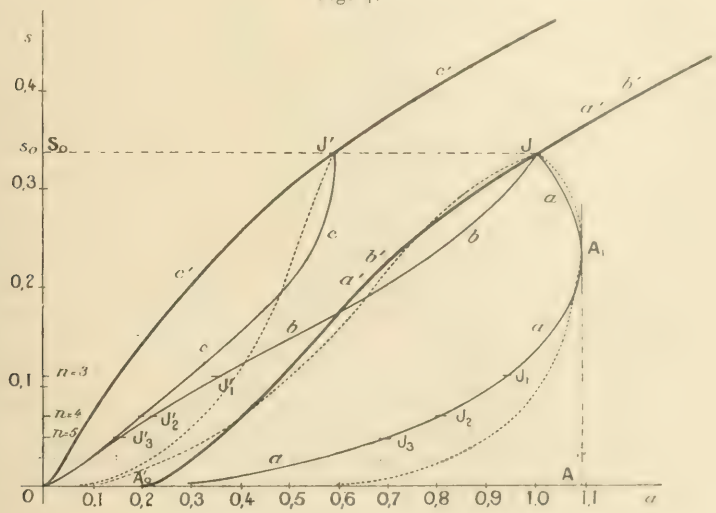
La figure 4 représente en ordonnée les valeurs de s et en abscisse les valeurs des différents axes. Les courbes représentatives des deux axes des Maclaurin sont en traits forts et celles des trois axes des Jacobi en traits fins.

Pour les valeurs de $s > 0{,}340$, on n'a que les deux courbes des deux axes des ellipsoïdes de révolution, dont les valeurs s'éloignent vers l'infini en se rapprochant l'une de l'autre, à mesure que s

tend vers 1, c'est-à-dire quand l'ellipsoïde se rapproche de la sphère.

Pour $s < 0,340$, les deux courbes des Maclaurin tendent vers zéro et vers A'_0, point qui détermine le rayon du disque limite. Les trois courbes en traits fins nous donnent l'évolution des axes des Jacobi, comparativement à ceux des Maclaurin, à mesure que s tend vers zéro et que les deux sortes d'ellipsoïdes tendent vers leurs figures limites : le disque aplati et l'aiguille allongée et évanouissante.

Fig. 4.



Au point de bifurcation J et J', les axes se séparent. Le grand axe a des Jacobi diverge normalement du grand axe a' du Maclaurin. Il commence par croître alors que a' décroissait et continue à décroître. Il passe par son maximum, puis décroît lentement en venant couper la courbe du Maclaurin près de sa valeur limite A'_0, rayon du disque aplati. Il y aura donc de nouveau ici un ellipsoïde de Jacobi qui aura même grand axe qu'un autre ellipsoïde de Maclaurin. Ce Jacobi sera très sensiblement un ellipsoïde de révolution allongé, et non aplati, comme le premier, car les deux axes b et c auront pris mêmes valeurs, comme on voit sur la figure que leurs courbes se sont fusionnées.

On voit également que la courbe du petit axe c se détache ver-

ticalement au point J′. Au voisinage de la bifurcation, le petit axe du Jacobi conserve donc un certain temps la même valeur qu'au point de bifurcation. Il diminue ensuite de plus en plus vite jusqu'à zéro.

La courbe de b, à partir de J, suit presque celle de a', puis va rejoindre celle de c. L'axe moyen du Jacobi varie d'abord, à partir du point de bifurcation, à peu près comme le grand axe du Maclaurin, dont il dérive. Il varie ensuite plus vite que lui, et finalement prend sensiblement la même valeur que le petit axe c.

Ainsi, au point de bifurcation, l'axe polaire du Maclaurin reste fixe, alors que le cercle équatorial s'aplatit, en faisant apparaître un grand axe a, qui s'allonge, et un axe moyen b, qui se raccourcit. C'est bien d'ailleurs ce qu'indique la théorie de la formation des nouvelles figures d'équilibre aux points critiques, pour le cas $n = 2$, qui est celui des figures ellipsoïdales de bifurcation.

On a tracé en pointillé les courbes des valeurs des axes des Jacobi en prenant $\frac{1}{\rho}$ comme ordonnée, au lieu de s. Elles conservent à peu près la même allure. Il y a bien toujours après la bifurcation deux Jacobi ayant même grand axe et des densités différentes. Les courbes précédentes montraient la valeur des axes avec l'aplatissement ou s. Celles-ci montrent directement la variation de ces axes avec la contraction, c'est-à-dire avec la densité ρ.

Pour les figures d'équilibre dérivées des Jacobi, on a pour $n = 3$, figures piriformes, $s = 0{,}117$ d'après les calculs de Darwin et Liapounoff. Ce sont précisément les éléments de la colonne 4 du Tableau ci-dessus. Pour n [illegible] et n [illegible], on a $s = 0{,}069$ et $s = 0{,}028$, valeurs qui correspondent sensiblement aux colonnes 5 et 6. On obtient les points représentatifs J_1, J_2, J_3 (*fig.* 4) pour les valeurs représentatives des grands axes, et J'_1, J'_2, J'_3 pour l'axe moyen.

Les valeurs de ces axes par rapport à la valeur a de l'axe de bifurcation sont données approximativement par la colonne correspondante du Tableau. Pour une masse de même M et μ que la Terre, on a obtenu $a = 46^{\text{km}}$ et $b = 26^{\text{km}},8$. L'ellipsoïde de Jacobi qui donnerait naissance à la *figure piriforme*, la première

figure de bifurcation susceptible de se dédoubler et de former un satellite, aurait alors dans ce cas pour longueur des axes $43^{km},5$ $18^{km},6$ et $14^{km},9$.

On voit également sur la figure que la valeur du grand axe en J_1 est assez voisine de celle de l'ellipsoïde de bifurcation en J, mais les valeurs des axes b et c en sont assez éloignées et se rapprochent déjà beaucoup l'une de l'autre en J'_1 et J_1.

Le volume serait 4,73 fois plus petit que pour l'ellipsoïde de bifurcation et la densité 217 millions de fois plus grande qu'actuellement. On voit à quel point la Terre en est loin. La vitesse de rotation de cet ellipsoïde serait près de deux fois plus grande que celle de l'ellipsoïde de bifurcation, exactement 1,9. Il ferait donc 4,7 tours par seconde. Ce serait presque la vitesse de rotation du disque limite des Maclaurin, qui serait de 5,35 tours par seconde.

En ajoutant à la Terre le moment de rotation de la Lune, les éléments correspondant à la figure piriforme seraient, pour les axes, 945^{km}, 404^{km} et 323^{km}, et la densité devrait être encore 2110 fois la densité actuelle.

Le Tableau des valeurs principales relatives à l'ellipsoïde terrestre celles qu'il aurait pu prendre au cours de son évolution cosmique montre que le fractionnement d'un astre, par suite de sa contraction, est tout à fait improbable. Nous allons faire les calculs pour cinq cas spéciaux intéressants : L'ellipsoïde de bifurcation des Maclaurin et des Jacobi, l'ellipsoïde de Maclaurin pour lequel la vitesse de rotation est maximum, enfin pour les trois premiers ellipsoïdes de Jacobi, qui donnent des figures de bifurcation voisines pouvant aboutir à un fractionnement en 2, 3 ou 4 composantes. Les deux premiers ellipsoïdes sont de révolution.

1° Nous considérons d'abord la densité ρ comme constante. On obtient alors facilement pour les ellipsoïdes de révolution, en désignant par l'indice 1 les valeurs actuelles :

$$a = \frac{r}{\sqrt{8}}, \qquad c = a\sqrt{8}.$$

$$\frac{\omega^2}{\omega_1^2} = \frac{h}{h_1}, \qquad h_1 = \frac{8}{15}c, \qquad \frac{\rho}{\rho_1} = \frac{a^3\omega}{r^3\omega_1} = \frac{\omega}{\omega_1}\frac{1}{\sqrt{8}}.$$

Pour les ellipsoïdes à trois axes, on a de même

$$c = r\sqrt[6]{st}, \qquad a = \frac{c}{\sqrt{s}}, \qquad b = \frac{c}{\sqrt{t}};$$

$$\frac{\mu}{\mu_1} = \frac{a^2 + b^2}{2r^2}\,\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{\omega}{\omega_1}\,\frac{s + t}{2(st)^{\frac{2}{3}}}$$

avec la même formule pour ω. On obtient le Tableau suivant, où l'on a désigné par $\mu' : \mu'_1$ la valeur que devrait avoir le rapport des moments de rotation dans le cas où μ_1 comprendrait celui de la Lune :

s	0,340	0,135	0,117	0,069	0,008
t	0,340	0,135	0,640	0,742	0,841
h	0,187	0,094	0,141	0,110	0,064
$\omega : \omega_1$	9,0	9,86	7,81	6,90	5,96
$\mu : \mu_1$	12,9	19,2	17,1	20,2	28,4
$\mu' : \mu'_1$	2,67	3,91	3,54	4,20	5,90
a km.	7,650	8,910	14,100	14,800	20,400
b km.	7,650	8,910	5,080	4,120	3,710
c km.	4,460	5,270	4,140	3,600	3,410

On voit par la valeur de μ que la Terre devrait avoir un moment de rotation près de 13 fois plus grand pour arriver à l'ellipsoïde de bifurcation des Jacobi (1re colonne) et 17 fois plus grand pour pouvoir arriver à la figure piriforme (3e colonne). Même en lui adjoignant son satellite, le moment de rotation serait encore 2,67 fois trop faible dans le premier cas et 3,54 dans le second. Il lui aurait fallu une valeur plus grande encore pour atteindre la figure de rupture, dérivée de la figure piriforme, et donner ainsi naissance à son satellite par un dédoublement de la masse primitive. Le grand axe de l'ellipsoïde terrestre, dans le cas de la figure piriforme, serait de 12 100km, presque le double de sa valeur actuelle, avec un petit axe trois fois plus petit de 4140km.

On voit également que, pour réaliser l'ellipsoïde de bifurcation des Maclaurin-Jacobi, il faudrait que la Terre tourne 9 fois plus vite, avec la densité actuelle. Comme pour chaque ellipsoïde d'équilibre, la valeur de $h = \frac{\omega}{\sqrt{\pi f \delta}}$ est déterminée, égale ici à 0,187, on peut dire également qu'il faudrait que la densité de la Terre soit 81 fois plus petite, avec la vitesse actuelle, pour réaliser cette

figure d'équilibre, soit de 0,068. Cette valeur est indépendante de la masse. Telle doit donc être la densité de tout astre tournant sur lui-même en 24 heures et qui réaliserait cette figure d'équilibre du Maclaurin-Jacobi.

En désignant par ω la vitesse nécessaire pour réaliser cette figure d'équilibre pour un autre astre de densité ρ et par ω_0 et ω_1 la vitesse correspondante à la densité ρ_1 de la Terre, on a

$$\frac{\omega^2}{\rho} = \frac{\omega_0^2}{\rho_1^2} = 9^2 \frac{\omega_1^2}{\rho_1}, \qquad \frac{\omega}{\omega_1'} = 9 \frac{\omega_1}{\omega_1} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_1}},$$

où ω_1' désigne la vitesse de rotation actuelle du second astre.

La densité du Soleil est environ 4 fois plus petite que celle de la Terre. Il devrait faire 4,5 tours pour réaliser cet ellipsoïde. Il en serait de même pour Jupiter, qui a presque la même densité que le Soleil : 1,36. Il fait près de 2,5 tours en 24 heures. Il lui suffirait d'avoir une vitesse double. Pour Saturne, il suffirait que sa vitesse soit de $\frac{4}{10}$ seulement plus grande qu'actuellement, exactement 1,37, pour atteindre la figure de bifurcation des ellipsoïdes de révolution aux ellipsoïdes à trois axes. Il aurait donc suffi d'un léger accroissement de vitesse pour trancher pratiquement la question de savoir si un ellipsoïde de révolution qui se contracte se transformera réellement en un ellipsoïde à trois axes.

D'ailleurs, la contraction future de ces astres ne pourra pas non plus réaliser cette figure. En effet, on a, en désignant par les indices 1 les valeurs relatives à la Terre actuellement, et en négligeant l'aplatissement et l,

$$\frac{h}{h_1} = \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \frac{\rho_1}{\rho}, \qquad g = 4h\sqrt{1 - l^2} = 4h.$$

D'après les calculs ci-dessus, h_1 est 81 fois plus petit que 0,187, valeur de h pour le Maclaurin-Jacobi. On obtient pour Jupiter $g = 0{,}224$ et pour Saturne 0,397. La valeur de g pour le Maclaurin-Jacobi est 1,28. Supposons que Jupiter et Saturne se condensent jusqu'à atteindre cette valeur et réaliser cette figure. On a $\omega\rho$ constant. On trouve que le rayon du grand axe de Jupiter serait alors 5,7 fois plus petit et sa densité 318 plus grande. Pour Saturne,

son grand axe serait seulement 3,2 fois plus petit et sa densité 56,5 fois plus grande, c'est-à-dire égale à 39,5. Il est peu probable que ces valeurs puissent être atteintes et la contraction maximum de Saturne ne lui permettra pas de dépasser les ellipsoïdes de révolution.

Pour la valeur de g correspondant au système Terre-Lune, on a 0,367. C'est sensiblement la valeur relative à Saturne. On a indiqué sur la courbe de la figure 3 le point figuratif L correspondant. Il est encore loin du point de bifurcation J.

2° Nous considérons le moment de rotation comme constant. On a alors ag constant et, en comparant aux valeurs actuelles avec e suffisamment petit, on peut écrire

$$\frac{r}{a} = \frac{g}{g_1}, \qquad g_1 = 4h_1 = \frac{32}{15}e.$$

Les valeurs de g du Tableau donneront a. On aurait b et c par leur valeur en fonction de s et t donnée plus haut. Leur rapport à a serait d'ailleurs le même que dans le Tableau précédent. Il est inutile de les écrire. Enfin ω sera déterminé par la condition de μ constant

$$a^2\omega = r^2\omega_1 \qquad \text{ou} \qquad (a^2 + b^2)\omega = 2r^2\omega_1,$$

pour les ellipsoïdes de révolution ou les ellipsoïdes à trois axes. La densité ρ sera déterminée par la condition de M constant :

$$\rho_1 r^3 = \rho a^3 b = \rho a^3 \sqrt{s}, \qquad \rho_1 r^3 = \rho abc = \rho a^3 \frac{s}{\sqrt{t}}.$$

On obtient ainsi le Tableau suivant :

s	0,340	0,135	0,117	0,069	0,028
g	1,276	2,45	1,55	1,66	2,22
$r : a$	139	263	146	180	240
$r : a$	5,97	11,3	6,31	7,74	10,4
a' km	1070	563	1010	824	617
$\rho' : \rho_1$	365	3980	1720	5800	35600

On voit qu'avec le moment de rotation actuel il faudrait que la contraction de la Terre soit telle que le grand axe ait une valeur 139 fois plus petite pour arriver à la figure d'équilibre de l'ellip-

soïde de bifurcation des Jacobi, et 146 fois plus pour atteindre la figure piriforme. En ajoutant le moment de rotation de la Lune, il faudrait que la contraction soit encore 6 et 6,31 fois plus grande, quatrième ligne $r : a'$. Le grand axe a' aurait alors 1070^{km} et 1010^{km}. La densité serait 365 fois et 1720 fois plus grande qu'actuellement, ce qui serait impossible.

G.-H. Darwin expliquait la formation de la Lune par dédoublement de la masse primitive avec l'accélération du mouvement de rotation dû à la contraction. Après la formation du satellite, la Terre, continuant à se contracter, aurait eu tendance à tourner encore plus vite, l'attraction de la Lune voisine aurait produit des marées considérables qui auraient provoqué un véritable freinage. La quantité de mouvement de la Terre aurait diminuée et celle de la Lune aurait augmentée. Notre satellite se serait éloigné alors jusqu'à la distance actuelle. On voit ici que le moment de rotation de l'ensemble, lequel n'a pas varié, n'a pas été suffisant dans le passé pour amener l'ensemble au voisinage des figures de rupture. Cette formation par gémination a donc été impossible. Même si la Lune avait continué à faire corps avec la Terre, il lui aurait été impossible d'atteindre une figure de rupture. La contraction nécessaire serait en effet beaucoup trop considérable, car elle lui donnerait une densité 80 fois plus grande que celle des métaux les plus lourds.

D'ailleurs, le ralentissement dû aux marées doit être sensiblement nul si l'aplatissement est de $\frac{1}{297}$, et l'éloignement des deux astres ne peut pas être attribué à cette cause.

En résumé, en introduisant *le grand axe* au lieu de la densité dans les formules de discussion des figures ellipsoïdales d'équilibre, *on obtient la variation de la grandeur des figures en même temps que la variation de la forme*, et l'on peut calculer les valeurs réelles des éléments au cours de l'évolution d'une masse qui se contracterait indéfiniment et dont le moment de rotation reste constant.

On démontre alors que l'*ellipsoïde de révolution* prend finalement la forme d'un disque aplati de rayon fini. A la limite, *la force centrifuge devient égale à l'attraction*, du bord au centre du disque.

Le rayon du disque limite pour la Terre supposée homogène serait de $9^{km},4$ et sa vitesse serait de 5,35 tours par seconde. Si l'on suppose la Lune réunie à la Terre, le moment de rotation totale devient près de cinq fois plus grand (4,82). Le disque limite aurait 219^{km} et ferait 2,86 tours par minute. Pour que la Terre tende à la limite vers un disque aplati ayant son rayon actuel, il faudrait qu'elle tourne 26 fois plus vite.

Pour les *ellipsoïdes de Jacobi*, les trois axes décroissent indéfiniment et tendent tous vers zéro. *La figure d'équilibre prend la forme d'une aiguille allongée, mais de longueur indéfiniment décroissante.* Comme pour les Maclaurin, à la limite, la force centrifuge devient égale à l'attraction, de l'extrémité du grand axe au centre.

L'introduction de l'expression du moment de rotation d'un *système double* dans la formule de variation des ellipsoïdes donne une *limite du rapport de la masse des composantes.* Il doit être plus grand que un tiers et les masses doivent être assez voisines.

Mais, *pour qu'il y ait dédoublement* pour une autre figure dérivée des ellipsoïdes, il faudrait que l'égalité entre la force centrifuge et l'attraction ait lieu *avant la limite*, avant que l'une des dimensions ne devienne nulle. En bifurquant vers les Jacobi, on s'éloigne de cette condition. On s'en rapprocherait peut-être avec la première figure de bifurcation des Maclaurin, aboutissant à l'anneau de Plateau.

On a calculé et représenté sur un plan *les courbes de variation* des Maclaurin et des Jacobi dans les trois cas principaux avec s comme variable : 1° en fonction de h, c'est-à-dire ρ constant et ω variable, ou réciproquement ; 2° en fonction de k, c'est-à-dire μ constant et ρ variable, ou inversement ; 3° en fonction de g, c'est-à-dire μ constant et a variable, ou inversement. Dans ce dernier cas, la courbe des Maclaurin aboutit à une limite maximum 2π. *Celle des Jacobi descend d'abord jusqu'à un minimum, puis croît sans limite.* On trouve un intervalle où il y a deux ellipsoïdes de Jacobi et un de Maclaurin comme figures d'équilibre.

Enfin, on a tracé la courbe des deux axes des Maclaurin et des trois axes des Jacobi, au cours de leur évolution, en fonction de s

et en fonction de $\frac{1}{2}$. A partir du point de bifurcation, le *grand axe du Jacobi croît d'abord jusqu'à un maximum*, malgré la contraction de l'ensemble, puis décroît indéfiniment.

Pour arriver aux figures de bifurcation, il faudrait que le rayon de la Terre se contracte de 1/40 fois sa valeur. Il aurait 160 km et la densité serait 46 millions de fois plus grande qu'actuellement. En supposant *la Lune* réunie à la Terre, avec son moment de rotation, cela ne suffirait pas encore. Son rayon serait 6 fois trop grand. Le système en était encore plus éloigné dans le passé et *n'a donc pas pu se former par dédoublement.*

Sur les représentations propres par quelques formes quadratiques de Liouville;

PAR E.-T. BELL,

Assistant Professor à l'Université de Washington (Etats-Unis).

Dans la deuxième série de son Journal, années 1860 à 1864, Liouville a donné quelques formules relatives aux nombres de représentations d'un entier par des formes quadratiques à quatre et six indéterminées et à coefficients numériques, en supprimant toujours les démonstrations. Soit $T(n)$ le nombre total des représentations de n par une forme homogène quadratique donnée, et $P(n)$ le nombre des représentations propres par la même forme. Alors on sait que Pépin [1] a démontré la plupart des formules $T(n)$; celles qu'il laisse de côté peuvent être prouvées de même, en s'appuyant sur les formules générales de Liouville et les fonctions elliptiques. Mais il ne traite pas les $P(n)$; je me propose ici de démontrer l'ensemble des formules $P(n)$ de Liouville en regardant les $T(n)$ associées comme connues.

Dans un premier Chapitre, j'éclaircis en peu de mots des principes généraux qui s'appliquent à toutes les formes quadratiques homogènes, et qu'on peut étendre sans difficulté à une forme homogène de degré quelconque. Les formules générales, dans ce premier Chapitre, sont toutes fort simples; on les saisira immédiatement des définitions. Dans le deuxième Chapitre je démontre les formules $P(n)$ de Liouville, pour lesquelles n n'a plus qu'un seul facteur premier spécial; et, dans le troisième, celles pour lesquelles n a deux facteurs

(1) *Journal de Mathématiques*, 3e série, t. VI, 1880, p. [illegible]

premiers spéciaux. Ces deux cas renferment tous les théorèmes P(n) de Liouville.

CHAPITRE I.

PRINCIPES FONDAMENTAUX.

1. Soit $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$ la décomposition de l'entier positif n en facteurs premiers distincts. Si $\alpha_i = 1$ ($i = 1, 2, \ldots, r$), on dit que n est *simple*. Le nombre $\pi(n)$ des facteurs premiers distincts de n, ici $\pi(n) = r$, est la *multiplicité* de n. Les notations

$$\sum_n F(d), \qquad \sum_n F(d)G(\delta)$$

signifient des sommes portant sur tous les diviseurs d de n, et sur tous les couples (d, δ) des diviseurs conjugués de n respectivement. Nous ferons un grand usage de la fonction $\mu(n)$: $\mu(n) = (-1)^{\pi(n)}$ ou 0, suivant que n est ou n'est pas simple, et $\mu(1) = 1$. En posant, pour abréger, $\mu(n) = \mu(n) = \mu^2(n)$, nous définissons la fonction $f(n)$ par l'identité

$$f(n) = \sum_n \mu(d)\mu^2(\delta).$$

Soit $D(n_1, n_2)$ le plus grand commun diviseur de n_1, n_2. Alors on sait que pour $D(n_1, n_2) = 1$, on a

$$\mu(n_1 n_2) = \mu(n_1)\mu(n_2);$$

et il y a le théorème bien connu

$$\sum_n \mu(d) = \mu(1) = 1, \qquad \sum_n \mu(d) = 0 \quad (n > 1).$$

De là, il est aisé de voir que, pour les mêmes valeurs de n_1, n_2,

$$f(1) = 1, \qquad f(n_1 n_2) = f(n_1) f(n_2);$$

et par là,

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}, \qquad f(n) = \prod_{i=1}^{r} f(p_i^{\alpha_i}).$$

C'est-à-dire, d'après la définition de Cahen [1], $g(n)$ et $f(n)$ sont des fonctions *régulières*. On verra bientôt que toutes les fonctions $T(n)$, $P(n)$ de Liouville s'expriment très simplement par un petit nombre d'autres fonctions régulières. De plus, p étant premier,

$$f(p) = 0, \qquad f(p^2) = -1, \qquad f(p^\alpha) = 0 \quad (\alpha > 2);$$

et l'on voit que $f(n) = (-1)^{\pi(n)}$ ou 0, suivant que n est ou n'est pas le carré d'un entier simple.

Soit maintenant $\varepsilon(n) = 1$ ou 0, suivant que n est ou n'est pas le carré d'un entier. Donc, $\varepsilon(n)$ étant évidemment régulière,

$$\sum_{1} f(d)\,\varepsilon(\delta) = 1, \qquad \sum_{n} f(d)\,\varepsilon(\delta) = 0 \quad (n > 1);$$

comme on s'en assure en le vérifiant pour $n = p^\alpha$, p premier, ce qui suffit, $f(n)$ étant aussi régulière. Cette identité est fondamentale.

Enfin, considérons une identité de la forme

$$H(n) = \sum_{n} h(d)\,\varepsilon(\delta),$$

valable pour tous les entiers $n > 0$. On a donc

$$H(d) = \sum_{d} h(d')\,\varepsilon(d'') \qquad (d = d'd'');$$

et de là,

$$\begin{aligned}\sum_{n} H(d)\,f(\delta) &= \sum_{n}\left[f(\delta)\sum_{d} h(d')\,\varepsilon(d'')\right] \qquad (n = d\delta,\ d = d'd''),\\ &= \sum_{n}\left[h(d)\sum_{\delta'} f(\delta')\,\varepsilon(\delta'')\right] \qquad (n = d\delta,\ \delta = \delta'\delta'');\\ &= h(n),\end{aligned}$$

par l'identité fondamentale. D'après cela, nous avons ce résultat capital : l'identité

$$H(n) = \sum_{n} h(d)\,\varepsilon(\delta)$$

---

(1) *Théorie des Nombres*, t. I, 1914, p. 384.

entraîne celle-ci,

$$h(n) = \sum_{n} \mathrm{H}(d)\, f(\delta).$$

Nous appellerons la fonction $h(n)$, liée à $\mathrm{H}(n)$ par la dernière relation, la *conjuguée* de $\mathrm{H}(n)$.

2. Soit $\Gamma(n)$ la conjuguée de $\gamma(n)$. D'après les définitions, on a

$$\Gamma(n) = \sum_{n} \gamma(d)\, f(\delta) = \sum_{n}' \gamma(d) - \sum_{n} \gamma(d),$$

où $\sum_{n}'$, $\sum_{n}$ portent respectivement sur tous les diviseurs d' de n dont les conjugués δ' sont des carrés des nombres simples à multiplicité paire, et sur tous les diviseurs d de n dont les conjugués δ sont des carrés des nombres simples à multiplicité impaire. Cette forme de $\Gamma(n)$ mène immédiatement à une formule symbolique d'une haute importance pour notre but. Soient p, q premiers, et

$$\mathrm{D}(n, p, q) = (1), \quad n = d\delta, \quad \alpha = \lambda, \quad \alpha, \delta = 0.$$

Donc, d'après ce qui précède, il est clair que

$$\Gamma(n) = \sum_{n} \gamma(d)\, f(\delta), \qquad \Gamma(pn) = \sum_{n} \gamma(pd)\, f(\delta),$$

$$\Gamma(p^2 n) = \sum_{n} [\gamma(p^2 d) - \gamma(d)]\, f(\delta), \qquad \Gamma(p^3 n) = \sum_{n} [\gamma(p^3 d) - \gamma(p^{-1} d)]\, f(\delta);$$

tout ce qui peut être compris dans la seule formule

$$\Gamma(p^\alpha n) = \sum_{n} [\gamma(p^\alpha d) - \gamma(p^{-1} d)]\, f(\delta),$$

avec la convention sous-entendue qu'on doit remplacer $\gamma(x)$ par zéro toutes les fois que x n'est pas un entier positif. Désormais on fait cette convention. Par cela, on voit d'une manière toute semblable que les seize cas auxquels conduit $\Gamma(p^\alpha q^\beta n)$ s'expriment par la formule

unique

$$\Gamma(p^\alpha q^\beta n) = \sum_n [\gamma(p^\alpha q^\beta d) - \gamma(p^\alpha q^{\beta-2} d) - \gamma(p^{\alpha-2} q^\beta d) - \gamma(p^{\alpha-2} q^{\beta-2} d)] \ldots;$$

et ainsi de suite pour

$$\Gamma(p^\alpha q^\beta r^\gamma n), \quad \Gamma(p^\alpha q^\beta r^\gamma t^\delta n) \ldots$$

avec les conditions

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots = 0, \quad D(n, p, q, r, t, \ldots) = 1,$$

$p, q, r, t, \ldots$ étant premiers. Pour arriver à la formule générale, il convient d'introduire un signe, $\prod'$, de la multiplication symbolique

$$\prod_{i=1}^{r}{}' [\gamma(p_i^{a_i}) - \gamma(p_i^{a_i-2})],$$

avec le sens que, la multiplication faite, chaque produit, tel que

$$\gamma(p_1^{a_1})\gamma(p_2^{a_2})\ldots\gamma(p_r^{a_r-2}),$$

par exemple, doit être remplacé par la fonction γ du produit des arguments des fonctions γ individuelles qui composent le produit spécifique; ainsi le produit choisi doit être remplacé par ceci :

$$\gamma(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_r^{a_r-2}).$$

Soient $p_1, p_2, \ldots, p_r$ premiers, et

$$D(p_1, p_2, \ldots, p_r, n) = 1; \quad n \neq d\theta; \quad a_1, a_2, \ldots, a_r = 0.$$

Donc, d'après ce qui précède, on établit par voie d'une induction complète facile la formule fondamentale

$$\Gamma(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_r^{a_r} n) = \sum_n \left\{ \prod_{i=1}^{r}{}' [\gamma(p_i^{a_i}) - \gamma(p_i^{a_i-2})] \ldots \right\} \ldots$$

où *tous* les produits entre « accolades » sont symboliques au sens

expliqué ci-dessus. Par là, quand $n = 1$, on a

$$\Gamma(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}) = \prod_{i=1}^{r} [\gamma(p_i^{\alpha_i}) - \gamma(p_i^{\alpha_i - 2})];$$

et ainsi, quand $\gamma(n)$ est une fonction régulière,

$$\Gamma(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}) = \prod_{i=1}^{r} [\gamma(p_i^{\alpha_i}) - \gamma(p_i^{\alpha_i - 2})].$$

En précisant les fonctions γ, ces trois formules contiennent tout ce dont nous usons pour démontrer les formules $P(n)$ de Liouville. Ceci arrive comme il suit.

5. Revenons à $T(n)$, $P(n)$. Selon les éléments de la théorie des formes quadratiques, on a l'identité

$$T(n) = \sum P\left(\frac{n}{d^2}\right),$$

le $\sum_n$ portant sur tous les $d > 0$ tels que $\frac{n}{d^2}$ soit un entier; ou, ce qui revient à la même chose,

$$T(n) = \sum_{\alpha} P(d)\,\Gamma(\alpha).$$

Par cela, et les n^{os} **1**, **2**, on a

$$P(n) = \sum_{\alpha} T(d)\,\Gamma(\alpha),$$

qu'on peut paraphraser : le nombre des représentations propres de n par une forme homogène quadratique donnée est égale à la somme des nombres totaux des représentations de tous les diviseurs de n dont les conjugués sont les carrés des nombres simples à multiplicité paire, moins la somme des nombres totaux des représentations de tous les diviseurs de n dont les conjugués sont les carrés des nombres simples à multiplicité impaire, toutes les représentations étant par la forme donnée. Dans cette forme, le résultat est tout à fait évident.

De même, toutes les lettres étant comme dans le n° **2**, et $T(x) = 0$

quand x n'est pas un entier > 0,

$$P(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_r^{a_r} n) = \sum_n \left\{ \prod_{i=1}^{r} [T(p_i^{a_i}) - T(p_i^{a_i-1})] \cdot [T(p_i^{a_i} d) - T(p_i^{a_i-1} d)] \right\} f(\delta),$$

tous les produits entre « accolades » étant symboliques; et, quand $T(n')$ est une fonction régulière de n',

$$n' = \prod_{i=1}^{r} p_i^{a_i}, \qquad P(n') = \prod_{i=1}^{r} [T(p_i^{a_i}) - T(p_i^{a_i-1})].$$

La première de ces formules (ou plutôt les théorèmes qu'on peut en dériver) se présente dans les Mémoires de Liouville seulement quand $r = 1, 2$. Ainsi de même pour la deuxième. C'est pourquoi nous examinerons le cas $r = 2$ en détail; on verra tout à l'heure que ces cas sont renfermés tous deux dans le deuxième.

4. Une fois de plus, j'insiste sur ce que $T(x) = 0$ quand x n'est pas un entier > 0. Cela compris, soient p, q premiers, et dans tout ce numéro soit

$$D(n, p, q) = 1; \qquad n = d\delta; \qquad a, b = 0; \qquad \alpha, \beta = 2.$$

Or, dans les théorèmes actuels de Liouville, il arrive toujours qu'on a

$$T(p^a q^b n) = g(a, b, n)\varphi(n),$$

où quelquefois $g(a, b, n)$ se réduit à une valeur spéciale quand l'un ou l'autre des $a, b = 0$ ou 1. Ici, $g(a, b, n)$ est une fonction invariable pour une forme spécifique, mais variante de forme à forme; et $\varphi(n)$ est une fonction régulière bien définie pour chaque forme. De plus, d'après la formule générale du n° **3**,

$$P(p^a q^b n) = \sum_n [T(p^a q^b d) - T(p^a q^{b-2} d) - T(p^{a-2} q^b d) - T(p^{a-2} q^{b-2} d)] f(\delta),$$

et d'ailleurs, si l'on avait, quels que soient a, b,

$$\sum_n T(p^a q^b d) f(\delta) = g(a, b, n)\Phi(n),$$

où $\Phi(n)$ est la conjuguée de $\varphi(n)$, on pourrait écrire

$$P(p, q, n) = G(a, b, n)\,\Phi(n),$$

où $G(a, b, n)$ est une fonction linéaire de

$$g(a, b, n),\quad g(a, b-2, n),\quad g(a-2, b, n),\quad g(a-2, b-2, n).$$

Toutes ces circonstances ont lieu dans les théorèmes de Liouville. Il y aura seize cas de $G(a, b, n)$, selon que

$$a = 0,\quad a = 1,\quad a = 2,\quad a = 3;\qquad b = 0,\quad b = 1,\quad b = 2,\quad b = 3.$$

Je les écris en entier, une fois pour toutes, pour la commodité de faire des calculs par rapport aux formes spéciales. D'après la formule générale, on a donc :

(1) $G(0, 0, n) = g(0, 0, n)$.
(2) $G(0, 1, n) = g(0, 1, n)$.
(3) $G(0, 2, n) = g(0, 2, n) - g(0, 0, n)$.
(4) $G(0, 3, n) = g(0, 3, n) - g(0, 3-2, n)$.
(5) $G(1, 0, n) = g(1, 0, n)$.
(6) $G(1, 1, n) = g(1, 1, n)$.
(7) $G(1, 2, n) = g(1, 2, n) - g(1, 0, n)$.
(8) $G(1, 3, n) = g(1, 3, n) - g(1, 3-2, n)$.
(9) $G(2, 0, n) = g(2, 0, n) - g(0, 0, n)$.
(10) $G(2, 1, n) = g(2, 1, n) - g(0, 1, n)$.
(11) $G(2, 2, n) = g(2, 2, n) - g(2, 0, n) - g(0, 2, n) + g(0, 0, n)$.
(12) $G(2, 3, n) = g(2, 3, n) - g(2, 3-2, n) - g(0, 3, n) + g(0, 3-2, n)$.
(13) $G(3, 0, n) = g(3, 0, n) - g(3-2, 0, n)$.
(14) $G(3, 1, n) = g(3, 1, n) - g(3-2, 1, n)$.
(15) $G(3, 2, n) = g(3, 2, n) - g(3, 0, n) - g(3-2, 2, n) + g(3-2, 0, n)$.
(16) $G(3, 3, n) = g(3, 3, n) - g(3, 3-2, n) - g(3-2, 3, n) + g(3-2, 3, n)$
$+ g(3-2, 3, n)$.

Quand $g(0, 0, n)$ ne se réduit pas à une forme spéciale, on peut omettre (3), (7), (11) et (15); quand ni $g(0, b, n)$ ni $g(a, 0, n)$ ne se réduit, on peut omettre quelques autres des sous-cas, mais il n'importe pas pour notre but de les distinguer plus nettement ici.

Lorsqu'il s'agit d'un seul facteur premier spécial, soit p, on écrit

$$g(a, b, n) = g(a, n), \qquad G(a, b, n) = G(a, n).$$

Alors on n'a qu'à tenir compte que de (1), (5), (9) et (13), qui deviennent

$$(1.1) \qquad G(0, n) = g(0, n),$$
$$(5.1) \qquad G(1, n) = g(1, n),$$
$$(9.1) \qquad G(2, n) = g(2, n) - g(0, n),$$
$$(13.1) \qquad G(\alpha, n) = g(\alpha, n) - g(\alpha - 2, n).$$

5. Les théorèmes de ce numéro ont une grande importance pour notre objet. Soit désormais $(a|b)$ le symbole généralisé de Legendre, $(a|b) = 0$ quand a, b ne sont pas premiers entre eux, et $(a|b)$ n'existe pas quand b est pair. Soient maintenant les α_i, β_j des entiers constants $\gtrless 0$, tels que

$$D(n, \alpha_i) = D(n, \beta_j) = 1 \qquad (i = 1, \ldots, r;\ j = 1, \ldots, s);$$

et les c, a_i, b_i des constantes arbitraires. Soit $\varphi(n)$ une fonction régulière, et $\Phi(n)$ sa conjuguée. Alors, $(n|\alpha_i)$, $(\beta_j|n)$ étant évidemment régulières, il en est de même pour les fonctions

$$(n|\alpha_i)\varphi(n), \quad (\beta_j|n)\varphi(n) \qquad (i = 1, \ldots, r;\ j = 1, \ldots, s).$$

Je dis que les conjuguées respectives de ces fonctions sont

$$(n|\alpha_i)\Phi(n), \quad (\beta_j|n)\Phi(n) \qquad (i = 1, \ldots, r;\ j = 1, \ldots, s).$$

En effet, il suffit de montrer que pour α, β des entiers constants $\gtrless 0$, tels que

$$D(n, \alpha) = D(n, \beta) = 1,$$

les conjuguées respectives de $(n|\alpha)\varphi(n)$, $(\beta|n)\varphi(n)$ sont $(n|\alpha)\Phi(n)$, $(\beta|n)\Phi(n)$. Soit $n = \Pi p^k$ la décomposition de n en facteurs premiers distincts. Alors, d'après les définitions, on a pour les conjuguées cherchées,

$$\Pi|(p^k|\alpha)\varphi(p^k) - (p^{k-2}|\alpha)\varphi(p^{k-2})|, \qquad \Pi|(\beta|p^k)\varphi(p^k) - (\beta|p^{k-2})\varphi(p^{k-2})|$$

d'où, puisque $(p^k|\alpha) = (p^{k-2}|\alpha)$, et $(\beta|p^k) = (\beta|p^{k-2})$, on tire, pour

les conjuguées,

$$\Pi(p^k|\alpha).\Pi[\varphi(p^k)-\varphi(p^{k-2})], \qquad \Pi(\beta|p^k).\Pi[\varphi(p_k)-\varphi(p^{k-2})],$$

c'est-à-dire

$$(n|\alpha)\Phi(n), \quad (\beta|n)\Phi(n).$$

De là, si l'on pose, pour abréger,

$$c=\sum_{i=1}^{r} a_i(n|\alpha_i)+\sum_{i=1}^{s} b_i(\beta_i|n)=h(c,a,b,\alpha,\beta,r,s),$$

la conjuguée de $h(c,a,b,\alpha,\beta,r,s)\varphi(n)$ est

$$h(c,a,b,\alpha,\beta,r,s)\Phi(n).$$

Soient enfin les α', β', les α'', β'', ... des entiers assujettis aux mêmes conditions que les α, β. D'après les propriétés classiques du symbole $(a|b)$, il est clair que la fonction

$$h(c',a',b',\alpha',\beta',r',s').h(c'',a'',b'',\alpha'',\beta'',r'',s'')\ldots h(c^{m},a^{m},b^{m},\alpha^{m},\beta^{m},r^{m},s^{m}),$$

quand on fait toutes les multiplications, est encore une fonction de la même sorte que $h(c,a,b,\alpha,\beta,r,s)$, soit

$$h(c_1,a_1,b_1,\alpha_1,\beta_1,r_1,s_1).$$

De là, et des résultats déjà trouvés, la conjuguée de

$$h(c_1,a_1,b_1,\alpha_1,\beta_1,r_1,s_1)\varphi(n)$$

se déduit de celle-ci en remplaçant $\varphi(n)$ par $\Phi(n)$. On peut, si l'on veut, regarder la fonction h dans cette conjuguée, décomposée en facteurs, comme l'a toujours fait Liouville pour les cas de deux facteurs dont il s'est occupé. Il y a un résultat plus général pour les fonctions φ non régulières, et pour d'autres fonctions que celle de Legendre, mais cela n'est pas à propos pour notre but. Les fonctions g du n° **4** sont toutes ou des constantes numériques ou des fonctions h dans les théorèmes de Liouville.

6. Passons aux $\varphi(n)$, $\Phi(n)$ qui se présentent dans les Mémoires de

Liouville. Soient désormais, comme Liouville l'a constamment posé, m un entier positif impair, et l un entier impair, positif ou négatif, notations que nous conservons dans tout ce qui suit. Soit $m = \Pi p^a$ la décomposition de m en facteurs premiers distincts. Définissons les fonctions ω, ω' par les identités, pour lesquelles on a toujours $D(m, l) = 1$:

$$\omega_r(m, l) = \sum_m (d \mid l)\, d^r \equiv \sum_m (-1)^{\frac{1}{2}(l-1)(d-1)} (l \mid d)\, d^r,$$

$$\omega_r(l, m) = \sum_m (l \mid d)\, d^r \equiv \sum_m (-1)^{\frac{1}{2}(l-1)(d-1)} (d \mid l)\, d^r,$$

$$\omega'_r(m, l) = \sum_m (\delta \mid l)\, d^r = \sum_m (-1)^{\frac{1}{2}(l-1)(\delta-1)} (l \mid \delta)\, d^r,$$

$$\omega'_r(l, m) = \sum_m (l \mid \delta)\, d^r = \sum_m (-1)^{\frac{1}{2}(l-1)(\delta-1)} (\delta \mid l)\, d^r,$$

$$\omega_r(1, l) = \omega_r(l, 1) = \omega'_r(1, l) = \omega'_r(l, 1) = 1.$$

Toutes ces fonctions étant évidemment régulières, on voit sans peine que

$$\omega'_r(m, l) = \prod \left[\frac{p^{r(a+1)} - (p^{a+1} \mid l)}{p^r - (p \mid l)}\right], \qquad \omega'_r(l, m) = \prod \left[\frac{p^{r(a+1)} - (l \mid p^{a+1})}{p^r - (l \mid p)}\right],$$

$$\omega_r(m, l) = (m \mid l)\, \omega'_r(m, l), \qquad \omega_r(l, m) = (l \mid m)\, \omega'_r(l, m),$$

les Π portant sur tous les facteurs premiers distincts de m. En remarquant que $(p^{a+1} \mid l) = (p^{a-1} \mid l)$, et de là

$$\omega'_r(p^a, l) - \omega'_r(p^{a-2}, l) = \frac{p^{r(a+1)} - p^{r(a-1)}}{p^r - (p \mid l)} = p^{ar}\left[1 - (p \mid l)\frac{1}{p^r}\right],$$

on a, pour la conjuguée $\Omega'_r(m, l)$ de $\omega'_r(m, l)$,

$$\Omega'_r(m, l) \equiv \prod [\omega'_r(p^a, l) - \omega'_r(p^{a-2}, l)] = m^r \prod \left[1 - (p \mid l)\frac{1}{p^r}\right].$$

De même, $\Omega'_r(l, m)$, $\Omega_r(m, l)$, $\Omega_r(l, m)$ étant les conjuguées respectives de $\omega'_r(l, m)$, $\omega_r(m, l)$, $\omega_r(l, m)$, on trouve

$$\Omega'_r(l, m) = m^r \prod \left[1 - (l \mid p)\frac{1}{p^r}\right] = m^r \prod \left[1 - (-1)^{\frac{1}{2}(l-1)} (p \mid l)\frac{1}{p^r}\right],$$

$$\Omega_r(m, l) = (m \mid l)\, \Omega'_r(m, l), \qquad \Omega_r(l, m) = (l \mid m)\, \Omega'_r(l, m).$$

Rien n'empêche de définir d'une façon toute semblable des fonctions $\omega_r(2l, m)$, $\omega_r(2l, m)$: mais on ne peut définir ni $\omega_r(m, 2l)$ ni $\omega_r(m, 2l)$, puisque le symbole (a, b) n'existe pas quand b est pair. En effet, pour cela, les fonctions ω, ω' étant régulières, il suffit de définir $\omega_r(2l, m)$ et $\omega_r(2l, m)$ pour $l = \pm 1$, ce qu'on fait simplement en remplaçant l par ± 2 dans toutes les formules pour $\omega_r(l, m)$, $\omega_r(l, m)$. Ainsi, on a

$$\omega_r(\pm 2, m) = \sum_m (\pm 2 \mid \delta)^{\delta} d^r,$$

$$\Omega_r(\pm 2, m) = m^r \prod \left[1 - (\pm 2 \mid p)\frac{1}{p^r}\right],$$

$$\omega_r(\pm 2, m) = \sum_m (\pm 2 \mid d)\, d^r = (\pm 2 \mid m)\, \omega_r(\pm 2, m),$$

$$\Omega_r(\pm 2, m) = (\pm 2 \mid m)\, \Omega_r(\pm 2, m),$$

où, dans chaque cas, on prend les signes ou tous deux positifs, ou tous deux négatifs.

Enfin, si, dans la notation de Liouville, $\zeta_r(n)$ égale la somme des puissances $r^{\text{ièmes}}$ de tous les diviseurs de n, et $Z_r(n)$ la conjuguée de $\zeta_r(n)$, on trouve de même, pour $n = \Pi p^a$,

$$\zeta_r(n) = \prod \left[\frac{p^{(a+1)r} - 1}{p^r - 1}\right], \qquad Z_r(n) = n^r \prod \left[1 + \frac{1}{p^r}\right].$$

Cette fonction $\zeta_r(n)$ est aussi régulière. Il est clair que, dans chaque formule relative aux fonctions ω_r, Ω_r, on peut, en multipliant par le symbole propre de Legendre, échanger ω en ω' et Ω en Ω' ou vice versa. Alors on peut prendre ou les fonctions ω_r, Ω_r, ou ω'_r, Ω'_r comme fondamentales. Pour des raisons qui s'offriront d'elles-mêmes, nous choisissons ω'_r, Ω'_r pour les fonctions fondamentales, comme aussi l'a fait Liouville.

CHAPITRE II.

LES FORMULES $P(n)$ DE LIOUVILLE À UN SEUL FACTEUR PREMIER SPÉCIAL.

7. Considérons dans leur ensemble les dix-huit formes suivantes de Liouville [1] :

(17) $x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)$,

(18) $x^2 + y^2 + 4(z^2 + t^2)$,

(19) $x^2 + y^2 + z^2 + 8t^2$,

(20) $x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2$,

(20a) $x^2 + 4(y^2 + z^2 + t^2)$,

(21) $x^2 + 2(y^2 + z^2 + 2t^2)$,

(22) $x^2 + 8(y^2 + z^2 + t^2)$,

(23) $x^2 + 4(y^2 + z^2 + 2t^2)$,

(24) $x^2 + 2(y^2 + 2z^2 + 2t^2)$,

(25) $x^2 + 2(y^2 + 4z^2 + 4t^2)$,

(26) $x^2 + y^2 + 2(z^2 + 2t^2)$,

(27) $x^2 + y^2 + 4(z^2 + 2t^2)$,

(28) $x^2 + xy + y^2 + z^2 + zt + t^2$,

(29) $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2$,

(30) $x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)$,

(31) $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)$,

(32) $x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)$,

(33) $x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)$.

Pour donner, d'après les énoncés de Liouville, les $T(n)$ pour (17) à (33), nous restons dans les notations du n° 4; c'est-à-dire

$$T(p^a n) = g(a, n)\varphi(n), \qquad D(p, n) = 1, \qquad (a > 0);$$

donc

$$P(p^a n) = G(a, n)\Phi(n) \qquad (a > 0).$$

Ici, pour toutes les formes, la seule forme (28) exceptée, on a

$$p = 2, \qquad n = m.$$

Sauf pour (28), le nombre a, dans chaque symbole $g(a, m)$, est l'exposant d'une puissance de 2, de sorte que $n = 2^a m$, et il s'agit de la fonction

$$T(2^a m) = g(a, m)\varphi(m).$$

---

[1] On les retrouvera dans la deuxième série du *Journal de Mathématiques pures et appliquées* comme il suit : (17), (18), t. V, 1860, p. [illegible]; (19), (20), t. VI, 1861, p. 324-328, 440-448; (21), (22), (23), (24), (25), (26), (27), t. VII, 1862, p. 1-4, 5-8, 9-12, 62-64, 65-68, 99-102, 103-104; (28), t. VIII, 1863, p. 141-144; (29), (30), (31), (32), (33), t. IX, 1864, p. 161-174, 175-184, 257-272, 273-280, 421-424.

Je rappelle que m est toujours impair. Pour la forme (28), il s'agit de

$$T(2^r n) = g(a, n)\varphi(n), \qquad D(n, 3) = 1.$$

Pour abréger, nous écrirons les résultats en Table.

TABLE I.

Forme.	Fonction φ.	Fonction Φ.
(17), (18), (20), (20a), (21).....	$\zeta_1(m)$	$Z_1(m)$
(19), (22), (23), (24), (25), (26), (27).....	$\omega_1(2, m)$	$\Omega_1(2, m)$
(28), avec $D(3, n) = 1$.....	$\zeta_1(n)$	$Z_1(n)$
(29), (30).....	$\omega_2(-2, m)$	$\Omega_2(-2, m)$
(31), (32), (33).....	$\omega_2'(-1, m)$	$\Omega_2'(-1, m)$

On trouvera les φ et leurs conjuguées respectives Φ dans le n° 6. En écrivant les $g(a, n)$, nous ferons un plus grand emploi du symbole généralisé de Legendre que n'a fait Liouville; mais on s'assurera sans peine, en renvoyant aux Mémoires cités, que nos notations s'accordent au fond avec les siennes. Le sens du signe $g(a, m)$ a été déjà expliqué plus haut.

TABLE II.

$$a > 0, \qquad b > 0, \qquad r > 1, \qquad s > 2.$$

Forme.	Fonctions g.
(17)	$g(0, m) = \frac{1}{4}, \quad g(1, m) = 8, \quad g(r, m) = 2\frac{1}{4}.$
(18)	$g(0, m) = 2[1 + (-1\|m)], \quad g(1, m) = \frac{1}{4}, \quad g(2, m) = 8, \quad g(s, m) = 2\frac{1}{4}.$
(19)	$g(0, m) = \frac{1}{4} + 2(2\|m) + (-2\|m) + 2(-1\|m), \quad g(1, m) = 12, \quad g(r, m) = 2[2^r - (2\|m)].$
(20)	$g(0, m) = \frac{1}{4} + 2(-1\|m), \quad g(1, m) = 12, \quad g(2, m) = 8, \quad g(s, m) = 2\frac{1}{4}.$
(20a)	$g(0, m) = 1 + (-1\|m), \quad g(1, m) = 0, \quad g(2, m) = 8, \quad g(s, m) = 2\frac{1}{4}.$
(21)	$g(0, m) = 2, \quad g(1, m) = \frac{1}{4}, \quad g(2, m) = 8, \quad g(s, m) = 2\frac{1}{4}.$
(22)	$g(0, m) = \frac{1}{2}[1 + (2\|m) + (-2\|m) + (-1\|m)], \quad g(1, m) = 0, \quad g(r, m) = 2[2^{r-1} - (2\|m)].$
(23)	$g(0, m) = 1 + (-1\|m), \quad g(1, m) = 0, \quad g(r, m) = 2[2^r - (2\|m)].$
(24)	$g(0, m) = 2, \quad g(b, m) = 2[2^r - (2\|m)].$

TABLE II (suite).

Forme.	Fonctions g.
(25)	$g(0, m) = 1 + (-2\|m)$, $\quad g(1, m) = 2$, $\quad g(r, m) = 2[2^{r-1} - (-2\|m)]$.
(26)	$g(0, m) = 4$, $\quad g(b, m) = 2[2^{b+1} - (-2\|m)]$.
(27)	$g(0, m) = 2[1 + (-1\|m)]$, $\quad g(1, m) = 4$, $\quad g(r, m) = 2[2^r - (-1\|m)]$.
(28)	$D(3, n) = 1$, $\quad g(a, n) = 12$.
(29)	$g(a, m) = \frac{2}{3}[4^{a+2} - (-2\|m)]$.
(30)	$g(a, m) = \frac{2}{3}[4^{a+1} - (-2\|m)]$.
(31)	$g(0, m) = 8$, $\quad g(b, m) = 4[2^{2b+1} - (-1\|m)]$.
(32)	$g(0, m) = 4$, $\quad g(b, m) = 4[4^b - (-1\|m)]$.
(33)	$g(0, m) = 2$, $\quad g(1, m) = 8$, $\quad g(r, m) = 4[2^{2r-1} - (-1\|m)]$.

Par exemple, on a, pour la forme (20), $T(m) = 6\zeta_4(m)$ si $m \equiv 1 \bmod 4$, mais $2\zeta_4(m)$ si $m \equiv -1 \bmod 4$; $T(2m) = 12\zeta_4(m)$, $T(4m) = 8\zeta_4(m)$, et enfin $T(2^s m) = 24\zeta_4(m)$ pour $s > 2$, quelles que soient les formes linéaires de l'entier impair m.

8. Pour trouver les $P(n)$ pour les formes (17) à (33), on n'a qu'à appliquer les formules (1.1), (5.1), (9.1), (13.1) du n° **4** à la Table II, les Φ étant déjà données par la troisième colonne de la Table I. En effet, on voit, par les théorèmes du n° **3**, qu'on peut dériver les $G(a, m)$ immédiatement au moyen des formules citées par des substitutions directes des fonctions g données dans la Table II. De plus, par (1.1), (5.1), on a toujours

$$G(0, n) = g(0, n), \qquad G(1, n) = g(1, n).$$

Il suffit donc de transcrire les formules qu'on obtient ainsi seulement dans les cas $G(\alpha, m)$ où $\alpha > 1$, en s'appuyant sur (9.1), (13.1) et la Table II. Ainsi, on trouve pour la forme (20), par exemple :

$$G(2, m) = g(2, m) - g(0, m) = 8 - [4 + 2(-1\|m)] = 2[2 - (-1\|m)],$$
$$G(3, m) = g(3, m) - g(1, m) = 24 - 12 = 12,$$
$$G(4, m) = g(4, m) - g(2, m) = 24 - 8 = 16,$$
$$G(5, m) = g(5, m) - g(3 = 2, m) = 0 \quad \text{pour} \quad s > 4.$$

C'est-à-dire, en renvoyant à la Table I pour la forme de Φ relative à la forme (20) :

$$P(4m) = 2[2 - (-1)^m]Z_1(m), \qquad P(8m) = 12Z_1(m),$$
$$P(16m) = 16Z_1(m), \qquad P(2^\beta m) = 0 \quad (\beta > 4),$$

en rappelant que pour cette forme le nombre a dans $g(a, m)$ est un exposant d'une puissance de 2, et par là, ainsi de même pour a dans $G(a, m)$.

En ajoutant les valeurs de $P(m)$, $P(2m)$ d'après la remarque ci-dessus,

$$P(m) = G(0, m)\Phi(m) = g(0, m)\Phi(m) = [4 - (-1)^m]Z_1(m),$$
$$P(2m) = G(1, m)\Phi(m) = g(1, m)\Phi(m) = 12Z_1(m),$$

on a tout ce qui concerne $P(n)$ pour la forme (20). De même on calcule la Table III, d'où on lit d'un coup d'œil tous les faits $P(n)$ pour les formes (17) à (33).

TABLE III.

$$G(0, n) = g(0, n), \qquad G(1, n) = g(1, n),$$
$$b > 0, \qquad s > 1, \qquad t > 2, \qquad \alpha > 3, \qquad \beta > 4.$$

Forme.	Fonctions G
(17)	$G(2, m) = 20, \quad G(3, m) = 16, \quad G(\alpha, m) = 0.$
(18)	$G(2, m) = 2[3 - (-1)^m], \quad G(3, m) = 20, \quad G(4, m) = 16,$ $G(\beta, m) = 0.$
(19)	$G(2, m) = 4 - (2)^m - (-2)^m - 2(-1)^m,$ $G(3, m) = 2[2 + (2)^m], \quad G(\alpha, m) = 3 \cdot 2^{\alpha-2}.$
(20)	$G(2, m) = 2[2 + (-1)^m], \quad G(3, m) = 12, \quad G(4, m) = 16,$ $G(\beta, m) = 0.$
(20a)	$G(2, m) = 7 - (-1)^m, \quad G(3, m) = 24, \quad G(4, m) = 16,$ $G(\beta, m) = 0.$
(21)	$G(2, m) = 6, \quad G(3, m) = 20, \quad G(4, m) = 16, \quad G(\beta, m) = 0.$
(22)	$G(2, m) = \frac{1}{2}[7 - 3(2)^m - (-2)^m - (-1)^m],$ $G(3, m) = 2[4 - (2)^m], \quad G(\alpha, m) = 3 \cdot 2^{\alpha-2}.$
(23)	$G(2, m) = 7 - 2(2)^m - (-1)^m, \quad G(3, m) = 2[8 - (2)^m],$ $G(\alpha, m) = 3 \cdot 2^{\alpha-1}.$
(24)	$G(2, m) = 2[3 - (2)^m], \quad G(t, m) = 3 \cdot 2^{t-1}.$

TABLE III (suite).

Forme.	Fonctions G.
(25)	$G(2, m) = 3 - 2(2\|m) - (-2\|m)$. $G(3, m) = 2[3 - (2\|m)]$. $G(\alpha, m) = 3 . 2^{\alpha-2}$.
(26)	$G(2, m) = 2[6 - (2\|m)]$. $G(t, m) = 3 . 2^{\alpha}$.
(27)	$G(2, m) = 2[3 - (2\|m) - (-1\|m)]$. $G(3, m) = 2[6 - (2\|m)]$. $G(\alpha, m) = 3 . 2^{\alpha-1}$.
(28)	$D(3, n) = 1$, $G(b, n) = 0$.
(29)	$G(s, m) = 5 . 2^{2\alpha-1}$.
(30)	$G(s, m) = 5 . 2^{2\alpha-1}$.
(31)	$G(2, m) = 4[30 - (-1\|m)]$. $G(t, m) = 15 . 2^{\alpha-1}$.
(32)	$G(2, m) = 4[15 - (-1\|m)]$. $G(t, m) = 15 . 2^{\alpha-1}$.
(33)	$G(2, m) = 2[15 - 2(-1\|m)]$, $G(3, m) = 4[30 - (-1\|m)]$. $G(\alpha, m) = 15 . 2^{2\alpha-1}$.

Tous ces résultats s'accordent avec les énoncés de Liouville.

CHAPITRE III.

LES FORMULES $P(n)$ DE LIOUVILLE À DEUX FACTEURS PREMIERS SPÉCIAUX.

9. Il y a dix formes [1] à considérer :

(34) $x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2)$.

(35) $x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$,

(36) $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2$,

(37) $x^2 + y^2 + z^2 + zt + t^2$,

(38) $x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2$,

(39) $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2$,

(40) $x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 6t^2$,

(41) $x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2$,

(42) $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2$,

(43) $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2$.

---

[1] *Loc. cit.* (34), t. V, p. 147-152; (35), (36), (37), (38), (39), (40), t. VIII, p. 105-114, 115-119, 120-123, 124-128, 129-133, 134-136; (41), (42), (43), t. IX, p. 1-12, 13-16, 89-104. Les formes (35), (36) et (41) ont un intérêt historique; elles étaient les premières, sommes de carrés exceptées, pour lesquelles on trouva les $T(n)$ et $P(n)$ en fonction finie des diviseurs de n. On les rencontre pour la première fois dans un Mémoire célèbre d'Eisenstein (*Journal de Crelle*, t. XXXV, 1847, p. 134); mais c'est à Liouville qu'on doit le premier exposé complet des valeurs de $T(n)$, $P(n)$ pour toute forme de n.

dans les notations du n° **4**, soit

$$T(p^a q^b n) = g(a, b, n)\varphi(n), \qquad P(p^a q^b n) = G(a, b, n)\Phi(n).$$

Alors, pour les formes (41), (42), on a $p = 2$, $q = 5$, $n = m$ (impair, comme toujours) et $D(m, 5) = 1$. Pour toutes les autres, $p = 2$, $q = 3$ et $D(m, 3) = 1$. C'est-à-dire, pour (41), (42), il s'agit de

$$T(2^a 5^b m), \quad P(2^a 5^b m) \quad \text{avec} \quad D(m, 5) = 1,$$

et pour toutes les autres, de

$$T(2^a 3^b m), \quad P(2^a 3^b m) \quad \text{avec} \quad D(m, 3) = 1.$$

Dans chaque cas donc, les sens de a, b, n sont définis. Ces sens sont valables dans tout ce qui va suivre. On a, de plus, d'après les énoncés de Liouville :

TABLE IV.

Forme.	Fonction φ.	Fonction Φ.
(34)	$\zeta_1(m)$	$Z_1(m)$
(35), (36), (37), (38), (39), (40)	$\omega_1(3, m)$	$\Omega_1(3, m)$
(41), (42)	$\omega_1(m, 5)$	$\Omega_1(m, 5)$
(43)	$\omega_1(m, 3)$	$\Omega_1(m, 3)$

TABLE V.

$t = 0, \quad t = 1, \quad \delta = 0, \quad \delta = 0.$

Forme.	Fonctions g.
(34)	$g(0, \delta, m) = 4, \quad g(t, \delta, m) = 4[2^{t+1} - 3]$
(35)	$g(\alpha, \delta, m) = A(\alpha, \delta, m)B(\alpha, \delta, m)$. $A(\alpha, \delta, m) = 2^{\alpha+1} + (-1)^{\alpha+\delta}(-1)(m)$, $B(\alpha, \delta, m) = 3^{\delta+1} - (-1)^{\alpha+\delta}(m\|3)$.
(36)	$g(\alpha, \delta, m) = A(\alpha, \delta, m)B(\alpha, \delta, m)$. $A(\alpha, \delta, m) = 2^{\alpha+1} - (-1)^{\alpha+\delta}(-1)(m)$, $B(\alpha, \delta, m) = 3^{\delta+1} + (-1)^{\alpha+\delta}(m\|3)$.
(37)	$g(\alpha, \delta, m) = A(\alpha, \delta, m)B(\alpha, \delta, m)$. $A(\alpha, \delta, m) = 2^{\alpha+1} + (-1)^{\alpha+\delta}(-1)(m)$, $B(\alpha, \delta, m) = 3^{\delta+1} - (-1)^{\alpha+\delta}(m\|3)$.
(38)	$g(t, \delta, m) = A(t, \delta, m)B(t, \delta, m)$, $g(0, \delta, m) = B(0, \delta, m)$. $A(t, \delta, m) = 2^t - (-1)^{t+\delta}(-1)(m)$, $B(t, \delta, m) = 3^{\delta+1} - (-1)^{t+\delta}(m\|3)$.
(39)	$g(t, \delta, m) = A(t, \delta, m)B(t, \delta, m)$, $g(0, \delta, m) = B(0, \delta, m)$. $A(t, \delta, m) = 2^t - (-1)^{t+\delta}(-1)(m)$, $B(t, \delta, m) = 3^{\delta+1} - (-1)^{t+\delta}(m\|3)$.

TABLE V (suite).

Forme.	Fonctions g.
(40)	$g(r, \beta, m) = A(r, \beta, m)B(r, \beta, m)$
	$g(0, \beta, m) = \frac{1}{2}B(0, \beta, m), \qquad g(1, \beta, m) = B(1, \beta, m)$
	$A(r, \beta, m) = 2^{r+1} - (-1)^{r+\beta}(-1)^{\beta}(m), \qquad B(r, \beta, m) = 3^{\beta+1} - (-1)^{r+\beta}(m)(3).$
(41)	$g(t, \beta, m) = \frac{1}{3}A(t, \beta, m)B(t, \beta, m), \qquad g(0, \beta, m) = B(0, \beta, m)$
	$A(t, \beta, m) = 2^{t+1} - (-1)^t.5, \qquad B(t, \beta, m) = 5^{\beta+1} - (-1)^t(m)(5).$
(42)	$g(t, \beta, m) = \frac{1}{3}A(t, \beta, m)B(t, \beta, m), \qquad g(0, \beta, m) = B(0, \beta, m).$
	$A(t, \beta, m) = 2^{t+2} - (-1)^t.5, \qquad B(t, \beta, m) = 5^{\beta+1} - (-1)^t(m)(5).$
(43)	$g(t, \beta, m) = \frac{1}{5}A(t, \beta, m)B(t, \beta, m), \qquad g(0, \beta, m) = B(0, \beta, m).$
	$A(t, \beta, m) = 4^{t+1} - (-1)^t.9, \qquad B(t, \beta, m) = 9^{\beta+1} - (-1)^t(m)(3).$

Exactement, les valeurs de $g(0, \beta, m)$ et celle de $g(1, \beta, m)$, dans (40), ne sont pas définies dans la Table; mais, par convention, on pose $t = 0$ dans $B(t, \beta, m)$ pour obtenir les $g(0, \beta, m)$, et ainsi de même en posant $r = 0, 1$ dans $B(r, \beta, m)$ pour la forme (40). Après les éclaircissements pour les Tables du Chapitre II, il n'est nécessaire de rien ajouter pour celles-ci. Les liens entre ces dix formes, révélés par les Tables, sont frappants; mais je ne m'arrête pas ici pour les discuter.

10. On peut écrire les G pour ces formes, en s'appuyant sur les théorèmes du n° **5**, directement par l'application des formules (1) à (16) à la Table V. Mais en tenant compte de la forme des fonctions g, on peut grandement abréger les calculs, en remarquant quelques relations générales entre les fonctions G. Approfondissons cela un peu. D'abord, pour chacune des fonctions A dans la Table V, on a la relation évidente

$$(\beta') \qquad A(\alpha', \beta', m) = A(\alpha', \beta' + 2, m),$$

où $(\alpha', \beta') = (\alpha, \beta)$, (t, β) ou (r, β) respectivement, selon le cas; et pour chacune des fonctions B,

$$(\alpha') \qquad B(\alpha', \beta', m) = B(\alpha' + 2, \beta', m).$$

En deuxième lieu, on peut résumer les seize formules (1) à (16) comme voici. Soit désormais

$$a \geqq 1, \quad b \geqq 1, \quad r \geqq 1, \quad s \geqq 1, \quad k \geqq 2, \quad c \geqq 3.$$

Alors, les formules suivantes (1′), (2′), (3′), (4′) renferment respectivement les groupes de quatre formules (1), (2), (5), (6); (3), (4), (7), (8); (9), (10), (13), (14); (11), (12), (15), (16):

$$(1') \qquad G(a, b, m) = g(a, b, m),$$

$$(2') \qquad G(a, s, m) = g(a, s, m) - g(a, s-2, m),$$

$$(3') \qquad G(r, b, m) = g(r, b, m) - g(r-2, b, m),$$

$$(4') \qquad G(r, s, m) = g(r, s, m) - g(r, s-2, m) - g(r-2, s, m) + g(r-2, s-2, m).$$

Or, on lit les quatre cas contenus dans (1′) directement de la Table V; il n'y a pas nécessité de les écrire dans la Table VI ci-après. Il reste à considérer (2′), (3′) et (4′). Soit, pour le moment,

$$g(\alpha, \beta, m) = \lambda A(\alpha, \beta, m) B(\alpha, \beta, m),$$

où λ est constant; et supposons d'abord que $g(0, \beta, m)$ ne se réduise pas. Alors, en se servant de la relation (β'), on trouve pour (2′)

$$\begin{aligned} G(a, s, m) &= \lambda [A(a, s, m) B(a, s, m) - A(a, s-2, m) B(a, s-2, m)] \\ &= \lambda A(a, s, m) [B(a, s, m) - B(a, s-2, m)]; \end{aligned}$$

et de même par la relation (α) pour (3′), et (α'), (β) pour (4′). En faisant les calculs, on trouve enfin

$$(44) \qquad G(a, s, m) = \lambda A(a, s, m) [B(a, s, m) - B(a, s-2, m)],$$

$$(45) \qquad G(r, b, m) = \lambda B(r, b, m) [A(r, b, m) - A(r-2, b, m)],$$

$$(46) \qquad G(r, s, m) = \lambda A(r, s, m) [A(r-2, s, m) B(r, s, m) - B(r, s-2, m)].$$

Pour les formes (35) à (40) on a $\lambda = 1$; pour (41), (42), $\lambda = \frac{1}{3}$; pour (43), $\lambda = \frac{1}{5}$. Les valeurs des fonctions entre crochets, dans (44) à (46), se trouvent par l'inspection des formes des fonctions A, B données pour chaque forme dans la Table V. Avec (1′), les formules (44), (45), (46) donnent tout ce qui concerne les G pour les formes (35), (36), (37); on trouvera les résultats dans la Table VI.

Mais si $g(0, s, m)$ se réduit à une forme spéciale, et $g(1, s, m)$ ne

se réduit pas ainsi, soit, d'après les indications de la Table V,

$$g(0, s, m) = \lambda' B(0, s, m),$$

où λ' est constant, et

$$g(r, \beta, m) = \lambda A(r, \beta, m) B(r, \beta, m),$$

où λ est constant. Alors on trouve de même, par les relations (α), (β), les six cas suivants :

(47) $G(0, s, m) = \lambda'[B(0, s, m) - B(0, s-2, m)]$.

(48) $G(1, s, m) = \lambda A(1, s, m)[B(1, s, m) - B(1, s-2, m)]$.

(49) $G(2, b, m) = [\lambda A(2, b, m) - \lambda'][B(2, b, m)]$.

(50) $G(2, s, m) = [\lambda A(2, s, m) - \lambda'][B(2, s, m) - B(2, s-2, m)]$.

(51) $G(k, b, m) = \lambda[A(k, b, m) - A(k-2, b, m)][B(k, b, m)]$.

(52) $G(k, s, m) = \lambda[A(k, s, m) - A(k-2, s, m)][B(k, s, m) - B(k, s-2, m)]$.

Les formules (1') et (47) à (52) donnent, par une inspection de la Table V, toutes les fonctions G pour les formes (38), (39), (41), (42), (43). Pour ces formes, on a respectivement

$$(\lambda, \lambda') = (1, 1), (1, 1), \left(\frac{1}{3}, 1\right), \left(\frac{1}{3}, 1\right), \left(\frac{1}{3}, 1\right).$$

Enfin, si $g(0, \beta, m)$, $g(1, \beta, m)$ se réduisent tous deux, mais $g(r, \beta, m)$ ne se réduit pas, soit, comme cela a lieu pour la forme (40),

$$g(r, \beta, m) = \lambda A(r, \beta, m) B(r, \beta, m),$$

$$g(0, \beta, m) = \lambda' B(0, \beta, m), \qquad g(1, \beta, m) = \lambda'' B(1, \beta, m).$$

Après quelques réductions faciles au moyen de (α'), (β'), on trouve sans peine :

(53) $G(0, s, m) = \lambda'[B(0, s, m) - B(0, s-2, m)]$,

(54) $G(1, s, m) = \lambda''[B(0, s, m) - B(0, s-2, m)]$.

(55) $G(2, b, m) = [\lambda A(2, b, m) - \lambda'][B(2, b, m)]$.

(56) $G(3, b, m) = [\lambda A(3, b, m) - \lambda''][B(3, b, m)]$.

(57) $G(c, b, m) = [\lambda A(c, b, m) - A(c-2, b, m)][B(c, b, m)]$.

(58) $G(2, s, m) = [\lambda A(2, s, m) - \lambda'][B(2, s, m) - B(2, s-2, m)]$.

(59) $G(3, s, m) = [\lambda A(3, s, m) - \lambda''][B(3, s, m) - B(3, s-2, m)]$.

(60) $G(c, s, m) = \lambda[A(c, s, m) - A(c-2, s, m)][B(c, s, m) - B(c, s-2, m)]$.

Pour la forme (40), on a

$$\lambda = 1, \quad \lambda' = \frac{1}{3}, \quad \lambda'' = 1.$$

Liouville n'a indiqué que les formules (1') à (4') pour cette forme; nous sommes allé plus loin parce que, dans certaines autres formes dans les écrits de Liouville, il s'agissait des formules (53) à (60) si l'on désirait approfondir les $P(n)$. Il ne reste que la forme (34), qui ne présente aucune difficulté.

D'après tous ces renseignements, on a immédiatement la Table suivante. Les fonctions A, B sont comme aux mêmes numéros de la Table V.

TABLE VI.

$a = 1, \quad b = 1, \quad r = 1, \quad s = 1, \quad k = 2, \quad c = 3.$

$G(a, b, m) = G(r, b, m).$

Forme	Fonctions G
(34)	$G(a, s, m) = G(r, s, m) = 0, \quad G(2, b, m) = 16, \quad G(k, b, m) = 3.2^{k+1}$
(35)	$G(a, s, m) = 8.3^{-1}A(a, s, m), \quad G(r, b, m) = 3.2^{r-1}B(r, b, m),$ $G(r, s, m) = 2^{r-1}.3^{2}.$
(36)	$G(a, s, m) = 8.3^{-1}A(a, s, m), \quad G(r, b, m) = 3.2^{r-1}B(r, b, m),$ $G(r, s, m) = 2^{r-1}.3^{2}.$
(37)	$G(a, s, m) = 8.3^{-1}A(a, s, m), \quad G(r, b, m) = 3.2^{r}B(r, b, m),$ $G(r, s, m) = 2^{r-1}.3^{2}.$
(38)	$G(0, s, m) = 8.3^{-1}, \quad G(1, s, m) = 8.3^{-1}[2 + (-1)^{s} - 1 \mid m)],$ $G(2, b, m) = [3^{-1} + (-1)^{s}(m \mid 3)][3 + (-1)^{s} - 1 \mid m)],$ $G(2, s, m) = 8.3^{-1}[3 + (-1)^{s} - 1 \mid m)],$ $G(k, b, m) = 3.2^{k-1}[3^{-1} + (-1)^{s}(m \mid 3)], \quad G(k, s, m) = 2^{k-1}.3^{2}.$
(39)	$G(0, s, m) = 8.3^{-1}, \quad G(1, s, m) = 8.3^{-1}[2 + (-1)^{s} - 1 \mid m)],$ $G(2, b, m) = [3^{-1} + (-1)^{s}(m \mid 3)][3^{-1} + (-1)^{s}(m \mid 3)],$ $G(2, s, m) = 8.3^{-1}[3 + (-1)^{s} - 1 \mid m)],$ $G(k, b, m) = 3.2^{k-1}[3^{-1} + (-1)^{s}(m \mid 3)], \quad G(k, s, m) = 2^{k-1}.3^{2}.$
(40)	$G(0, s, m) = \frac{1}{3}G(1, s, m) = 4.3^{-1}$ $G(2, b, m) = \frac{1}{3}[3^{-1} + (-1)^{s}(m \mid 3)][3^{-1} + (-1)^{s}(m \mid 3)],$ $G(3, b, m) = [3^{-1} + (-1)^{s}(m \mid 3)][3^{-1} + (-1)^{s}(m \mid 3)],$ $G(r, b, m) = 3.2^{r-1}[3^{-1} + (-1)^{s}(m \mid 3)],$ $G(2, s, m) = 4.3^{-1}[2 + (-1)^{s} - 1 \mid m)],$ $G(3, s, m) = 8.3^{-1}[3 + (-1)^{s} - 1 \mid m)], \quad G(r, s, m) = 2^{r}.3^{2}.$

TABLE VI (suite).

Forme.	Fonctions G.
(41)	$G(0, s, m) = \frac{1}{3} G(1, s, m) = 2(4, 5^{s-1})$,
	$G(2, b, m) = G(2, s, m) = 0$,
	$G(k, b, m) = 2^{k-1}[5^{b-1} + (-1)^k (m \mid 5)]$. $G(k, s, m) = 5 \cdot 2^{k-2} \cdot 5^{s-1}$.
(42)	$G(0, s, m) = G(1, s, m) = 2(4, 5^{s-1})$,
	$G(2, b, m) = 6[5^{b+1} - (m \mid 5)]$. $G(2, s, m) = 4(4, 5^{s-1})$
	$G(k, b, m) = 2^k[5^{b-1} - (-1)^k (m \mid 5)]$, $G(k, s, m) = 5 \cdot 2^{k-1} \cdot 5^{s-1}$.
(43)	$G(0, s, m) = \frac{1}{5} G(1, s, m) = 80 \cdot 9^{s-1}$,
	$G(2, b, m) = 10[9^{b-1} + (m \mid 3)]$. $G(2, s, m) = 80 \cdot 9^{s-1}$.
	$G(k, b, m) = 3 \cdot 4^{k-1}[9^{b-1} + (-1)^k (m \mid 3)]$. $G(k, s, m) = 15 \cdot 4^{k-1} \cdot 9^{s-1}$.

Pour les deux derniers, Liouville a les facteurs numériques 15, 75 au lieu de 3, 15; mais je ne puis trouver la faute dans mes calculs. Sauf ces deux exceptions, tous les résultats de la Table s'accordent avec les énoncés de Liouville.

11. Pour quelques-unes de ses formes, Liouville a donné les $T(n)$ quand les indéterminées satisfont à des conditions spéciales, soit toutes impaires. Les $P(n)$ pour ces cas se trouvent comme ci-dessus. De même pour toutes les autres formes pour lesquelles Liouville n'indique que les $T(n)$.

Contribution à l'étude des mouvements d'une masse fluide en rotation;

PAR GLOBA-MIKHAÏLENKO,
Docteur de l'Université de Paris.

INTRODUCTION.

Le présent Mémoire a pour but l'étude des figures d'équilibre relatif d'une masse fluide homogène en rotation uniforme autour d'un axe fixe et assujettie soit aux seules forces capillaires, soit aux seules forces newtoniennes.

Dans la première Partie, les conditions admises sont celles de l'expérience de Plateau. La masse fluide est un cylindre liquide, soumis aux seules forces capillaires.

Nous supposons que ce cylindre a une hauteur finie, et il est limité par deux disques circulaires horizontaux de même axe et de même rayon.

Nous faisons tourner ce cylindre et nous trouvons d'abord les conditions de sa stabilité, ensuite ses figures de bifurcation, en tous points analogues aux figures de bifurcation relatives à une masse fluide soumise aux seules forces newtoniennes. Nous trouvons les nouvelles figures, infiniment voisines du cylindre primitif et, en les suivant dans

leur développement, nous rattachons les résultats ici obtenus à ceux obtenus dans la troisième Partie de notre première Thèse.

La deuxième Partie est consacrée à l'étude des figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation soumise aux seules forces newtoniennes. Nous y étudions les figures creuses, limitées par des ellipsoïdes ou par des cylindres elliptiques, et nous démontrons que seule la couche cylindrique de révolution présente une figure d'équilibre. Ici, comme dans le cas des figures ellipsoïdales, nous avons tout le jeu des figures de bifurcation et des séries de nouvelles figures s'amorçant à chacune des figures de bifurcation.

Enfin, dans la troisième et dernière Partie, nous étudions le problème des petits mouvements d'une masse fluide en rotation autour de sa position d'équilibre ellipsoïdale. Ce problème a été traité par Poincaré au n° 13 de son Mémoire classique des *Acta mathematica*. Nous y relevons une erreur de calcul qui a faussé tous les résultats de Poincaré et nous démontrons l'impossibilité des oscillations simples, sorte de clapotis sur la surface de l'ellipsoïde, trouvées par Poincaré.

Nous tenons à renouveler ici toute notre gratitude et exprimer toute notre reconnaissance la plus affectueuse à M. Paul Appell, membre de l'Institut, qui, par ses précieux conseils, nous a encouragé et guidé dans nos travaux et nos recherches.

PREMIÈRE PARTIE.

Équilibre et figures de bifurcation d'un cylindre liquide homogène soumis aux seules forces capillaires et tournant autour de son axe avec une vitesse angulaire constante.

1. *Position du problème.* — Considérons un liquide homogène incompressible non pesant et soumis aux seules forces capillaires. Un tel liquide peut être réalisé si nous le plaçons dans un autre liquide de même densité et si nous prenons son volume assez petit pour que nous puissions négliger les attractions newtoniennes, c'est-à-dire si nous le plaçons dans les conditions des expériences de Plateau.

Supposons qu'à l'état d'équilibre le liquide affecte la figure d'un cylindre circulaire de rayon a et de hauteur h soit finie et constante,

soit indéfinie. Dans le premier cas, les deux bases du cylindre seront limitées par deux disques solides plans, parallèles entre eux, et de rayon a égal à celui du cylindre. La distance entre les disques reste constante et détermine la hauteur du cylindre.

Nous savons que si la hauteur h du cylindre est inférieure au périmètre de la base $2\pi a$, le cylindre est une figure d'équilibre stable.

Imprimons à notre cylindre un mouvement de rotation uniforme autour de son axe. Évidemment la figure cylindrique sera encore une figure d'équilibre. Pour quelle vitesse angulaire reste-t-elle stable?

Nous savons qu'il existe des figures d'équilibre de révolution et non cylindriques [1]; pour quelle valeur de la vitesse angulaire le cylindre se transforme-t-il en une de ces figures?

Existe-t-il encore des figures d'équilibre cylindriques indéfinies mais non de révolution?

Ce sont ces trois questions que nous nous proposons à résoudre.

2. *Formules générales.* — Nous savons que l'énergie potentielle des forces capillaires est [2]

$$-fS + \text{const.},$$

f étant la tension superficielle et S la surface libre du liquide, car la surface de contact avec les disques solides reste invariable. En effet, comme l'a montré Poincaré (*Capillarité*, p. 102), le raccordement ne pourra se faire que suivant le bord du disque où, l'arête étant toujours plus ou moins émoussée, l'angle de raccordement peut prendre la valeur qui lui convient. Dans ces conditions, le rayon des circonférences des bases, et par suite la surface de contact du liquide avec les disques, conserve bien une valeur constante.

D'autre part, l'énergie de la force centrifuge est

$$\frac{\omega^2}{2} J.$$

---

(1) *Voir* ma première Thèse, *Sur quelques nouvelles figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1916, fasc. 1).

(2) Poincaré, *Capillarité*, Paris, 1895, p. 48.

J étant le moment d'inertie de la masse liquide par rapport à l'axe de rotation et ω la vitesse angulaire.

L'énergie potentielle totale de la masse liquide est donc

$$(1) \qquad W = \frac{\omega^2}{2} J + \int S \, d\omega \, \text{const.}$$

Pour qu'il y ait équilibre, il faut que la variation première de W soit nulle pour toute déformation infiniment petite du cylindre liquide. Nous dirons que la déformation est infiniment petite si le maximum de distance entre la surface primitive donnée et la surface déformée reste inférieur à un nombre donné d'avance, si petit qu'il soit. La distance entre les surfaces est mesurée suivant la perpendiculaire à l'axe de rotation.

Pour que l'équilibre soit stable, il faut que l'énergie soit maximum, c'est-à-dire il faut que sa deuxième variation soit négative.

Si la deuxième variation est nulle, nous avons une figure de bifurcation. En effet, soit ε le paramètre définissant la figure déformée et W_0 la valeur de W correspondant à la surface primitive ($\varepsilon = 0$). En développant W suivant les puissances de ε, nous aurons pour les surfaces déformées

$$(2) \qquad W = W_0 + \varepsilon W' + \varepsilon^2 W'' + \ldots$$

Si la figure primitive est d'équilibre, nous aurons

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = W' = 0.$$

Pour que l'équilibre soit stable, il faut que W'' soit négatif. Le coefficient W'' n'est donc autre chose que le coefficient de stabilité de Poincaré [1]. En appliquant sa théorie, on voit bien que, lorsque $W'' = 0$, nous sommes en présence d'une figure de bifurcation.

3. *Masse liquide finie.* — Reprenons notre cylindre de révolution de hauteur h et de rayon a. En adoptant les coordonnées semi-polaires

---

[1] H. Poincaré, *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation* (*Acta mathematica*, t. VII, 1885).

r, θ, z, nous prendrons pour axe z l'axe du cylindre. L'équation du cylindre sera alors

$$r = a$$

Le volume du liquide sera

$$V = \pi a^2 h$$

Sa surface latérale

$$S = 2\pi a h$$

et son moment d'inertie par rapport à l'axe

$$J = \rho \frac{\pi h a^4}{2} = \rho V \frac{a^2}{2},$$

ρ étant sa densité.

Comme surface infiniment voisine considérons d'abord une surface de révolution dont la méridienne est donnée par l'équation

$$r = a + \mu \varepsilon \sin kz.$$

μ étant une fonction de ε, ce dernier étant un paramètre très petit déterminant l'écart entre la figure cylindrique primitive et la figure nouvelle. La déformation est infiniment petite si ε est infiniment petit.

Nous désignerons par z_0 et z_1 les ordonnées des bases du cylindre.

Comme le diamètre des bases doit rester constant, égal à a, nous devons avoir

$$\mu \varepsilon \sin kz_0 = \mu \varepsilon \sin kz_1,$$

et par conséquent k doit vérifier l'une des conditions :

1° $$kz_1 - kz_0 = 2n\pi;$$

2° $$kz_1 - kz_0 = (2n+1)\pi,$$

n étant un nombre entier.

Nous aurons ainsi des figures de deux genres différents. Toutes les deux seront pour ainsi dire ondulées suivant leurs longueurs ; mais les figures du premier genre auront un nombre pair de demi-ondes et celles du second genre auront un nombre impair de demi-ondes entières. En donnant à n les valeurs 1, 2, 3, ..., nous obtiendrons toutes les figures de chaque genre.

En posant

$$kz_0 = \xi_0$$

nous aurons respectivement dans les deux cas :

1° $$kz_1 = 2n\pi - \alpha;$$

2° $$kz_1 = 2(n+1)\pi - \alpha.$$

La hauteur du cylindre sera alors :

1° $$h = z_1 - z_0 = \frac{2n\pi}{k},$$

d'où

$$k = \frac{2n\pi}{h};$$

2° $$h = z_1 - z_0 = \frac{2(n+1)\pi - 2\alpha}{k},$$

d'où

$$k = \frac{2(n+1)\pi - 2\alpha}{h}.$$

Désignons encore par 2λ la longueur d'onde sinusoïdale, nous aurons dans les deux cas

$$k = \frac{\pi}{\lambda},$$

et nous aurons également :

1° $$h = 2n\lambda;$$

2° $$h = (2n+1)\lambda - \frac{2\lambda\alpha}{\pi}.$$

Enfin, l'équation de la méridienne sera dans les deux cas

$$r = a - \mu + \varepsilon \sin \frac{\pi}{\lambda} z.$$

Considérons séparément chacun des deux cas.

4. Premier cas : *Nombre pair de demi-ondes.* — Cherchons d'abord à déterminer μ, fonction de ε, de manière que le volume du liquide reste constant pendant la déformation.

Le volume de la figure déformée est

(3) $$V = \pi \int_{z_0}^{z_1} r^2 dz = \pi \int_{z_0}^{z_1} \left(a - \mu + \varepsilon \sin \frac{\pi}{\lambda} z\right)^2 dz.$$

En effectuant l'intégration et en remplaçant z_1 par $z_0 + 2n\pi$, nous

aurons, en remarquant que $2n\lambda = h$,

$$V = \pi h \left(a^2 + \mu^2 - 2a\mu + \frac{\varepsilon^2}{2}\right);$$

et comme le volume primitif est égal à $\pi a^2 h$, la condition d'invariabilité du volume s'écrira

$$\mu^2 - 2a\mu + \frac{\varepsilon^2}{2} = 0.$$

En considérant ε comme infiniment petit du premier ordre, nous voyons que μ devra être du second ordre et μ^2 du quatrième. En le négligeant, nous aurons

$$\mu = \frac{\varepsilon^2}{4a}.$$

et l'équation de la méridienne s'écrira

$$(4) \qquad r = a - \frac{\varepsilon^2}{4a} + \varepsilon \sin \frac{\pi}{\lambda} z.$$

Cherchons maintenant la variation de W. D'après la formule (1), nous aurons

$$\delta W = \frac{\omega^2}{2} \delta J - f . \delta S.$$

Calculons séparément δJ et δS. La surface de la figure déformée est

$$S = 2\pi \int_{z_0}^{z_1} r \sqrt{1 + r'^2}\, dz.$$

Or

$$r' = \varepsilon \frac{\pi}{\lambda} \cos \frac{\pi}{\lambda} z,$$

d'où

$$\sqrt{1 + r'^2} = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\pi^2}{\lambda^2} \cos^2 \frac{\pi}{\lambda} z - \frac{3}{8} \varepsilon^4 \frac{\pi^4}{\lambda^4} \cos^4 \frac{\pi}{\lambda} z + \ldots.$$

En négligeant les puissances de ε supérieures à la deuxième, on aura

$$(5) \qquad S = 2\pi \int_{z_0}^{z_1} \left(a - \frac{\varepsilon^2}{4a} + \varepsilon \sin \frac{\pi}{\lambda} z\right)\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\pi^2}{\lambda^2} \cos^2 \frac{\pi}{\lambda} z\right) dz.$$

Remarquons que $S_0 = 2\pi a h$ et négligeons le terme en ε^2, il

vient

$$(6) \qquad \delta S = \frac{\pi h \varepsilon^2}{2a}\left(\frac{a^2\pi^2}{\lambda^2} - 1\right) = \frac{\pi h \varepsilon^2}{2a\lambda^2}(a^2\pi^2 - \lambda^2).$$

Remplaçons λ par $\frac{h}{2n}$, on aura finalement

$$(6') \qquad \delta S = \frac{\pi \varepsilon^2}{2ah}(4a^2\pi^2 n^2 - h^2).$$

On voit ainsi que δS est d'autant plus grande que n est plus grand, c'est-à-dire que, h étant constant, la longueur d'onde sinusoïdale est plus petite.

Par conséquent, si la surface cylindrique n'est pas minimum ($h > 2\pi a$), la surface minimum s'obtiendra en faisant $n = 1$, c'est à-dire en prenant une seule onde sur toute la longueur du cylindre.

Passons à δJ. Nous avons

$$J = 2\frac{\pi}{\lambda}\int_0^{\lambda} r\,dz = 2\frac{\pi}{\lambda}\int_0^{\lambda}\left[a - \frac{\varepsilon}{2a}\left(1 + \sin\frac{\pi}{\lambda}z\right)\right]dz.$$

En négligeant les termes de degrés supérieurs à 2 en ε, on a

$$(7) \qquad J = 2\frac{\pi}{\lambda}\int_0^{\lambda}\left[a - \frac{\varepsilon^2}{4a}\left(1 + 2\sin\frac{\pi}{\lambda}z + \sin^2\frac{\pi}{\lambda}z\right)\right]dz.$$

Effectuons l'intégration et, en tenant compte de ce que

$$\int_0^{\lambda}\sin^2\frac{\pi}{\lambda}z\,dz = \frac{\lambda}{2},$$

nous aurons

$$(8) \qquad \delta J = \frac{\pi}{2}\varepsilon^2 h/2a.$$

L'accroissement de δJ est donc toujours positif.

Nous pouvons maintenant écrire δW :

$$\delta W = \frac{\sigma}{2}\delta J - \gamma\,\delta S = \frac{\sigma\varepsilon^2}{4ah}\left[(a^2\pi^2 n^2 + \gamma\,h^2) - \gamma\,(4a^2\pi^2 n^2)\right],$$

ou encore

$$(9) \qquad \delta W = \frac{\sigma}{2}\varepsilon^2 h\left[\gamma + \frac{\sigma(a^2\pi^2 n^2 - h^2)}{4ah}\right].$$

en posant

$$f' = \frac{f}{2}.$$

5. *Stabilité.* — Si l'on assujettit la figure d'équilibre à la condition de rester cylindrique ou ondulée du premier genre (nombre pair de demi-ondes), la figure cylindrique sera stable si δW est positive ou

$$\omega^2 < \frac{f'(4n^2a^2\pi^2 - h^2)}{a^2h},$$

quel que soit n.

Or il est clair que la partie droite de cette inégalité croît avec n. Nous devons donc avoir pour la stabilité du cylindre la condition suivante :

$$\omega^2 < f' \frac{4a^2\pi^2 - h^2}{a^2h}. \tag{9'}$$

Si nous n'assujettissons notre fluide à aucune condition, la condition de stabilité, restant toujours nécessaire, pourra ne pas être suffisante.

En posant $\omega^2 = 0$, nous retrouvons le résultat de Plateau : pour la stabilité statique du cylindre, il faut avoir

$$4a^2\pi^2 - h^2 > 0 \qquad \text{ou} \qquad h < 2a\pi.$$

6. *Figures de bifurcation.* — En remarquant que l'accroissement δW que nous venons de trouver n'est autre chose que

$$\varepsilon^2 W^{(2)}$$

de la formule (2), nous voyons que le cylindre devient une figure de bifurcation chaque fois que δW s'annule ou que l'équation suivante est vérifiée :

$$\omega^2 = f' \frac{4n^2a^2\pi^2 - h^2}{a^2h} \tag{10}$$

ou

$$\omega^2 = \frac{f\pi}{M}\frac{a}{h}\left(4n^2\pi^2 - \frac{h^2}{a^2}\right) \tag{10'}$$

M étant la masse du liquide.

En donnant à n les valeurs

$$n = 1, 2, 3, \ldots,$$

nous obtenons une série discontinue de valeurs de ω :

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \Omega_3, \quad \ldots.$$

Chacune de ces valeurs détermine une figure cylindrique de bifurcation qui pourra donner naissance à une figure onduloïdale de longueur d'onde

$$\lambda = \frac{h}{n}.$$

Ces figures sont dissymétriques par rapport au plan perpendiculaire à l'axe du cylindre et passant par son milieu. Nous les appellerons « figures Ω ».

La première de ces figures est analogue à la figure piriforme de Poincaré.

Il est à remarquer que toutes ces figures seront instables pour $n > 1$. En effet, comparons une de ces figures à la figure correspondant à la même valeur de ε, mais à $n = 1$. Nous verrons que, pour le passage de la première de ces figures à la deuxième ($n = 1$), la variation d'énergie, que nous désignerons par $\delta W_{n,1}$, sera positive.

En désignant par δW_n et δW_1 les variations de W relatives au passage de la figure cylindrique à chacune des figures considérées, nous aurons

$$\delta W_{n,1} = \delta W_1 - \delta W_n = \frac{\pi a^2}{2h} \varepsilon^2 \omega^2 \tau^2 (n^2 - 1)$$

qui est toujours positive pour $n > 1$.

7. Deuxième cas : *Nombre impair de demi-ondes.* — Considérons maintenant le deuxième mode de déformation, pour lequel la hauteur du cylindre contient un nombre impair de demi-ondes entières. Les calculs dans ce cas seront identiquement pareils à ceux que nous venons de faire pour le premier cas, à cela près que, dans toutes les intégrales, nous devrons prendre pour les limites

$$z_1 = \frac{\alpha\lambda}{\pi} \quad \text{et} \quad z_2 = (2n+1)\lambda - \frac{\alpha\lambda}{\pi}.$$

L'intégrale (3) s'écrit alors, en développant le carré,

$$V = \int_{\frac{\alpha\lambda}{\pi}}^{\frac{2a(1+\lambda)}{\pi}} \left[a^2 - \mu^2 - 2a\mu - 2\lambda(a - \mu)\sin\frac{\pi}{\lambda} + \lambda^2\left(\sin\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 \right] d\mu.$$

En effectuant l'intégration et en retranchant $V_0 = \pi a^2 h$, nous obtenons pour la variation du volume l'expression suivante :

$$\delta V = \pi \left[(\mu^2 - 2a\mu)h + 4\lambda a - \mu\left(\frac{\lambda\varepsilon}{\pi}\cos\alpha - \lambda\left(\frac{h}{\lambda} - \frac{\lambda}{2\pi}\sin 2\alpha\right)\right) \right].$$

Nous sommes obligé de considérer ici ε et μ comme des infiniment petits de même ordre de grandeur; en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, nous aurons

$$\delta V = 2\pi a\left(-\mu h - \frac{2\lambda\varepsilon}{\pi}\cos\alpha\right).$$

La condition d'invariabilité de volume s'écrit alors, dans ce cas,

$$\mu = \frac{2\lambda\varepsilon}{\pi h}\cos\alpha. \tag{11}$$

Or, de la condition

$$\mu = \varepsilon\sin\alpha,$$

nous tirons

$$\sin\alpha = \frac{\mu}{\varepsilon}, \qquad \cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{\varepsilon^2}}.$$

Portons cette valeur dans (11), d'où

$$\mu = \frac{2\lambda\varepsilon}{\sqrt{h^2\pi^2 + 4\lambda^2}}. \tag{12}$$

La comparaison avec (11) donne enfin

$$\sin\alpha = \frac{2\lambda}{\sqrt{h^2\pi^2 + 4\lambda^2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{\pi h}{\sqrt{h^2\pi^2 + 4\lambda^2}}. \tag{13}$$

L'équation du méridien s'écrit alors

$$r = a - \frac{2\lambda\varepsilon}{\pi h}\cos\alpha + \varepsilon\sin\frac{\pi}{\lambda}. \tag{14}$$

Ceci posé, calculons δW. Elle sera calculée à l'aide des mêmes formules que dans le premier cas, à cela près que, dans les intégrales donnant la surface et le moment d'inertie, les limites z_0 et z_1 seront $\frac{\alpha\lambda}{\pi}$ et $(2n+1)\lambda - \frac{\alpha\lambda}{\pi}$.

Ainsi l'intégrale (5) sera remplacée par la suivante, où l'on a négligé les termes en ε^3 et ε^4 :

$$S = 2\pi \int_{\frac{\alpha\lambda}{\pi}}^{(2n+1)\lambda - \frac{\alpha\lambda}{\pi}} \left(a + \frac{2\lambda\varepsilon}{\pi h}\cos\alpha + \varepsilon \sin\frac{\pi}{\lambda} z + \frac{a\varepsilon^2}{2}\frac{\pi^2}{\lambda^2}\cos^2\frac{\pi}{\lambda} z \right) dz.$$

En effectuant l'intégration, et en tenant compte de ce que

$$S = 2\pi a h,$$

nous aurons comme précédemment

$$(15) \qquad \delta S = \frac{a\varepsilon^2\pi^2}{4\lambda^2}\left(h - \frac{\lambda}{\pi}\sin 2\alpha \right).$$

On remarque que, dans ce cas, δS est toujours positive, et que, par conséquent, les figures d'équilibre statique de ce genre n'existent pas.

Passons au moment d'inertie.

L'intégrale (7) s'écrit maintenant, en négligeant toujours les termes en ε^3 et d'ordres supérieurs :

$$J = 2\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\alpha\lambda}{\pi}}^{(2n+1)\lambda - \frac{\alpha\lambda}{\pi}} \Big[a^4 + 4a^3\rho + 6a^2\rho^2 + (4a^3 + 12a^2\rho)\varepsilon \sin\frac{\pi}{\lambda} z$$
$$+ 6a^2\varepsilon^2 \sin^2\frac{\pi}{\lambda} z \Big] dz;$$

et comme $J_0 = \frac{2\pi a^4 h}{2}$, nous aurons, en effectuant l'intégration,

$$\delta J = 2\frac{\pi}{2}\Big[-4a^3\left(\rho h - \frac{2\lambda\varepsilon}{\pi}\cos\alpha\right) - 6a^2\rho\left(\rho h - \frac{2\lambda\varepsilon}{\pi}\cos\alpha\right)$$
$$+ \frac{12a^2\lambda}{\pi}\rho\cos\alpha + 3a^2\varepsilon^2\left(h - \frac{\lambda}{\pi}\sin 2\alpha\right)\Big].$$

Enfin, tenons compte de (11) et remplaçons μ par $\varepsilon \sin \alpha$, d'où

$$\delta J = 3\rho a^2 \varepsilon^2 \left(h - \frac{\lambda}{\pi} \sin 2\alpha \right). \tag{16}$$

Nous pouvons maintenant écrire δW :

$$\delta W = \frac{\omega^2}{2} \delta J - f \delta S = \frac{3}{2} a^2 \varepsilon^2 \left(h - \frac{\lambda}{\pi} \sin 2\alpha \right) \left(\omega^2 - f \frac{\pi^2}{6a\lambda^2} \right). \tag{17}$$

8. *Stabilité. Figures d'équilibre.* — Comme le terme

$$h - \frac{\lambda}{\pi} \sin 2\alpha$$

est toujours positif, δW sera négative si

$$\rho\omega^2 < f \frac{\pi^2}{6a\lambda^2}. \tag{18}$$

Si nous assujettissons notre liquide à la condition de conserver la figure cylindrique, ou ondulée de deuxième espèce, l'inégalité précédente nous donnera aussi la condition de stabilité d'équilibre relatif. Mais, dans le cas général, la condition (18) est une condition nécessaire d'équilibre et peut ne pas être suffisante.

Lorsque

$$\rho\omega^2 = \frac{f\pi^2}{6a\lambda^2}, \tag{19}$$

la figure cylindrique sera une figure de bifurcation.

Remplaçons λ par sa valeur

$$\lambda = \frac{h}{(2n+1) - \frac{2\alpha}{\pi}};$$

posons comme avant $\frac{f}{\rho} = f'$, la condition (19) devient

$$\omega^2 = \frac{f'\pi^2 \left(2n + 1 - \frac{2\alpha}{\pi} \right)^2}{6ah^2}. \tag{19'}$$

En donnant à n les valeurs

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

nous verrons qu'à chaque valeur de n correspond une et une seule racine de ω, que nous appellerons ω_n. Nous aurons ainsi une suite

discontinue de valeurs de ω :

[illegible]

correspondant chacune à une figure de bifurcation qui donne naissance à une figure onduloïdale de 1, 2, .. , n, ... ondes.

Nous appellerons ces figures « figures ω ». Elles diffèrent des figures Ω, déjà étudiées, parce qu'elles ont un plan de symétrie normal à l'axe et passant par son milieu.

Pour chaque valeur de n, il y aura deux figures différentes, suivant le signe de ε. Pour $\varepsilon > 0$, on aura une figure avec un creux au milieu, et pour $\varepsilon < 0$, on y aura une saillie.

Pour $n = 1$, ces figures sont analogues aux « haltères » de Poincaré.

Il est évident que les valeurs de ω, données par l'équation (19), vont en croissant avec n. Par conséquent, si le fluide part du repos et commence à tourner avec une vitesse de plus en plus grande, la première figure de bifurcation que l'on rencontrera sera celle qui correspond à $n = 1$ et à ω déterminée par l'équation

$$(20) \qquad [illegible]$$

Pour le calcul effectif de ω_1 et de la figure qu'affectera la masse liquide après la bifurcation, il nous faut savoir la valeur de α. Cette dernière est donnée par les équations (13), qui donnent

$$[illegible]$$

Dans le cas particulier de $n = 1$, cette équation devient

$$(21) \qquad [illegible]$$

et comme

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = [illegible]$$

$$f\left(\frac{\pi}{15}\right) = [illegible]$$

nous voyons que la racine de (21) se trouve entre $\frac{\pi}{12}$ et $\frac{\pi}{15}$.

Cette racine décroît évidemment lorsque n croît.

9. *Ordre des figures de bifurcation.* — Cherchons d'abord dans quel ordre se rencontrent les différentes figures de bifurcation lorsque la vitesse angulaire, partant de zéro, va en croissant. En désignant comme auparavant par Ω_n et ω_n les vitesses angulaires correspondant aux figures de bifurcation du premier et du second genre et de $n^{\text{ième}}$ ordre, nous aurons, en vertu des formules (10) et (19),

$$\omega_n^2 - \Omega_n^2 = \frac{f\pi^2}{6ah^2}\left[-20n^2 + 4n - 1 + \frac{6h^2}{a^2\pi^2}\left(4\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 - \frac{\alpha}{\pi} - 4\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2\right)\right].$$

En considérant $\frac{\alpha}{\pi}$ comme variable, nous voyons que la différence qui nous intéresse est de signe du trinome du second degré en $\frac{\alpha}{\pi}$.

Pour toutes les valeurs de n, à partir de $n = 2$, le terme constant de notre trinome est négatif, car $\frac{6h^2}{a^2\pi^2}$ ne peut pas être supérieur à 24. Par conséquent, ses racines sont de signes contraires et la racine positive est supérieure à

$$\frac{2n-1}{2} - \frac{5}{2} \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

et comme $\frac{\alpha}{\pi}$ est en tout cas inférieure à $\frac{1}{12}$, nous voyons que

$$\omega_n^2 - \Omega_n^2 < 0 \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Quant à $n = 1$, nous aurons deux cas à considérer suivant la valeur de $\frac{h^2}{\pi a}$. Si cette valeur est assez petite, l'inégalité précédente a lieu, et, si elle est voisine de 2, l'inégalité en question se présente changée de signe.

Ainsi, si notre cylindre est large et court, c'est la figure ω_1 qui se présente la première ; au contraire, s'il est assez long, c'est la figure Ω_1 qui se rencontre d'abord.

Cherchons maintenant quelles sont les figures suivantes. Nous avons

$$\omega_{n+1}^2 - \Omega_n^2 = \frac{f\pi^2}{6ah^2}\left[-20n^2 - 12n - 9 - \frac{6h^2}{a^2\pi^2}\left(4\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + \frac{\alpha}{\pi} + 4\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2\right)\right].$$

Pour $n \geq 2$, cette différence est toujours négative, car $\frac{6h^2}{a^2\pi^2}$ étant au

plus égal à 24, les racines du trinome sont de signes contraires et la racine positive est forcément plus grande que $\frac{\alpha}{\pi}$.

Mais pour $n = 1$, cette différence est positive. En effet, dans ce cas, les deux racines du trinome sont positives et la plus petite est supérieure à

$$\frac{10 - \sqrt{96}}{4} = 0,050.$$

Or, la valeur de α est donnée maintenant par l'équation

$$f(\alpha) = \operatorname{tang} \alpha - \frac{1}{\frac{3}{2}\pi - \alpha} = 0;$$

et comme

$$f(0,05\pi) = 0,1584 - 0,1999 = -0,0985,$$

la racine de cette équation est inférieure à $0,05\pi$ et, par conséquent, la différence

$$\omega_1 - \Omega_1$$

est bien positive.

Nous aurons ainsi quatre premières figures de bifurcation.

Pour les cylindres larges et courts $\left(\frac{h}{\pi a} \text{ est petit}\right)$, on aura

$$\omega_1 < \Omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \ldots;$$

la première figure qui se rencontre est donc la figure de genre « haltère » avec une demi-onde entière.

Mais si le cylindre est allongé, on aura

$$\Omega_1 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3$$

et la première figure de bifurcation sera analogue à la figure piriforme.

Pour une certaine valeur de $\frac{h}{\pi a}$, la différence $\Omega_1 - \omega_1$ peut être nulle. Calculons cette valeur. Nous avons, en posant

$$f(\alpha) = \operatorname{tang} \alpha - \frac{1}{\frac{3}{2}\pi - \alpha}.$$

et en donnant à α les différentes valeurs :

$$f(0,07\pi) = 0,2235 - 0,2226 = 0,0009$$
$$f(0,0695\pi) = 0,2219 - 0,2225 = 0,0006$$

Par conséquent, nous pouvons prendre, pour la valeur approchée de $\frac{\alpha}{\pi}$, la valeur

$$\frac{\alpha}{\pi} = 0,0697.$$

En écrivant que la différence $\omega_1 - \Omega_1$ est nulle pour $n = 1$ et $\frac{\alpha}{\pi} = 0,0697$, nous aurons l'équation

$$-15 + \frac{6h^2}{a^2\pi^2} - 12.0,0697 + 4.0,0697^2 = 0;$$

d'où

$$\frac{h}{a\pi} = 1,6236$$

ou

$$\frac{h}{2\pi a} = 0,8118.$$

Pour cette valeur du rapport entre la hauteur et le périmètre de la base du cylindre, nous aurons une figure de bifurcation où se rencontrent trois séries de figures d'équilibre :

1° Les cylindres circulaires;
2° Les figures genre « piriforme »;
3° Les figures genre « haltère ».

En continuant nos calculs, nous verrons que la cinquième figure de bifurcation sera ω_3 ou Ω_2, suivant que le rapport de $\frac{h}{\pi a}$ sera petit ou voisin de 2. Pour une valeur particulière de $\frac{h}{\pi a}$, nous pouvons avoir $\omega_3 = \Omega_2$, et nous aurons encore une figure de bifurcation où se rencontrent trois différentes séries de figures d'équilibre.

En général, il est facile de s'en assurer, entre deux figures consécutives Ω_n et Ω_{n+1} de la série Ω, nous aurons au moins deux et au plus trois figures de la série ω. En effet, nous voyons facilement que

$$\omega_{\frac{3}{2}n} = \Omega_{\frac{3}{2}n} = \omega_{2n} \quad (n = 3, 4, \ldots).$$

car

$$\omega_{\frac{1}{2}n} = \frac{l-\tau^{2}}{6ah^{2}} \Big[25 n^{2} \ldots \text{[illegible]} \Big],$$

$$\Omega_{n} = \frac{l-\tau^{2}}{6ah^{2}} \Big[24 n^{2} - \frac{6h}{\tau a} \Big],$$

$$\omega_{n} = \frac{l-\tau^{2}}{6ah^{2}} \Big[16 n^{2} - 8 n \ldots \text{[illegible]} \Big].$$

Les calculs numériques donnent la suite suivante des valeurs de ω déterminant les figures de bifurcation

[illegible]

10. *Condition suffisante de stabilité.* — Nous pouvons maintenant résoudre la question de stabilité du cylindre liquide en rotation dans le cas où le liquide est assujetti à la condition d'affecter la forme cylindrique ou sinusoïdale. Pour qu'il y ait stabilité, il faut que δW soit négative pour toute déformation compatible avec cette liaison. Afin que cette condition soit vérifiée, nous devons avoir l'inégalité

$$\omega < \omega_{1}$$

si le cylindre est court ($\frac{h}{\pi a} < 0,8118$), et l'inégalité

$$\omega < \Omega_{1}$$

si le cylindre est long ($\frac{h}{\pi a} > 0,8118$).

Dans le premier cas, cette condition s'exprime par l'inégalité

[illegible]

et, dans le deuxième, par

[illegible]

Pour la valeur de ω supérieure à ω_1 dans le premier cas et à Ω_1 dans le second, le maximum relatif de W correspondra à la figure s'amorçant

à cette valeur de la vitesse angulaire. Dans le premier cas cette figure est de genre « haltère » et dans le deuxième du genre « piriforme ».

Le principe d'échange de stabilités de Poincaré se trouve ainsi vérifié.

11. *Forme exacte de la méridienne.* — Nous avons étudié jusqu'ici les figures de révolution engendrées par la rotation d'une sinusoïde. Mais nous savons que la forme exacte de ces figures est beaucoup plus compliquée. Nous allons montrer que, lorsque la déformation est infiniment petite, la figure exacte diffère de la figure sinusoïdale par des écarts infiniment petits d'au moins du deuxième ordre.

En commençant nos calculs, nous pouvons affirmer seulement que le rayon de la section droite de notre figure sera une fonction périodique de z, et comme telle sera développable en une série de Fourier.

Nous chercherons ainsi l'équation de la méridienne sous la forme

$$r = a + \rho \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos ikz + b_i \sin ikz),$$

le paramètre k ayant la même signification que précédemment. La période de r étant désignée par 2λ, on aura

$$k = \frac{\pi}{\lambda}.$$

Pour que la déformation soit infiniment petite, il faut que les coefficients

$$a_i \quad \text{et} \quad b_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

soient infiniment petits au moins du premier ordre. Si la figure diffère beaucoup de la figure sinusoïdale, parmi les coefficients a_i et b_i il doit s'en trouver au moins un du premier ordre, autre que b_1. Les conditions aux bases s'écrivent ici

$$\rho \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos ik\lambda + b_i \sin ik\lambda) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos ik\lambda + b_i \sin ik\lambda) = 0.$$

Cette double condition peut être vérifiée de deux manières :

1° Soit

$$kz_1 = 2n\pi + kz_0;$$

2° Soit en supposant que tous les a et b d'indice impair sont nuls et en posant

$$kz_1 = (2n+1)\pi + kz_0.$$

Le premier mode correspond aux figures Ω et le second aux figures ω.

Considérons comme précédemment chacun des deux cas séparément.

La condition d'invariabilité de volume s'écrit ici

$$\delta V = \pi \int \left[-2\mu\nu - \mu^2 + z_1 a - \mu \sum_1^\infty (a_i \cos ikz + b_i \sin ikz) + \left(\sum_1^\infty a_i \cos ikz + b_i \sin ikz \right)^2 \right] dz = 0.$$

En intégrant et en remplaçant z_1 par $2n\pi + z_0$ et $z_1 - z_0$ par h, nous aurons

$$\delta V = \pi \left[-2\mu\nu h - \mu^2 h - \sum_1^\infty (a_i^2 + b_i^2) h \right],$$

et la condition d'invariabilité de volume s'écrira finalement

$$-2\mu\nu - \mu^2 - \frac{\mu^2}{2} = 0$$

en posant

$$\sum_1^\infty (a_i^2 + b_i^2) = \mu^2.$$

Considérons ε comme infiniment petit du premier ordre et négligeons μ^2 qui sera du quatrième, nous aurons une condition identique à celle que nous avons trouvée pour les figures sinusoïdales du genre Ω :

$$\mu^2 = \sqrt{\mu^2}.$$

Géométriquement, ε désignera ici la limite supérieure de la distance

entre le cylindre $r = a - \mu$ et la surface déformée. La limite supérieure de la distance entre la surface et le cylindre primitif $r = a$ sera donc $\varepsilon + \mu$; mais comme μ est du deuxième ordre, nous pouvons prendre pour mesure de maximum de l'écart entre la surface déformée et la surface primitive la valeur ε.

Calculons maintenant δS et δJ. Nous avons

$$r' = zk\Sigma i(-a_i \sin ikz + b_i \cos ikz) = \delta\Sigma$$

et en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au deuxième, nous aurons

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{z_0}^{z_1} r\sqrt{1 + r'^2}\, dz \\ &= 2\pi \int_{z_0}^{z_1} \Big[a - \mu + \sum_1^\infty (a_i \cos ikz + b_i \sin ikz) \\ &\qquad + \frac{ak^2}{2} \Sigma i^2 (-a_i \sin ikz + b_i \cos ikz)^2 \Big] dz \end{aligned}$$

d'où, en intégrant et en remplaçant μ par sa valeur,

$$\delta S = 2\pi h \left(-\frac{\varepsilon^2}{4a} + \frac{ak^2}{4} \varepsilon'^2 \right),$$

où nous posons

$$\varepsilon'^2 = \sum_1^\infty i^2 (a_i^2 + b_i^2).$$

Enfin, en remplaçant k^2 par sa valeur,

$$\delta S = \frac{\pi}{2ah} (4a^2\pi^2 n^2 \varepsilon'^2 - h^2 \varepsilon^2).$$

De même

$$\begin{aligned} J &= \frac{\pi}{2} \int_{z_0}^{z_1} r^4\, dz \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{z_0}^{z_1} \Big[(a - \mu)^4 + 4(a - \mu)^3 \Sigma (a_i \cos ikz + b_i \sin ikz) \\ &\qquad + 6(a - \mu)^2 \big[\Sigma (a_i \cos ikz + b_i \sin ikz) \big]^2 \Big] dz \end{aligned}$$

En effectuant l'intégration et en se bornant aux infiniment petits du

deuxième ordre, on aura

$$[illegible]$$

et finalement

$$[illegible]$$

expression identique à celle que nous avons trouvée pour les figures sinusoïdales Ω.

Par conséquent, la variation de l'énergie sera

$$[illegible]$$

En comparant cette expression à celle donnée par la formule (9), nous voyons que

$$[illegible]$$

En faisant le même calcul pour les figures analogues aux figures ω, nous trouverons le même résultat.

Donc, pour que W soit minimum pour une de ces figures, c'est-à-dire pour que le liquide puisse affecter une de ces figures, il faut que

$$[illegible]$$

et, par conséquent, il faut que tous les coefficients, sauf b_1, soient d'ordre supérieur au premier.

Les vraies figures d'équilibre diffèrent donc des figures sinusoïdales par des écarts infiniment petits d'ordre supérieur. Et, en première approximation, les figures sinusoïdales sont les seules figures possibles d'équilibre.

C'est pourquoi nous pouvons lever la restriction énoncée au n° **10**, les conditions suffisantes de stabilité trouvées dans ce numéro seront alors applicables dans le cas où la déformation possible est absolument quelconque. Une seule restriction reste encore en vigueur : le liquide doit tourner à la manière d'un corps solide, c'est-à-dire toutes les particules doivent avoir à chaque instant la même vitesse angulaire, et les composantes de la vitesse suivant l'axe et suivant le rayon doivent être nulles.

12. *Figures s'écartant beaucoup du cylindre circulaire.* — La question suivante se pose maintenant : Que deviennent toutes ces figures infiniment voisines du cylindre quand la vitesse angulaire diffère beaucoup de la vitesse de bifurcation? La méridienne de ces figures sera encore une ligne ondulée du même nombre d'ondes, mais différant beaucoup d'une sinusoïde.

Son équation a été donnée dans la Troisième Partie de notre première Thèse où nous avons résolu le problème direct suivant :

Trouver toutes les figures d'équilibre de révolution que peut affecter une masse liquide en rotation, soumise aux seules forces capillaires.

Nous y avons trouvé pour la méridienne de ces figures l'équation suivante [éq. (6), p. 60] :

$$(\alpha) \qquad z = \int_{r_0}^{r} \frac{(ar^2 - 2br + c)\,dr}{\sqrt{(r^2 - a^2)(ar^2 + 2br + c)}},$$

où $a = \frac{2\omega}{\sqrt{f}}$ et b et c sont deux constantes.

En écrivant que le volume du liquide est égal à celui du cylindre primitif et que la courbe méridienne, partant de $z = z_0$, $r = a$ arrive en $z = z_1 = z_0 + h$ avec la même valeur $r = a$, après avoir effectué un nombre donné d'ondulations, nous obtiendrons deux relations entre a, b, c à l'aide desquelles nous exprimerons b et c en fonctions de a, c'est-à-dire en fonction de ω.

L'intégrale (α) sera alors fonction d'un seul paramètre ω. En faisant varier ω à partir de la valeur de bifurcation, il serait possible de suivre toutes les variations de la figure d'équilibre considérée.

Il est nécessaire de remarquer que les calculs effectifs sont ici très difficiles sinon impossibles, l'intégrale (α), ainsi que l'intégrale donnant le volume du liquide, étant hyperelliptiques. Par suite, les relations entre a, b et c ne pourront pas être exprimées sous une forme finie.

On ne pourra donc résoudre approximativement, mais avec une précision voulue, que le problème inverse : se donner arbitrairement les constantes a, b, c et chercher ensuite à quel cylindre primitif correspond la figure ainsi déterminée.

13. *Cylindre indéfini. Figures infiniment voisines.* — Occupons-nous maintenant des figures qui ne sont pas de révolution. Bornons-nous pour le moment au cas idéal d'une masse cylindrique indéfinie et cherchons les figures infiniment voisines. Nous supposerons que la déformation est telle que la nouvelle figure reste cylindrique sans être de révolution. Nous aurons ainsi à résoudre un problème à deux dimensions. En considérant une tranche de hauteur 1, le volume sera remplacé par l'aire de la section droite, et la surface latérale par son périmètre.

Soient comme précédemment

$$r = a$$

l'équation du cylindre, et

$$r = a + \rho = \varepsilon \sin k\theta$$

l'équation de la surface déformée, θ étant l'angle polaire.

Le volume d'une tranche de hauteur 1 sera

$$V = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [(a+\rho)^2 + \rho(a+\rho)\varepsilon \sin k\theta + \varepsilon^2 \sin^2 k\theta]\,d\theta$$

et la condition d'invariabilité du volume s'écrira

$$\delta V = \pi\left[\varepsilon^2 + 2a\rho + \rho^2 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right] = 0.$$

Elle est identique à celle que nous avons trouvée pour les figures ondulées dans le sens longitudinal et donne

$$\rho = \frac{\varepsilon^2}{2a}.$$

L'élément de la surface déformée est

$$dS = \sqrt{r^2 + r^2 d\theta^2}$$
$$= (a+\rho)\sqrt{1 + \frac{2\varepsilon}{a+\rho}\sin k\theta + \frac{\varepsilon^2}{(a+\rho)^2}(\sin^2 k\theta + k^2\cos^2 k\theta)}\,d\theta.$$

En développant le radical en série suivant les puissances de ε et en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur à 2, nous aurons

$$dS = \left[(a+\rho) + \varepsilon \sin k\theta + \frac{\varepsilon^2}{2a} k^2 \cos^2 k\theta\right] d\theta.$$

En intégrant, de $\theta = 0$ à $\theta = 2\pi$ et en soustrayant $S_0 = 2\pi a$, nous aurons

$$\delta S = -2\pi\mu + \frac{k^2\varepsilon^2}{4a}2\pi$$

et finalement

$$\delta S = \frac{\pi}{2a}(k^2 - 1)\varepsilon^2.$$

Pour $k = 1$, $\delta S = 0$, ce qui est tout à fait compréhensible, car la déformation correspondante consiste en une translation du cylindre parallèlement à son axe. Naturellement nous excluons cette transformation et nous posons seulement

$$k = 2, \quad 3, \quad \ldots.$$

Le moment d'inertie est

$$J = \int_0^{2\pi}\int_0^{r} r^3\,dr\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(a - \mu - \varepsilon\sin k\theta)^4 d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}[(a-\mu)^4 + 4(a-\mu)^3\varepsilon\sin k\theta + 6(a-\mu)^2\varepsilon^2\sin^2 k\theta + \ldots]d\theta.$$

Tous les calculs faits, nous trouvons la formule déjà rencontrée

$$\delta J = \pi a^2\varepsilon^2.$$

Nous pouvons former maintenant δW :

$$\delta W = \frac{\omega^2}{2}\pi a^2\varepsilon^2 - f\frac{\pi}{2a}(k^2 - 1)\varepsilon^2 = \frac{\pi\varepsilon^2}{2a}[\omega^2 a^3 - f(k^2 - 1)].$$

L'équation qui détermine les figures de bifurcation est donc

$$\omega^2 = f\frac{k^2 - 1}{a^3}.$$

En donnant à k les valeurs 2, 3, 4, ..., nous obtiendrons les valeurs

$$\omega_2, \quad \omega_3, \quad \ldots, \quad \omega_k$$

déterminant une série discontinue des figures de bifurcation. Le nombre k désigne le nombre de saillies ou de côtes de la nouvelle figure.

La valeur $k = 2$ donne une figure analogue au cylindre elliptique.

Si nous assujettissons la masse liquide à la condition de rester cylindrique, le cylindre circulaire sera stable lorsque

$$\omega^2 - \frac{f(k^2-1)}{a^2} < 0$$

pour toutes les valeurs de k. Pour cela, il faut évidemment que cette inégalité soit vérifiée pour $k = 2$, c'est-à-dire il faut que

$$\omega^2 < \frac{3f}{a^2}.$$

Lorsque ω dépasse légèrement cette valeur, il y aura deux figures possibles d'équilibre : cylindre circulaire et cylindre genre elliptique. Mais alors le maximum de l'énergie correspondra à ce dernier et non pas au cylindre circulaire. La figure stable sera donc représentée par le cylindre genre elliptique.

Nous observons ici encore une fois la vérification du principe d'échange des stabilités.

Mais si nous n'introduisons aucune condition supplémentaire, toutes les figures cylindriques indéfinies seront instables, car, quel que soit le rayon a, nous pouvons toujours transformer notre cylindre en une figure ondulée de révolution et prendre la longueur d'onde λ assez grande ($\lambda > 2\pi a$) pour que δW correspondant à cette transformation soit positive pour toutes les valeurs de ω, même pour $\omega = 0$.

14. *Cas général.* — Si nous voulons étudier les figures plus générales, données par l'équation

$$r = a + \sum_{i=0}^{\infty} (a \cos i\theta + b \sin i\theta)$$

nous trouvons, en refaisant les mêmes calculs,

$$\rho = \frac{\varepsilon^2}{4a},$$

$$\delta S = \frac{\pi}{2a}(\omega^2 - \varepsilon^2),$$

$$\delta J = \pi\rho a^2 \varepsilon^2.$$

enfin

$$\delta W = \frac{2\pi}{2a}\varepsilon^2\left[\omega^2 a^3 - f\left(\frac{a^2}{c^2} - 1\right)\right],$$

où l'on pose comme précédemment

$$\varepsilon^2 = \sum_{i,k}' (a_i^2 + b_i^2); \qquad \varepsilon'^2 = \sum_{i,k}' i^2 (a_i^2 + b_i^2).$$

En remarquant que $\varepsilon'^2 > k^2\varepsilon^2$, nous voyons que, pour qu'une de ces figures soit d'équilibre, et côtelée à k côtes, il faut que tous les coefficients, sauf b_k, soient d'ordre supérieur à 1. Par conséquent, en se bornant à la première approximation, nous pouvons affirmer que les seules figures cylindriques d'équilibre, infiniment voisines d'un cylindre indéfini de rotation, sont les figures sinusoïdales côtelées que nous venons d'étudier; et que les figures exactes d'équilibre diffèrent des figures sinusoïdales simples par des écarts infiniment petits d'ordre supérieur.

15. *Problème direct.* — Nous venons de voir que pour une certaine vitesse ω_k, que nous appellerons *vitesse de bifurcation relative à la figure* k, la masse liquide pourra affecter non seulement la figure d'un cylindre circulaire, mais encore une figure infiniment voisine du cylindre à k côtes ou, autrement dit, à k maxima de r.

Si la vitesse ω_k est très peu supérieure à ω_k, la nouvelle figure est très voisine d'une figure sinusoïdale. Mais ω croissant, les saillies se marquent davantage et notre figure s'éloigne de la forme sinusoïdale.

La question suivante se pose immédiatement : *Que deviennent effectivement ces figures, d'abord sinusoïdales, lorsque* ω *croît?*

Pour répondre à cette question, proposons-nous de résoudre le problème direct suivant :

Trouver toutes les figures d'équilibre cylindriques et non de révolution que peut affecter une masse liquide indéfinie, soumise aux seules forces capillaires et tournant autour d'un axe fixe avec une vitesse angulaire constante.

Cherchons donc l'équation finie de la section droite d'une figure d'équilibre cylindrique et non de révolution.

L'équation de la surface d'équilibre d'une masse fluide, soumise aux seules forces moléculaires et tournant autour de l'axe Oz avec une vitesse angulaire constante ω, est

$$f\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)-\frac{2\omega^2}{g}(x^2+y^2)=\text{const.}.$$

R et R′ étant des rayons principaux de courbure.

Mais pour la figure cylindrique un des rayons de courbure est infini et l'autre est celui de la section droite.

En employant les coordonnées polaires r et θ, l'équation précédente devient, en divisant par la tension superficielle f et en posant

$$\frac{\omega^2}{gf}=a,$$

$$(1)\qquad \frac{r^2+2r'^2-rr''}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}-ar^2-b=0,$$

b étant une constante arbitraire.

Pour intégrer cette équation, prenons r' pour la nouvelle fonction et r pour la nouvelle variable, en posant

$$r'=p,\qquad r''=pp'.$$

Il vient

$$\frac{r^2+2p^2-rpp'}{(r^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}=ar^2+b.$$

Prenons ensuite pour nouvelle inconnue

$$u=\sqrt{r^2+p^2},$$

d'où

$$p^2=u^2-r^2,\qquad pp'=uu'-r,$$

et l'équation (1) devient

$$\frac{2}{u}-\frac{ru'}{u^2}=a^2r^2+b.$$

Enfin, en posant $v=\frac{1}{u}$, nous obtiendrons une équation linéaire

$$rv'+2v=-a^2r^2-b.$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$c = \frac{a^2 r^4 + 2br^2 + c}{16r^2}$$

c étant une constante d'intégration.

En faisant le changement de variables dans le sens inverse, nous aurons

$$u = \frac{16r^2}{a^2 r^4 + 2br^2 + c}.$$

$$p = \frac{dr}{d\theta} = \sqrt{u^2 - r^2} = \sqrt{\left(\frac{16r^2}{a^2 r^4 + 2br^2 + c}\right)^2 - r^2}$$

$$= \frac{\sqrt{16r^2 - r^2(a^2 r^4 + 2br^2 + c)^2}}{a^2 r^4 + 2br^2 + c}.$$

Ensuite,

$$\theta = \int_{r_0}^{r} \frac{(a^2 r^4 + 2br^2 + c)\, dr}{r\sqrt{16r^2 - (a^2 r^4 + 2br^2 + c)^2}}.$$

Enfin, en posant $r^2 = u$, nous aurons

$$\theta = \frac{1}{2}\int_{u_0}^{u} \frac{(a^2 u^2 + 2bu + c)\, du}{u\sqrt{16u - (a^2 u^2 + 2bu + c)^2}},$$

équation presque identique à celle que nous avons obtenue pour les figures de révolution.

La différence essentielle entre cette équation et celle des figures de révolution consiste en ce que la constante c ne peut jamais être nulle.

De plus, en outre de la condition d'invariabilité de volume (ici l'invariabilité de l'aire de la section droite), nous devons introduire encore la condition que la courbe, périmètre de la section droite, se ferme. C'est-à-dire que la distance angulaire entre deux maxima successifs de r soit un sous-multiple de 2π. Sans cela, la courbe obtenue ne correspondra à aucune figure réelle.

Nous aurons ainsi deux conditions auxquelles doivent satisfaire les trois constantes a, b, c. Ces conditions, qui exprimeront que l'aire de la section droite est constante, et que le nombre de maxima de r (nombre de côtés) est égal à n, nous permettront d'exprimer toutes les constantes en fonction de ω. Pour avoir toutes les variations de la figure à n côtés, nous donnerons à ω toutes les valeurs à partir de $\omega = \omega_n$ (vitesse de bifurcation).

En répétant mot à mot la discussion que nous avons faite pour les figures de révolution (ma première Thèse, troisième Partie), nous verrons que, ω croissant, le discriminant $b^2 - 4ac$ est d'abord négatif, ensuite nul et enfin positif. La section droite prend alors successivement les formes analogues aux méridiens des figures de révolution. Pour ω voisine de ω_n, les saillies ne sont pas très prononcées et la ligne est ondulée par rapport au cercle du cylindre. Quand ω croît, les saillies deviennent plus fortes, et, quand $b^2 - 4c$ devient positif, elles reçoivent des étranglements latéraux qui s'accentuent et puis se rencontrent. La courbe a alors un point double à chaque saillie. Représentons ces variations pour le cas de $n = 2$.

Fig. [illegible]

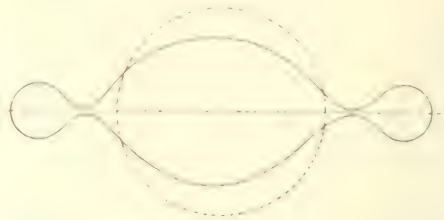


Fig. [illegible]

Si ω croît encore, il se forme deux points doubles à chaque saillie. Ensuite, les tangentes aux points doubles coïncident et deviennent perpendiculaires au rayon vecteur. Enfin, la courbe se décompose en trois courbes distinctes. Ces trois cas sont représentés sur les figures 3, 4 et 5.

Nous aurons la même succession de figures si nous prenons $n = 3, 4, 5, \ldots$.

Il faut seulement remarquer que les figures 3, 4 et 5 n'ont aucune signification réelle, car le liquide ayant pris la forme de la figure 2 se divise en trois parties. Ces parties, une fois détachées l'une de l'autre, prennent la forme de la figure 1 comme si elles étaient libres.

En résumant, nous pouvons dire que, lorsque ω croît, toutes les saillies s'allongent, puis reçoivent des étranglements latéraux, enfin donnent naissance chacune à un petit cylindre qui jouera le rôle de satellite. La figure à n saillies produira alors n satellites.

Il est utile de noter ici, encore une fois, que les calculs nécessaires pour la détermination des constantes a, b, c en fonction de ω sont

impossibles à effectuer, les intégrales donnant ces relations étant hyperelliptiques. Nous ne pouvons donc que résoudre le problème

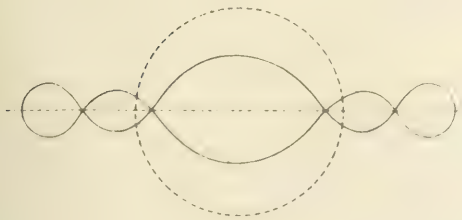


Fig. 5.

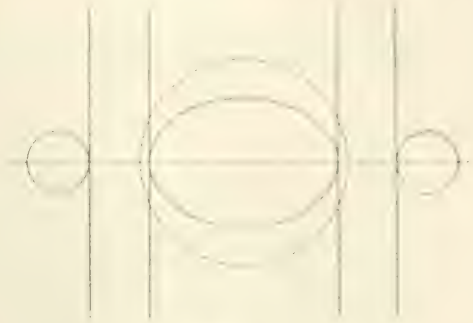


Fig. 6.

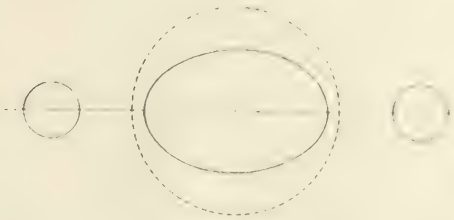


Fig. 7.

inverse : se donner arbitrairement les valeurs des constantes et déterminer la figure correspondante et le cylindre duquel elle provient.

16. *Résumé.* — Pour résumer notre analyse, considérons une masse liquide à l'état d'équilibre statique. Ensuite, imprimons à cette masse une rotation autour d'un axe fixe et faisons croître peu à peu la vitesse angulaire. La figure de la masse liquide se modifiera, mais elle affectera toujours une figure d'équilibre stable.

Tâchons de suivre ces transformations à partir de la forme cylindrique. Considérons d'abord un cylindre de longueur finie limité en haut et en bas par deux disques circulaires. Nous devons considérer ici deux cas différents : 1° le cylindre est large et court,

$$\frac{h}{2\pi a} < 0.5118$$

et 2° le cylindre est long,

$$\frac{h}{2\pi a} > 0.8118.$$

Dans le premier cas, la figure restera cylindrique jusqu'au moment où la vitesse angulaire atteindra la valeur

$$\omega = f\left(\frac{\pi^2}{6ah^2}\right)\left(3 - \frac{2\alpha}{\pi}\right)^2$$

ou

$$\omega = f\frac{\pi^2}{6ah^2}(3 - 0.1394) = 2.8606\, f\frac{\pi^2}{6ah^2}.$$

Lorsque la vitesse ω croît encore, le cylindre, d'abord droit, affectera un renflement au milieu et deux creux près des bases [1]. Ensuite ce renflement deviendra de plus en plus prononcé, s'aplatira d'abord dans le sens de l'axe de rotation, recevra ensuite des creux circulaires en haut et en bas, et enfin laissera se détacher un anneau qui continuera à tourner sous l'impulsion de la force vive acquise. Quant à la masse centrale, elle changera brusquement de forme et son mouvement ne sera plus régi par les équations que nous avons établies. En effet, la masse liquide ayant diminué de volume après le détachement de l'anneau, la figure d'équilibre statique ne serait plus le cylindre, mais un onduloïde ou un nodoïde creux. Le point de départ étant différent, toute l'analyse doit être refaite de nouveau.

Nous obtenons le résultat analogue pour le deuxième cas, où le cylindre est long.

La figure cylindrique reste stable jusqu'au moment où la vitesse angulaire atteint

$$\omega = \Omega = f\frac{4\pi^2 + h^2}{a^2 b^2}.$$

Après quoi, le cylindre recevra un renflement près d'une base et un creux près de l'autre. La vitesse croissant toujours, le renflement devient de plus en plus prononcé et, finalement, laisse se détacher un anneau.

Ensuite l'anneau tournera séparément, et la masse centrale changera brusquement de forme en prenant une figure d'équilibre correspondant, non plus au cylindre circulaire, mais à un onduloïde ou à un nodoïde, comme nous l'avons montré pour le premier cas.

---

(1) Voir page 24.

Si la masse liquide est assujettie à rester cylindrique et si la figure primitive est un cylindre indéfini, les déformations successives sont déjà données par les figures 1 et 2. La forme du cylindre satellite sera donnée par la figure 5.

Mais ce cas ne présente aucun intérêt pratique, car tous ces cylindres sont irréalisables.

DEUXIÈME PARTIE.

Sur une nouvelle figure d'équilibre d'une masse fluide en rotation.

1. *Introduction.* — Toutes les figures d'équilibre d'une masse fluide homogène en rotation, soumise aux seules forces newtoniennes étudiées jusqu'à ce moment, étaient des figures limitées par une surface fermée d'un seul tenant ([1]).

Nous voulons démontrer maintenant qu'il existe aussi des figures d'équilibre creuses, c'est-à-dire limitées par deux surfaces distinctes ne se coupant pas.

Nous ne nous occuperons ici que des figures dont on connaît actuellement le potentiel newtonien, autrement dit, des figures limitées par des ellipsoïdes ou par des cylindres elliptiques ou circulaires.

Nous montrerons que, parmi toutes ces figures, seule la couche cylindrique de révolution peut présenter une figure d'équilibre. Cette figure existe pour toutes les valeurs de la vitesse angulaire ω depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = \sqrt{2\pi}$, et présente deux séries discontinues et infinies de figures de bifurcation.

Chacune de ces figures peut donner naissance à une nouvelle série de figures d'équilibre.

([1]) *Voir* P. Appell, *Traité de Mécanique*, t. III. — Poincaré, *Figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation*, leçons professées à la Sorbonne en 1900, ou son Mémoire classique dans le n° VII des *Acta mathematica*, 1885. — Liapounoff, *Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes* (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg*, 1884). — Lichtenstein, ma Thèse *Sur quelques nouvelles figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation* (*Journal de Mathématiques*, 1916).

2. *Impossibilité des figures creuses ellipsoïdales.* — Imaginons une masse fluide homogène, limitée par deux ellipsoïdes homothétiques, soumise aux seules forces newtoniennes et tournant autour d'un axe fixe commun aux deux ellipsoïdes, avec une vitesse angulaire constante. Nous prendrons l'axe de rotation pour axe Oz.

Le liquide affecte donc la figure d'une couche elliptique. Nous savons qu'à l'intérieur d'une telle couche (à l'intérieur de l'ellipsoïde intérieur), le potentiel reste constant.

Donc la fonction des forces à l'intérieur et sur la surface intérieure est donnée par la formule suivante :

$$U = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + c,$$

ω désignant la vitesse angulaire. Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

l'équation de l'ellipsoïde intérieur.

Si la masse fluide est en équilibre relatif, cet ellipsoïde présente une surface de niveau et, par conséquent, ses coefficients doivent vérifier les relations suivantes :

$$\frac{\omega^2}{2} \cdot a^2 + \frac{\omega^2}{2} \cdot b^2 = 0,$$

qui peuvent être vérifiées de deux manières :

1° $$a = b = c,$$

la couche elliptique est un ellipsoïde plein.

2° $$a = b = c = \infty;$$

la couche ellipsoïdale dégénère en une couche cylindrique de révolution.

Par conséquent, parmi toutes les figures ellipsoïdales limitées par deux surfaces homothétiques de second ordre, seule la couche cylindrique de révolution présente une figure d'équilibre.

3. *Ellipsoïdes homofocaux.* — Montrons maintenant l'impossibilité de la figure d'équilibre limitée par deux ellipsoïdes homofocaux. Mais pour cela nous devons introduire les coordonnées elliptiques.

En admettant les notations de Poincaré [1], nous prendrons pour les coordonnées d'un point (x, y, z) les racines ρ, μ, ν de l'équation en λ

$$(1) \qquad \frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1 \quad (a > b > c).$$

et nous désignerons par R_i et S_i les fonctions de Lamé de première et de seconde espèce. Ces fonctions ne dépendent que de ρ et conservent une valeur constante sur la surface de chacun des ellipsoïdes appartenant à la famille (1).

A chaque valeur de ρ, prise entre ∞ et a, correspond un ellipsoïde de cette famille, et par chaque point de l'espace passe un de ces ellipsoïdes.

Ceci posé, rappelons que pour $n = 1$ nous n'aurons qu'une fonction de Lamé (n désignant ici l'ordre de la fonction) :

$$R_0 = 1.$$

Pour $n = 2$, nous en aurons trois :

$$R_1 = \sqrt{\rho^2 - a^2},$$
$$R_2 = \sqrt{\rho^2 - b^2},$$
$$R_3 = \sqrt{\rho^2 - c^2}.$$

Pour $n = 3$, nous aurons déjà cinq fonctions; et, en général, pour n quelconque, nous aurons $2n + 1$ fonctions différentes.

Si, dans R_i, nous remplaçons ρ par μ ou par ν, nous aurons les fonctions analogues que nous désignons par M_i et N_i.

Les fonctions de seconde espèce, S_i, sont données par la formule suivante :

$$S_i = R_i \int_{\infty}^{\rho} \frac{2n+1}{R_i^2} \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}.$$

Avec ces notations, et en posant

$$h_1 = \frac{1}{\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}}, \qquad h_2 = \frac{1}{\sqrt{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)}},$$
$$h_3 = \frac{1}{\sqrt{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}},$$

[1] Voir *Figures d'équilibre* ... de Poincaré ou mon premier Thèse.

on aura

$$x = h_1 R_1 M_1 N_1; \qquad y = h_2 R_2 M_2 N_2; \qquad z = h_3 R_3 M_3 N_3.$$

Considérons un ellipsoïde E_0, ayant pour équation

$$(E_0) \qquad \frac{x^2}{R_1^{0\,2}} + \frac{y^2}{R_2^{0\,2}} + \frac{z^2}{R_3^{0\,2}} - 1 = 0.$$

Son potentiel en un point extérieur (x, y, z) sera alors donné par la formule suivante :

$$(2) \qquad V_i = \frac{T}{2}\left[\frac{S_1}{R_1}x^2 + \frac{S_2}{R_2}y^2 + \frac{S_3}{R_3}z^2\right] + \text{const.},$$

T étant le volume de l'ellipsoïde E_0

$$T = \frac{4}{3}\pi R_1 R_2 R_3$$

et les fonctions S_i et R_i $(i = 1, 2, 3)$ correspondant à l'ellipsoïde de la famille (1) passant par le point (x, y, z).

En un point situé à l'intérieur de E_0, ce potentiel prend la forme

$$(3) \qquad V_e = \frac{T}{2}\left[\frac{S_1'}{R_1^0}x^2 + \frac{S_2'}{R_2^0}y^2 + \frac{S_3'}{R_3^0}z^2\right] + \text{const.},$$

S_i' et R_i^0 désignant les valeurs des S_i et R_i qu'elles prennent sur la surface de l'ellipsoïde E_0.

Imaginons maintenant une couche ellipsoïdale limitée par deux ellipsoïdes homofocaux : à l'extérieur par E^0 et à l'intérieur par l'ellipsoïde E', dont l'équation s'écrira

$$(E') \qquad \frac{x^2}{R_1'^2} + \frac{y^2}{R_2'^2} + \frac{z^2}{R_3'^2} - 1 = 0$$

En désignant encore par ρ' la valeur de ρ correspondant à l'ellipsoïde E', nous verrons facilement que

$$\rho' = \rho.$$

Soient A le volume de l'ellipsoïde extérieur E^0 et B celui de l'ellipsoïde intérieur E'. Le volume de la couche sera alors

$$T = A - B.$$

En un point extérieur, le potentiel de cette couche sera égal à la différence des potentiels des ellipsoïdes E_0 et E', et, en vertu des formules (2) et (3), sera donné par la formule suivante :

$$V_e = -\frac{A-B}{2}\left[\frac{S_1}{R_1}x^2 + \frac{S_2}{R_2}y^2 + \frac{S_3}{R_3}z^2\right] + \text{const.}$$

Sur la surface extérieure du fluide, c'est-à-dire sur la surface de E_0, ce potentiel prend évidemment la forme suivante :

$$(4) \qquad V_e^0 = -\frac{A-B}{2}\left[\frac{S_1^0}{R_1^0}x^2 + \frac{S_2^0}{R_2^0}y^2 + \frac{S_3^0}{R_3^0}z^2\right] + \text{const.}$$

En remarquant que chaque point de la surface E' est intérieur à E^0, nous aurons pour les valeurs du potentiel sur la surface E' la formule suivante :

$$(5) \qquad V_e' = -\frac{A}{2}\left[\frac{S_1^0}{R_1^0}x^2 + \frac{S_2^0}{R_2^0}y^2 + \frac{S_3^0}{R_3^0}z^2\right] + \frac{B}{2}\left[\frac{S_1}{R_1}x^2 + \frac{S_2}{R_2}y^2 + \frac{S_3}{R_3}z^2\right] + \text{const.}$$

Si la couche présente une figure d'équilibre pour une certaine valeur de la vitesse angulaire ω, et si l'on suppose que la pression exercée sur chacune des deux surfaces libres soit la même, la fonction des forces

$$(6) \qquad U = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + V$$

doit alors prendre la même valeur constante sur chacun des deux ellipsoïdes E^0 et E'.

Remplaçons les variables x, y, z par leurs valeurs en fonction des R_i, M_i, N_i, et, en vertu des formules (4), (5) et (6), nous pourrons écrire

$$\begin{aligned} U^0 = &\left[\frac{\omega^2}{2} - \frac{A-B}{2}\frac{S_1^0}{R_1^0}\right] h_1^2 R_1^{0\,2} M_1^2 N_1^2 \\ &- \left[\frac{\omega^2}{2} - \frac{A-B}{2}\frac{S_2^0}{R_2^0}\right] h_2^2 R_2^{0\,2} M_2^2 N_2^2 - \frac{A-B}{2}\frac{S_3^0}{R^0} h_3^2 R_3^{0\,2} M_3^2 N_3^2, \end{aligned}$$

U^0 désignant la valeur que prend U sur E^0.

De même, sur E', U devient

$$\begin{aligned} U' = &\left(\frac{\omega^2}{2} - \frac{A}{2}\frac{S_1^0}{R_1^0} + \frac{B}{2}\frac{S_1}{R_1}\right) h_1^2 R_1^2 M_1^2 N_1 \\ &+ \left(\frac{\omega^2}{2} - \frac{A}{2}\frac{S_2^0}{R_2^0} + \frac{B}{2}\frac{S_2}{R_2}\right) h_2^2 R_2^2 M_2^2 N_2^2 - \left(\frac{A}{2}\frac{S_3^0}{R_3^0} - \frac{B}{2}\frac{S_3}{R_3}\right) h_3^2 R_3^2 M_3^2 N_3^2 \end{aligned}$$

Mais nous devons avoir

$$U^0 = U'$$

identiquement, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de μ et de ν. Nous pouvons donc identifier les coefficients des divers produits M_i, N_i, et nous aurons les trois équations suivantes :

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left[\frac{\omega^2}{2} - \frac{A-B}{2}\frac{S_1^0}{R_1^0}\right] R_1^{0\,2} = \left[\frac{\omega^2}{2} - \frac{A}{2}\frac{S_1^0}{R_1^0} + \frac{B}{2}\frac{S_1}{R_1}\right] R_1'^2,\\
&\left[\frac{\omega^2}{2} - \frac{A-B}{2}\frac{S_2^0}{R_2^0}\right] R_2^{0\,2} = \left[\frac{\omega^2}{2} - \frac{A}{2}\frac{S_2^0}{R_2^0} + \frac{B}{2}\frac{S_2}{R_2}\right] R_2'^2,\\
&\quad - \frac{A-B}{2}\frac{S_3^0}{R_3^0} R_3^{0\,2} = \left[\quad - \frac{A}{2}\frac{S_3^0}{R_3^0} + \frac{B}{2}\frac{S_3}{R_3}\right] R_3'^2.
\end{aligned}\right.$$

Nous pouvons écrire encore quatre équations [dont deux seulement seraient distinctes des équations (7)] en exprimant que U^0 et U' sont constantes respectivement sur les surfaces E^0 et E'. Mais il nous suffira de démontrer l'impossibilité de la dernière des équations déjà écrites pour démontrer l'impossibilité des figures considérées.

Écrivons cette équation comme il suit :

$$(8)\qquad (A-B)\frac{S_3^0}{R_3^0}(R_3^{0\,2} - R_3'^2) = B\left(\frac{S_3^0}{R_3^0} - \frac{S_3}{R_3}\right) R_3'^2,$$

et montrons qu'elle est impossible. Pour cela, rappelons que, dans nos notations,

$$R_1^0 = \sqrt{\rho_0^2 - a^2}, \qquad R_2^0 = \sqrt{\rho_0^2 - b^2}, \qquad R_3^0 = \sqrt{\rho_0^2 - c^2},$$
$$R_1 = \sqrt{\rho'^2 - a^2}, \qquad R_2 = \sqrt{\rho'^2 - b^2}, \qquad R_3 = \sqrt{\rho'^2 - c^2};$$

enfin

$$S_i = R_i \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{(n+1)}{R^2} \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}.$$

Désignons par x la variable d'intégration, posons, pour abréger l'écriture,

$$\frac{x}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)(x^2 - c^2)}} = \varphi(x) > 0;$$

rappelons que nous aurons, pour $i = 3$,

$$\frac{S_3^0}{R_3^0} = 3\int_{\rho_0}^{\infty} \frac{1}{x^2 - c^2}\varphi(x)\,dx > 0$$

et

$$\frac{S_3}{R_3} = 3\int_{\rho_0}^{\infty} \frac{1}{x^2 - c^2}\,\varphi(x)\,dx,$$

enfin

$$R_3^{0\,2} - R_3^2 = \rho_0^2 - \rho^2 = 0.$$

Formons maintenant la différence

$$\frac{S_3^0}{R_3^0} - \frac{S_3'}{R_3} = 3\left\{\int_{\rho_0}^{\infty} \frac{\varphi(x)\,dx}{x^2 - c^2} - \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{\varphi(x)\,dx}{x^2 - c^2}\right\} = -3\int_{\rho_0}^{\infty} \frac{\varphi(x)\,dx}{x^2 - c^2} = 0.$$

Par conséquent, l'équation (8) ne peut jamais être vérifiée, les deux membres de cette équation étant de signes différents. Les conditions (7) ne peuvent donc jamais être vérifiées et la figure envisagée est impossible.

Par conséquent, une couche fluide limitée par deux ellipsoïdes homofocaux et tournant autour de leur axe commun avec une vitesse angulaire constante ne peut jamais être en équilibre relatif.

C. Q. F. D.

Nous aurons toujours le même résultat en supposant que la pression extérieure, étant constante le long de chaque surface, est différente sur les deux surfaces. La condition d'équilibre s'écrira alors

$$U^0 - U' = \text{const.}$$

et les conditions (7) resteront les mêmes.

4. *Cas général. Ellipsoïdes quelconques.* — Considérons maintenant le cas le plus général, où les ellipsoïdes E^0 et E' ne sont ni homothétiques ni homofocaux. Nous supposerons seulement qu'ils ont le même centre et les mêmes axes principaux.

Désignons par $\overline{R_i}$ et $\overline{S_i}$ les fonctions de Lamé correspondant à la famille des ellipsoïdes homofocaux à l'ellipsoïde E'. La fonction des forces U prendra alors dans ce cas sur E^0 la valeur suivante :

$$U_0 = \left[\frac{\omega^2}{2} - \frac{A}{2}\frac{S_1'}{R_1^0} + \frac{B}{2}\frac{\overline{S_1^0}}{\overline{R_1^0}}\right] h_1^2 (R_1^0)^2 (M_1)^2 N_1 = \left[\frac{\omega^2}{2} - \frac{A}{2}\frac{S_1^0}{R_1^0} + \frac{B}{2}\frac{\overline{S_1^0}}{\overline{R_1^0}}\right] h_1^2 (R_1^0)^2 (M_1)^2 N_1$$

$$+ \left[\frac{\omega^2}{2} - \frac{A}{2}\frac{S_1'}{R_1^0} + \frac{B}{2}\frac{\overline{S_1^0}}{\overline{R_1^0}}\right] h_1^2 (R_1^0)^2 (M_1)^2 N_1$$

Seulement les fonctions R_i^0 et S_i^0 $(i = 1, 2, 3)$ ne sont plus constantes sur E^0, car E^0 et E' ne sont pas homofocaux. Nous pouvons donc écrire

$$\frac{\overline{S_1^0}}{\overline{R_1^0}} = \frac{S_1^0}{R_1^0} + \varphi_1(\mu, \nu),$$

ou, en développant $\varphi_1(\mu, \nu)$ en série de produits de Lamé,

$$\frac{\overline{S_1^0}}{\overline{R_1^0}} = \frac{S_1^0}{R_1^0} + \Sigma A_1^i M_i N_i.$$

De même

$$\frac{\overline{S_2^0}}{\overline{R_2^0}} = \frac{S_2^0}{R_2^0} + \Sigma A_2^i M_i N_i,$$

$$\frac{\overline{S_3^0}}{\overline{R_3^0}} = \frac{S_3^0}{R_3^0} + \Sigma A_3^i M_i N_i.$$

En portant ces valeurs dans l'expression de U^0, nous aurons

$$U^0 = \left(\frac{m'}{2} - \frac{A - B}{2}\frac{S_1^0}{R_1^0}\right) h_1 R_1^0 M_1 N_1$$
$$+ \left(\frac{m'}{2} - \frac{A - B}{2}\frac{S_2^0}{R_2^0}\right) h_2 R_2^0 M_2 N_2 + \frac{A - B}{2}\frac{S_3^0}{R_3^0} h_3 R_3^0 M_3 N_3 + \Phi(\mu, \nu),$$

où $\Phi(\mu, \nu)$, développée en série des produits de Lamé, ne contiendra pas de fonctions de Lamé de degré inférieur à 3, car $M_1^2 N_1^2$, $M_2^2 N_2^2$, $M_3^2 N_3^2$ sont du deuxième degré et, par conséquent, leur produit par une somme de Lamé ne pourra jamais contenir des termes au-dessous du troisième degré.

En faisant le même calcul pour U', nous aurons

$$U' = \left(\frac{m}{2} - \frac{A}{2}\frac{S_1}{R_1} + \frac{B}{2}\frac{\overline{S_1}}{\overline{R_1}}\right) h_1 R_1 \overline{M_1} \overline{N_1}$$
$$+ \left(\frac{m}{2} - \frac{A}{2}\frac{S_2}{R_2} + \frac{B}{2}\frac{S_2}{R_2}\right) h_2 R_2 M_2 N_2$$
$$+ \left(\frac{A}{2}\frac{S_3}{R_3} + \frac{B}{2}\frac{S_3}{R_3}\right) h_3 R_3 \overline{M_3} \overline{N_3} + \psi(\mu, \nu),$$

$\psi(\mu, \nu)$ ne contenant pas de termes en μ et ν de degré inférieur au troisième.

En écrivant que

$$U^0 = U$$

et en identifiant les coefficients des différents produits de Lamé, nous aurons une infinité de conditions parmi lesquelles figureront au premier plan les conditions analogues aux conditions (7). La dernière de ces conditions s'écrira

$$\frac{A-B}{2}\frac{S_3^0}{R_3^0}h_3^2 R_3^{0\,2} = \left(\frac{A}{2}\frac{S_3^0}{R_3^0} - \frac{B}{2}\frac{\overline{S_3}}{\overline{R_3}}\right)\overline{h_3^2}\,\overline{R_3^2}$$

ou encore

$$(9)\qquad (A-B)\frac{S_3^0}{R_3^0}\left(h_3^2 R_3^{0\,2} - \overline{h_3^2}\,\overline{R_3^2}\right) = B\left(\frac{S_3^0}{R_3^0} - \frac{\overline{S_3}}{\overline{R_3}}\right)\overline{h_3^2}\,\overline{R_3^2}.$$

De la même manière, nous pouvons écrire deux autres équations :

$$(9')\qquad (A-B)\frac{S_1^0}{R_1^0}\left(h_1^2 R_1^{0\,2} - \overline{h_1^2}\,\overline{R_1^2}\right) = B\left(\frac{S_1^0}{R_1^0} - \frac{\overline{S_1}}{\overline{R_1}}\right)\overline{h_1^2}\,\overline{R_1^2}.$$

$$(9'')\qquad (A-B)\frac{S_2^0}{R_2^0}\left(h_2^2 R_2^{0\,2} - \overline{h_2^2}\,\overline{R_2^2}\right) = B\left(\frac{S_2^0}{R_2^0} - \frac{\overline{S_2}}{\overline{R_2}}\right)\overline{h_2^2}\,\overline{R_2^2}.$$

Pour démontrer l'impossibilité des figures considérées, il nous suffira de démontrer l'impossibilité de l'une des équations (9), (9') ou (9'').

Considérons un ellipsoïde E'' homofocal à E⁰ et tangent à E' de manière qu'il lui soit tout extérieur. Choisissons encore les constantes a'', b'', c'' relatives à l'ellipsoïde E'' de manière que ρ soit le même pour E' et E''. Il suffira pour cela de prendre

$$a'' = \overline{a}, \qquad \text{ou} \qquad b'' = \overline{b}, \qquad \text{ou} \qquad c'' = \overline{c},$$

suivant que les ellipsoïdes se touchent suivant les sommets situés sur l'axe Ox, l'axe Oy ou l'axe Oz.

Supposons d'abord que les ellipsoïdes se touchent suivant l'axe Oz. Nous aurons alors

$$c'' = \overline{c}, \qquad b'' > \overline{b}, \qquad a'' > \overline{a};$$

ensuite

$$R_3'' = \overline{R_3}, \qquad h_3^2 > h_3, \qquad \varphi(x) > \varphi(x).$$

Ceci posé, démontrons que l'équation (9) est impossible. Pour cela, il

nous suffira de démontrer les inégalités suivantes :

$$(a) \qquad h_1^2 R_1^{0\,2} - \overline{h_1^2}\,\overline{R_1^2} > 0,$$

$$(b) \qquad \frac{S_1^0}{R_1^0} - \frac{\overline{S_1}}{\overline{R_1}} < 0.$$

Mais nous avons déjà démontré dans le numéro précédent que, si E^1 est intérieur par rapport à E^0, nous aurons :

$$(a') \qquad h_1^2 R_1^{0\,2} - h_1^2 R_1^2 > 0,$$

$$(b') \qquad \frac{S_1^0}{R_1^0} - \frac{S_1}{R_1} < 0.$$

Or, nous voyons que

$$h_1^2 R_1^2 = \overline{h_1^2}\,\overline{R_1^2},$$

et par conséquent l'inégalité (a) est bien vérifiée. Ensuite

$$\frac{S_1}{R_1} - \frac{\overline{S_1}}{\overline{R_1}} = \int_{r_2}^{r_1} \frac{2|r| - 2|\bar{r}|}{r^2 - \bar{r}^2}\, dr > 0,$$

car

$$2|r| - 2|\bar{r}| > 0.$$

Donc l'inégalité (b) est aussi vérifiée et les figures envisagées sont impossibles.

Si, au lieu d'avoir $c = \bar{c}$, nous avons $a = \bar{a}$ ou $b = \bar{b}$, nous considérons l'équation (9) ou (9) et la conclusion reste la même.

Des calculs analogues nous montrent qu'il est impossible d'avoir des figures d'équilibre ayant la forme d'une couche limitée par deux cylindres autres que deux cylindres circulaires de même axe.

Par conséquent, la seule figure possible d'équilibre limitée par deux surfaces du second ordre est la couche cylindrique de révolution.

C'est donc de cette figure que nous nous occuperons dans la suite.

3. *Conditions d'équilibre d'une couche cylindrique de révolution.* — Nous savons que le potentiel d'un cylindre circulaire indéfini, de rayon R, est donné par les formules

$$(10) \qquad \begin{cases} V_e = -2\pi R^2 L \dfrac{\rho}{R} + \pi R^2 + C, \\ V_i = \pi\rho^2 + C, \end{cases}$$

ρ étant la distance du point considéré à l'axe du cylindre et C une constante.

Imaginons maintenant une masse fluide homogène, de densité 1, limitée par deux cylindres circulaires de même axe et de rayons

$$R \quad \text{et} \quad r = kR,$$

k désignant le rapport des rayons ($0 < k < 1$). Le potentiel de notre masse étant égal à la différence des potentiels des cylindres de rayons R et r, nous verrons que ce potentiel sera donné par les formules suivantes :

1° A l'extérieur de la masse fluide ($\rho > R$),

$$V_1 = -\pi R^2(1 - k^2) - 2\pi R^2 \left(L\frac{\rho}{R} - k^2 L\frac{\rho}{kR}\right) + C;$$

2° A l'intérieur de la masse fluide ($r < \rho < R$),

$$V_2 = -\pi(\rho^2 - k^2R^2) + 2\pi k^2R^2 L\frac{\rho}{kR} + C; \tag{11}$$

3° Dans le creux ($\rho < r$), le potentiel est constant, égal à C.

En faisant $\rho = R$ et $\rho = r = kR$ dans la formule (11), nous aurons les valeurs suivantes pour le potentiel sur les deux surfaces :

$$V_2^0 = -\pi R^2(1 - k^2 + k^2 L k^2) + C,$$
$$V_2^r = C.$$

Supposons maintenant que notre masse fluide tourne autour de son axe avec une vitesse angulaire constante ω. La fonction des forces à l'intérieur de la masse fluide sera

$$U_2 = \frac{\omega^2}{2}\rho^2 - \pi(\rho^2 - k^2R^2) + 2\pi k^2R^2 L\frac{\rho}{kR} + C \tag{12}$$

et sur les deux surfaces

$$U_2^0 = \frac{\omega^2}{2}R^2 - \pi R^2(1 - k^2 + k^2 L k^2) + C,$$

$$U_2^r = \frac{\omega^2}{2}k^2R^2 + C.$$

En supposant que la pression est la même sur les deux surfaces, nous

aurons les conditions d'équilibre en écrivant que

$$U_e = U_i,$$

ce qui donne la condition d'équilibre cherchée :

$$(13) \qquad \frac{\omega^2}{2\pi} = \frac{1 - k^2 + k^2 \mathrm{L} k^2}{1 - k^2} = f(k^2).$$

Il est facile de voir que, lorsque k varie de 0 à 1, $f(k^2)$ varie de 1 à 0 et passe une fois par toutes les valeurs comprises entre 1 et 0. Par conséquent, pour toutes les valeurs de ω comprises entre 0 et $\sqrt{2\pi}$, il existe une et une seule figure d'équilibre, déterminée par la valeur du rapport k des deux rayons.

Remarque. — En supposant que la pression n'est pas la même sur les deux surfaces, nous aurons une condition d'équilibre identique, à cela près que ω pourra varier entre d'autres limites.

Soient, en effet, p_e et p_i les pressions sur la surface extérieure et sur la surface intérieure. La condition d'équilibre sera

$$U_e = U_i, \qquad U_e = p_e,$$

ce qui donne, en posant

$$p_i - p_e = \mathrm{C}.\mathrm{R}^2\pi(1 - k^2),$$

$$\frac{\omega^2}{2\pi} = \mathrm{C} \cdot \frac{1 - k^2 + k^2 \mathrm{L} k^2}{1 - k^2} = \mathrm{C} \cdot f(k^2).$$

On voit ainsi que si $\mathrm{C} > 0$ ($p_e > p_i$), la quantité $\frac{\omega^2}{2\pi}$ peut varier entre C et $\mathrm{C} + 1$. Les figures creuses sont alors impossibles pour une vitesse assez petite.

Si $-1 < \mathrm{C} < 0$, $p_e < p_i$, mais la différence n'est pas très grande, $\frac{\omega^2}{2\pi}$ varie entre 0 et $\mathrm{C} + 1$. Les figures creuses sont impossibles pour des vitesses se rapprochant de $\omega = \sqrt{2\pi}$, et les figures trop dilatées n'existent pas.

Si enfin $\mathrm{C} < -1$, $p_i - p_e$ trop grande, aucune figure d'équilibre n'est possible.

6. *Figures d'équilibre infiniment voisines d'une couche cylin-*

drique de révolution. Position du problème. — Imaginons une masse fluide homogène, de densité 1, tournant autour d'un axe fixe à la manière d'un solide avec une vitesse angulaire constante ω, et affectant, comme figure d'équilibre relatif, la figure d'une couche cylindrique de révolution.

Nous déformons cette couche en appliquant sur chacune de ses surfaces une couche d'épaisseur infiniment petite, constante le long de chaque génératrice, et de masse totale nulle. On demande quelle doit être la figure primitive (figure de bifurcation) et quelles doivent être les couches appliquées pour que la nouvelle figure reste d'équilibre?

Soient ζ_e et ζ_i les épaisseurs des couches extérieure et intérieure, et v et w leurs potentiels respectifs. En conservant les notations du numéro précédent, nous compterons les ζ_e et ζ_i dans la direction de la normale extérieure au fluide.

Dans ces conditions, la fonction des forces prend la forme

$$U = U^0 + v + w.$$

Pour calculer U sur la surface extérieure et sur la surface intérieure, nous la considérerons comme fonction de ρ et nous la développerons suivant les puissances de $\Delta\rho = \zeta$ et nous aurons, pour la surface extérieure par exemple,

$$U_e = [U]_{\rho=R+\zeta_e} = (U^0 + v + w)_{\rho=R} + \frac{\partial}{\partial\rho}(U^0 + v + w)_{\rho=R} \times \zeta_e.$$

En considérant $\frac{\partial v}{\partial\rho}$ et $\frac{\partial w}{\partial\rho}$ comme des infiniment petits de même ordre que ζ, et en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier, nous aurons finalement

$$(14) \qquad U_e = U^0_{\rho=R} + v^0 + (w_e)_{\rho=R} + \left(\frac{\partial}{\partial\rho}U^0\right)_{\rho=R} \times \zeta_e.$$

De même pour la surface intérieure

$$(15) \qquad U_i = U^0_{\rho=R} + (v_i)_{\rho=R} + w^0 + \left(\frac{\partial}{\partial\rho}U^0\right)_{\rho=R} \times \zeta_i.$$

Pour que la figure déformée soit d'équilibre, nous devons avoir

$$U_e = U_i = C.$$

Mais la figure primitive était d'équilibre, nous avons donc

$$[illegible]$$

et la condition d'équilibre prendra la forme définitive

$$(16) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \rho} U_i\right)_{\rho=R} \zeta_i + [illegible] - \left(\frac{\partial}{\partial \rho} U_i\right)_{\rho=R} \zeta_i + [illegible] = C.$$

Nous développerons ensuite toutes les valeurs qui entrent dans cette double condition en séries suivant une variable convenablement choisie, et, en identifiant les coefficients des termes semblables, nous obtiendrons une double série de conditions qui nous permettront de calculer les épaisseurs ζ_e et ζ_i des couches déformantes et le rapport des rayons

$$[illegible] : R,$$

qui détermineront la nouvelle figure d'équilibre et la figure de bifurcation.

Comme nos figures sont cylindriques, chacune d'elles sera complètement déterminée par sa section droite. Le problème se réduit à un problème de deux dimensions. Au lieu des volumes des cylindres, nous considérerons des aires de leurs sections droites. Les couches cylindriques seront remplacées par des couronnes circulaires. Les couches de l'épaisseur ζ deviendront bandes de largeur ζ et enfin, au lieu de potentiels newtoniens, nous chercherons les potentiels logarithmiques.

Mais, d'abord, nous devons traiter quelques questions auxiliaires.

7. Problème de Dirichlet pour un cercle dans un plan. — *Étant données les valeurs d'une fonction harmonique sur un cercle de rayon R et à l'infini, trouver cette fonction à l'intérieur et à l'extérieur du cercle.*

Toute fonction harmonique V peut être développée sur le cercle de rayon R en une série trigonométrique

$$V = \sum_{[illegible]} R^{[illegible]}$$

l'indice o désignant les valeurs de la fonction sur le cercle.

Ceci posé, le problème de Dirichlet se résout immédiatement, et nous aurons, à l'intérieur :

$$V_i = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

et à l'extérieur,

$$V_e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{2n}}{\rho^n} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

φ étant une fonction harmonique s'annulant sur le cercle et prenant à l'infini la valeur que doit prendre V, et ρ la distance du point considéré au centre du cercle.

En effet, les fonctions V_i et V_e sont harmoniques et deviennent, sur le cercle ($\rho = R$), égales à V_0.

Notre problème est ramené ainsi à un problème analogue. Mais dans beaucoup de cas particuliers, la fonction φ peut être facilement déterminée. Par exemple, si V doit s'annuler à l'infini, la fonction φ est identiquement nulle. Si V est le potentiel logarithmique d'une aire de masse M, on aura évidemment

$$\varphi = M L \frac{R}{\rho}.$$

8. *Potentiel logarithmique d'une bande circulaire homogène.*— Nous appellerons *bande circulaire* l'aire comprise entre le cercle donné et une courbe quelconque.

Nous appellerons *largeur de la bande* la distance entre le cercle et la courbe, mesurée suivant le rayon. Si cette largeur est infiniment petite, nous dirons que la courbe est infiniment voisine du cercle.

Nous désignerons par ζ la largeur de la bande et nous la considérerons comme fonction de l'angle polaire θ, et nous supposerons qu'elle est développable en une série trigonométrique de la forme

$$\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} R^2 (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \tag{17}$$

Cherchons le potentiel logarithmique de cette bande sous forme d'une série analogue. Ce potentiel étant une fonction harmonique

nous pouvons écrire

$$V_1 = \sum_{n=0}^{\infty} R^n (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta),$$

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta),$$

$$V_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{2n}}{\rho^n} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) + M \log \frac{R}{\rho};$$

M étant la masse de la bande, ou, en supposant que la densité superficielle est égale à 1, M désignera aussi l'aire de notre bande.

Nous supposons encore que la bande est infiniment mince et que la tangente à la courbe déterminant la couche fait avec le rayon un angle infiniment voisin d'un angle droit. Nous pourrons alors considérer ζ comme densité linéaire d'une masse répandue sur la circonférence du cercle donné.

Nous savons que le potentiel logarithmique d'une telle masse vérifie la condition suivante :

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial n_e}\right)_R + \left(\frac{\partial V_2}{\partial n_i}\right)_R = -2\pi\zeta.$$

Cette relation peut s'écrire

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial \rho}\right)_{\rho=R} + \left(\frac{\partial V_2}{\partial \rho}\right)_{\rho=R} = -2\pi\zeta;$$

et, en effectuant les opérations, on aura

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n R^{n-1} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} n R^{n-1} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) - \frac{M}{R}$$

$$= -2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta).$$

L'identification des coefficients nous donne alors

$$\frac{M}{R} = A_0 \qquad \alpha_n = \frac{\pi}{n} R A_n, \qquad \beta_n = \frac{\pi}{n} R B_n;$$

et le potentiel logarithmique de la couche de largeur

$$\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} R^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

sera

$$(18)\quad \begin{cases} V_0 = \pi R \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^n}{n} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \\ V_i = \pi R \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{n} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \\ V_e = \pi R \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^{2n}}{n\rho^n} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta). \end{cases}$$

Remarque. — Pour obtenir le potentiel newtonien d'une couche homogène de densité 1, répandue sur la surface du cylindre et de l'épaisseur ζ constante le long de chaque génératrice, il suffit de multiplier par 2 les formules (18).

9. *Recherche des figures de bifurcation.* — En reprenant le problème énoncé au n° **6**, et en conservant les mêmes notations, nous supposerons que les épaisseurs ζ_e et ζ_i des couches appliquées sur les deux surfaces cylindriques sont fonctions de l'angle θ et nous les chercherons sous la forme des séries trigonométriques suivantes :

$$(19)\quad \begin{cases} \zeta_e = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} R^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \\ \zeta_i = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^n (A'_n \cos n\theta + B'_n \sin n\theta). \end{cases}$$

Notre problème se réduira ainsi à la recherche des coefficients A_n, B_n, A'_n, B'_n.

Nous supposerons que la masse totale de chaque couche est nulle et par conséquent nous devons prendre

$$A_0 = A'_0 = 0.$$

En vertu des formules (18) et de la remarque qui les suit, les poten-

tiels respectifs de ces couches seront

$$(20)\quad \begin{cases} \omega_0 = 2\pi R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^n}{n} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \\ \omega_1 = 2\pi R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{n} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \\ \omega_2 = 2\pi R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^{2n}}{n\rho^n} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta). \end{cases}$$

De même

$$(20')\quad \begin{cases} \omega_0 = 2\pi r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \\ \omega_1 = 2\pi r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{n} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \\ \omega_2 = 2\pi r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n\rho^n} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta). \end{cases}$$

La fonction φ est nulle dans les deux cas, car on suppose que la masse totale de chaque couche est nulle.

Les formules (12) et (13) nous donneront ensuite

$$\left(\frac{\partial U_0}{\partial \rho}\right)_{\rho=R} = \omega^2 R - 2\pi R(1 - k^2) + 2\pi R[f(k^2) - 1 + k^2],$$

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial \rho}\right)_{\rho=R} = \omega^2 r = \omega^2 kR - 2\pi R k f(k^2).$$

Nous pouvons maintenant écrire explicitement la condition d'équilibre (16) et nous aurons, en remplaçant partout r par kR,

$$\begin{aligned} &2\pi R[f(k^2) - 1 + k^2] \sum_{n=1}^{\infty} R^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \\ &\quad + 2\pi R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^n}{n} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) + 2\pi k R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^{2n} R^n}{n} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \\ &\quad - 2\pi R k f(k^2) \sum_{n=1}^{\infty} k^n R^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \\ &\quad - 2\pi R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n R^n}{n} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) - 2\pi k R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n R^n}{n} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta). \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de $\cos n\theta$ et de $\sin n\theta$, nous obtiendrons une suite de conditions

$$(21)\quad \left[f(k^2) - 1 - k^2\right] A_n + \frac{1}{n} A_n + \frac{k^{2n}}{n} A_n$$
$$= -k^{n-1} f(k^2) A'_n + \frac{k^n}{n} A_n + \frac{k^{n-1}}{n} A_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

et une suite identique pour B_n et B'_n.

Désignons par p_n le rapport entre A'_n et A_n :

$$p_n = \frac{A'_n}{A_n},$$

les conditions (21) se réduisent en une double série de conditions

$$f(k^2) - 1 + k^2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} k^{2n-1} p_n = 0,$$
$$k\left[f(k^2) - \frac{1}{n}\right] p_n - \frac{1}{n} = 0$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ces équations permettent de calculer la valeur k correspondant à la figure de bifurcation et le rapport p de l'épaisseur de la couche intérieure à celle de la couche extérieure.

L'élimination de p_n donne

$$(22)\qquad \left[f(k^2) + k^2 - \frac{n-1}{n}\right]\left[f(k^2) - \frac{1}{n}\right] + \frac{1}{n^2} k^{2n} = 0$$

et

$$(23)\qquad p_n = \frac{1}{k_n\left[n f(k^2) - 1\right]},$$

où l'on désigne par k_n une des racines de l'équation (22).

Le problème se réduit alors à la recherche des racines de l'équation (22).

10. *L'équation (22) n'a pas de racines pour $n = 1$ et pour chaque valeur de $n > 1$ possède deux et seulement deux racines.* — Pour abréger l'écriture posons

$$k^2 = u.$$

u variera alors entre 0 et 1 lorsque k variera entre ces limites, et à

chaque valeur de u correspondra une et une seule valeur de k

$$k = -\sqrt{u}.$$

Ceci posé, écrivons notre équation comme il suit :

$$(24) \qquad F(u, n) = \left[f(u) - u - \frac{n-1}{n}\right]\left[f(u) - \frac{1}{n}\right] + \frac{u^2}{n^2} = 0.$$

La dérivation successive donne

$$\frac{\partial}{\partial u} F(u, n) = f'(u)[2f(u) - u - 1] + 2f(u)[f'(u) + 1] - \frac{n-1}{n} = \frac{u^{n-1}}{n},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} F(u, n) = f''(u)[2f(u) - u - 1] + 2f'(u)[f'(u) + 1] = \frac{n-1}{n} u^{n-2},$$

$$\frac{\partial^3}{\partial u^3} F(u, n) = f'''(u)[2f(u) - u - 1]$$
$$+ 3f''(u)[2f'(u) + 1] = \frac{(n-1)(n-2)}{n} u^{n-3},$$

$$\frac{\partial^4}{\partial u^4} F(u, n) = f^{IV}(u)[2f(u) - u - 1] + 4f'''(u)[2f'(u) + 1]$$
$$+ 6[f''(u)]^2 = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n} u^{n-4}.$$

Pour juger des valeurs de ces dérivées, calculons les valeurs des dérivées successives de $f(u)$.

D'après la formule (13) nous avons

$$f(u) = \frac{1 - u - u\,\mathrm{L}u}{1 - u} = 1 - \frac{u\,\mathrm{L}u}{1 - u}$$

et, par conséquent,

$$f'(u) = \frac{\mathrm{L}u + (1 - u)}{(1 - u)^2}.$$

Mais, en écrivant

$$u = 1 - (1 - u),$$

nous aurons

$$\mathrm{L}u = \mathrm{L}[1 - (1 - u)]$$
$$= -\frac{1 - u}{1} - \frac{(1 - u)^2}{2} - \frac{(1 - u)^3}{3} - \ldots - \frac{(1 - u)^n}{n} - \ldots$$

et, par suite,

$$f'(u) = 1 + \frac{1 - u}{1} + \frac{(1 - u)^2}{2} + \ldots + \frac{(1 - u)^n}{n} + \ldots$$

d'où, en dérivant,

$$f''(u) = -\frac{1}{3} - \frac{2}{4}(1-u) + \frac{3}{5}(1-u)^2 + \ldots + \frac{i-1}{i}(1-u)^{i-2} + \ldots,$$

$$f'''(u) = -\frac{1}{2} - \frac{3.2}{5}(1-u) - \frac{4.3}{6}(1-u)^2 - \ldots$$
$$- \frac{(i-2)(i-3)}{i}(1-u)^{i-3} - \ldots,$$

$$f^{\text{IV}}(u) = \frac{6}{5} + \frac{4.3.2}{6}(1-u) - \ldots + \frac{(i-2)(i-3)(i-4)}{i}(1-u)^{i-4} + \ldots.$$

On voit facilement que chacune de ces dérivées conserve son signe dans l'intervalle

$$0 \leqq u \leqq 1.$$

Pour $u = 0$ et $u = 1$, elles prennent les valeurs suivantes :

$$f(0) = -1, \qquad f(1) = 0,$$
$$f'(0) = -\infty, \qquad f'(1) = -\frac{1}{2},$$
$$f''(0) = +\infty, \qquad f''(1) = \frac{1}{3},$$
$$f'''(0) = -\infty, \qquad f'''(1) = \frac{1}{2},$$
$$f^{\text{IV}}(0) = +\infty, \qquad f^{\text{IV}}(1) = \frac{6}{5}.$$

En vertu de ces formules, nous aurons :

$$F(0, n) = \frac{n-1}{n^2}, \qquad F(1, n) = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial u} F(0, n) = -\infty, \qquad \frac{\partial}{\partial u} F(1, n) = 0,$$
$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} F(0, n) = +\infty, \qquad \frac{\partial^2}{\partial u^2} F(1, n) = \frac{n-1}{2n},$$
$$\frac{\partial^3}{\partial u^3} F(0, n) = -\infty, \qquad \frac{\partial^3}{\partial u^3} F(1, n) = -\frac{(n-1)(n-2)}{n}.$$

Enfin, $\frac{\partial^2}{\partial u^2} F(u, n)$ restera positive dans l'intervalle $(0, \ldots, 1)$.

Ceci posé, on voit qu'au voisinage de $u = 1$, $F(u, n)$ reste positive, car la dérivée seconde y est positive et par suite la dérivée première

y est négative. On peut voir encore que dans l'intervalle

$$0 < u < 1,$$

$F(u, n)$ ne peut pas avoir plus de deux racines. En effet, sa quatrième dérivée conservant le signe constant, elle ne peut pas avoir dans l'intervalle

$$0 < u < 1$$

plus de quatre racines. Mais $u = 1$ est déjà une racine double, et par conséquent, entre 0 et 1, il ne peut y avoir plus de deux racines.

Nous allons maintenant démontrer que pour tout n supérieur à 4, l'équation (22) possède effectivement deux racines et pour $n = 2$, 3, 4, n'en possède pas du tout.

Pour $n = 2$, en effet, la racine $u = 1$ est triple; la fonction ne peut donc avoir plus d'une racine entre 0 et 1. Mais comme le nombre de racines est toujours pair, ce nombre doit être zéro pour $n = 2$.

Pour $n = 1$, la racine $u = 1$ est au moins quadruple, et par conséquent la fonction n'a pas de racines.

Pour $n = 3, 4, \ldots$, la fonction peut avoir deux racines. Sa courbe représentative est de la forme

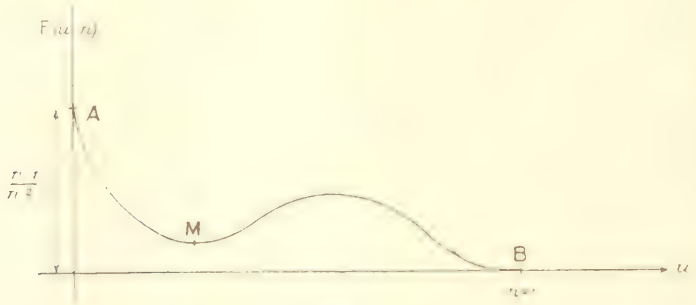


Fig. [illegible]

On voit immédiatement que la fonction $F(u, n)$ a deux racines si son minimum en M est négatif et qu'elle n'en a pas du tout si son minimum est positif.

Pour trancher cette question, faisons des calculs numériques et établissons le Tableau des valeurs de $F(u, n)$ pour différentes valeurs de u et de n.

En posant

$$\psi(u) = 1 - f(u) - u,$$

il nous faudra étudier la fonction

$$(25) \qquad F(u, n) = \frac{u^n}{n^2} - \left[f(u) - \frac{1}{n}\right]\left[\psi(u) - \frac{1}{n}\right].$$

En calculant $f(u)$ et $\psi(u)$ pour différentes valeurs de u, et en portant dans la formule précédente, nous aurons le Tableau suivant des valeurs de $F(u, n)$:

u.	$r : R$ $k\sqrt{u}$.	$\frac{\omega^2}{2\pi}$ $f(u)$.	$\psi(u)$ $\lvert 1 - f(u) - u\rvert$.	$\frac{1}{n}$ 0,3333. $F(u, 3)$.	$\frac{1}{n}$ 0,2500. $F(u, 4)$.	$\frac{1}{n} = 0,2000$. $F(u, 5)$.	$\frac{1}{n}$ 0,1667. $F(u, 6)$.
0,0.....	0,0000	1,0000	0,0000	0,2222	0,1875	0,1600	0,1389
0,1.....	0,3162	0,7442	0,1558	0,0730	0,0465	0,0320	0,0231
0,2.....	0,4472	0,5977	0,2023	0,0355	0,0158	0,0080	0,0045
0,3.....	0,5477	0,4939	0,2161	0,0220	+0,0088	−0,0048	−0,0101
0,4.....	0,6325	0,3888	0,2112	0,0138	0,0101	0,0019	−0,0030
0,5.....	0,7071	0,3063	0,1937	0,0105	0,0071	−0,0019	−0,0054
0,6.....	0,7746	0,2338	0,1662	0,0075	0,0068	−0,0042	−0,0013
0,7.....	0,8361	0,1678	0,1322	0,0027	0,0055	0,0045	0,0033
0,8.....	0,8944	0,1074	0,0926	0,0025	0,0032	0,0032	0,0029
0,9.....	0,9487	0,0517	0,0483	0,0008	0,0010	0,0011	0,0012
1,0.....	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Ce Tableau montre d'abord que lorsque u varie de 0 à 1, $f(u)$ décroît de 1 à 0 et $\psi(u)$ varie de 0 à 0 en passant, au voisinage de $u = 0,3$, par un maximum voisin de 0,2161 et en tout cas inférieur à 2500.

Nous aurons donc, dans tout l'intervalle $(0 < u < 1)$,

$$(26) \qquad \psi(u) < 0,2500.$$

Le Tableau montre encore que $F(u, 3)$ décroît constamment de 0,2222 à 0 sans accuser aucun maximum ni minimum.

Quant aux $F(u, 4)$, $F(u, 5)$, ... et suivantes, elles accusent déjà un minimum au voisinage de

$$u = 0,3$$

et un maximum après $u = 0,5$.

Mais le minimum de $F(u, 4)$ est encore positif et la fonction n'a pas de racines.

En effet, pour que $F(u, n)$ puisse être négative, il faut que les deux différences

$$(27) \qquad f(u) - \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \varphi(u) - \frac{1}{n}$$

soient de même signe.

Or, pour $n = 4$,

$$\frac{1}{n} = 0,2500$$

et la première des différences (27) est manifestement positive au voisinage de $u = 0,3$; quant à la deuxième, elle est négative en vertu de l'inégalité (26). La fonction $F(u, 4)$ ne pourra donc jamais devenir négative.

Par contre, toute fonction

$$F(u, n), \quad (n = 5, 6, 7, \ldots)$$

a deux racines, car son minimum est bien négatif. C. Q. F. D.

11. *Distribution des racines.* — Démontrons maintenant la proposition suivante :

Si nous avons deux fonctions

$$F(u, n) \quad \text{et} \quad F(u, m)$$

et si

$$n > m,$$

les racines de la fonction $F(u, m)$ sont intérieures par rapport à celles de la fonction $F(u, n)$.

Pour le prouver, il nous suffira de démontrer que, pour toute valeur de u annulant $F(u, m)$, la fonction $F(u, n)$ est encore négative.

Soit u_m une des racines de $F(u, m)$. Nous aurons

$$F(u_m, m) = \frac{u_m^m}{m^2} - \left[f(u_m) - \frac{1}{m} \right] \left[\varphi(u_m) - \frac{1}{m} \right] = 0.$$

En remarquant que dans ce cas chacune des différences entre les crochets est positive, et que

$$m < n, \quad \frac{1}{n} < \frac{1}{m}, \quad u_m < 1,$$

nous aurons, en remplaçant dans la formule précédente m par n,

$$F(u_m, n) = \frac{u_m^n}{n^2} - \left[f(u_m) - \frac{1}{n}\right]\left[\psi(u_m) - \frac{1}{n}\right] = 0.$$

C. Q. F. D.

Par conséquent, en donnant à n les valeurs

$$n = 5, \quad 6, \quad 7, \quad \ldots,$$

nous aurons deux séries de racines de la fonction $F(u, n)$ s'éloignant d'un point moyen

$$u = 0,3 \qquad \text{ou même} \qquad k = 0,5,$$

et se rapprochant l'une de 0 et l'autre de 1.

Pour $n = \infty$, l'une des racines devient nulle et l'autre égale à 1.

12. *Figures infiniment voisines d'une couche cylindrique de révolution.* — A chacune des racines que nous venons de trouver, correspond une figure de bifurcation pouvant donner naissance à une nouvelle figure d'équilibre.

Comme à chaque racine k_n correspond une seule valeur de n, la couche déformante, tant extérieure qu'intérieure, sera de la forme

$$\zeta_e = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta,$$

ou, en choisissant convenablement l'origine des arcs,

$$\zeta_e = \varepsilon_n \sin n\theta,$$

De même

$$\zeta_i = \varepsilon'_n \sin n\theta,$$

où

$$\varepsilon'_n = p_n \varepsilon_n$$

et

$$p_n = \frac{1}{k_n[nf(k^2) - 1]} = \frac{1}{n\sqrt{u_n}\left[f(u_n) - \frac{1}{n}\right]}.$$

Et comme pour toutes les racines u_n la différence $f(u_n) - \frac{1}{n}$ est positive, nous voyons que p_n est toujours positif. Cela prouve que les figures dérivées de toutes les figures de bifurcation sont toutes de même genre. Elles présentent une suite de renflements et de rétrécis-

sements successifs de la couche cylindrique, comme c'est indiqué sur la figure 7 que nous avons faite en supposant $n = 6$.

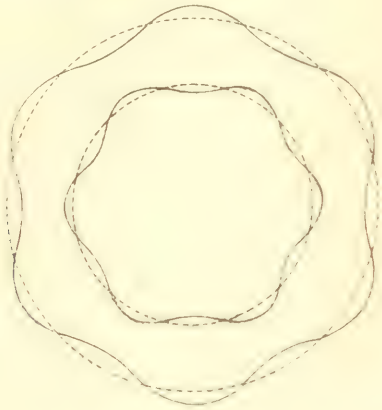


Fig. 7.

Si nous accentuons cette déformation, la couche cylindrique tendra à se décomposer en n cylindres pleins.

Ce fait est analogue à la décomposition en petites sphères de l'anneau dans l'expérience de Plateau.

Nous avons ainsi encore une analogie entre les figures d'équilibre d'une masse fluide soumise aux forces newtoniennes et de celle soumise aux seules forces capillaires.

13. *Conclusion.* — Nous nous sommes proposé d'étudier les figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation limitées par deux surfaces différentes et ne se coupant pas, autrement dit, les figures creuses, ayant un vide à l'intérieur. Nous avons vu que, parmi les figures limitées par des surfaces ellipsoïdales ou cylindriques du second ordre, seule la couche cylindrique de révolution présente une figure d'équilibre.

Cette dernière figure existe pour toutes les valeurs de la vitesse angulaire entre o et $\sqrt{2\pi}$, et présente deux séries discontinues de figures de bifurcation. Chacune de ces figures peut donner naissance à une nouvelle figure d'équilibre du genre de la figure représentée sur la figure 7.

Si nous prenons, pour l'état initial de notre masse liquide, la figure d'une couche cylindrique correspondant à

$$\frac{\omega^2}{2\pi} = 0,5 \qquad \text{ou} \qquad k = 0,5,$$

et si nous supposons que la vitesse angulaire décroît jusqu'à zéro, la masse fluide passera par toutes les figures de bifurcation dans l'ordre des n croissants, en commençant par la figure correspondant à $n = 5$, c'est-à-dire ayant cinq renflements.

De même, si la vitesse angulaire croît jusqu'à $\sqrt{2\pi}$, la masse fluide passera par toutes les figures de bifurcation correspondant à la deuxième série des racines de la fonction $F(u, n)$ et toujours dans l'ordre des n croissants. La première figure que l'on rencontrera sera encore une figure correspondant à $n = 5$ et ayant par conséquent cinq renflements.

Mais si nous prenons comme point de départ un cylindre plein, nous verrons que le cylindre plein ne pourra se transformer en une couche cylindrique que pour la valeur maxima de la vitesse angulaire

$$\omega = \sqrt{2\pi}.$$

A partir de ce moment, la vitesse angulaire ne pourra que diminuer, et par suite la masse fluide passera par toutes les figures de bifurcation correspondant à la deuxième série des racines de $F(u, n)$ dans le sens inverse, c'est-à-dire dans l'ordre des n décroissants, en commençant par $n = \infty$.

La figure déformée correspondante aura une infinité de renflements, ce qui correspondra à la désagrégation de la masse.

Par conséquent, la masse liquide ne pourra jamais affecter naturellement la figure d'une couche cylindrique, car avant de l'affecter elle se désagrégera.

Cela tient à ce que toutes ces figures creuses sont évidemment instables.

TROISIÈME PARTIE.

Petits mouvements d'un ellipsoïde fluide en rotation autour de sa position d'équilibre relatif.

1. *Historique.* — La question des petits mouvements d'une masse fluide en rotation autour de sa position d'équilibre est une des plus importantes après celle de la démonstration de l'existence de ces figures. Une fois complètement résolue, elle permettrait, en effet, de résoudre toutes les questions relatives à la stabilité de ces figures. Malheureusement, peu de mathématiciens se sont occupés de cette question.

Poincaré, le premier, a étudié le problème des petits mouvements d'un fluide autour de sa position d'équilibre relatif, et lui a consacré un Chapitre entier de son Mémoire classique, *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation* (*Acta mathematica*, t. VII, 1885, n° 13).

Il y traite d'abord un cas fictif où le fluide homogène est soumis aux forces newtoniennes et à une force analogue à la force centrifuge et dont les projections sur les axes coordonnés s'expriment, par conséquent, de la manière suivante :

$$\alpha x, \quad \beta y, \quad \gamma z$$

les coefficients α, β, γ étant choisis de manière que la masse fluide affecte la figure ellipsoïdale comme figure d'équilibre absolu.

En admettant que le mouvement est irrotationnel, Poincaré suppose que les déplacements de chaque molécule δx, δy, δz peuvent être considérés comme dérivées partielles d'une certaine fonction φ :

$$\delta x = \frac{d\varphi}{dx}, \qquad \delta y = \frac{d\varphi}{dy}, \qquad \delta z = \frac{d\varphi}{dz},$$

et il cherche φ sous la forme d'une série de produits de Lamé

$$\varphi = \sum \xi_i E_i M_i N_i,$$

ξ_i étant des fonctions du temps à déterminer.

Il calcule la force vive de la masse fluide ainsi que la fonction des forces, et, en écrivant l'équation de Lagrange, relative à ξ_i, il trouve pour chacune de ces fonctions l'équation suivante :

$$\frac{d^2\xi_i}{dt^2}R_i = -4\pi\xi_i\frac{dR_i}{d\rho}\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}\left(\omega l - \frac{R.S}{2n+1}\right).$$

Une fois les ξ_i déterminés, il détermine la surface libre. En supposant que le déplacement d'une molécule quelconque estimé normalement à l'ellipsoïde a pour expression

$$\varepsilon = \Sigma A_i / M_i N_i.$$

il trouve, pour déterminer les coefficients A_i, la formule suivante :

$$A_i = \xi_i\frac{dR_i}{d\rho}\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}.$$

A chaque déformation initiale simple, c'est-à-dire telle que le déplacement d'une molécule est donnée par la formule

$$\varepsilon = A_i / M_i N_i.$$

correspond une oscillation bien déterminée de période égale à

$$T_i = 2R_i\frac{dR_i}{d\rho}\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}\left(\omega l - \frac{R.S}{2n+1}\right).$$

La surface libre reste donc toujours de même nature. Toutes les molécules de la surface ont un mouvement pendulaire de même période et synchrone. Au bout d'un temps égal à la période T_i, la surface repasse par sa position initiale.

Si la déformation initiale n'est pas simple, l'oscillation sera représentée comme une somme d'oscillations simples superposées.

Poincaré étudie ensuite le cas général et réel où la masse fluide est en rotation autour d'un axe fixe. Dans ce cas, en tenant compte de la force centrifuge composée et en appliquant une autre méthode, il obtient un résultat analogue. Il trouve que toute oscillation peut être considérée comme le résultat de superposition de plusieurs oscillations simples.

Nous reviendrons dans la suite à cette analyse pour montrer que ces résultats sont inexacts.

Quatre ans après (en 1889) (¹), M. Love a repris cette question et a appliqué l'analyse indiquée par Poincaré, mais avec d'autres notations, au cas d'un cylindre elliptique indéfini. Les résultats qu'il a trouvés concordent absolument avec ceux de Poincaré. Mais ils sont exacts, car son problème, étant réduit à deux dimensions, il n'a pas eu à appliquer le changement de variables qui, à notre avis, a faussé les résultats de Poincaré.

La même année, il a étudié les oscillations d'une enveloppe élastique sphérique, remplie de liquide (²). Il a introduit dans ses calculs les fonctions sphériques et obtient aussi des ondes régulières.

Depuis, personne ne s'est intéressé à cette question et elle est restée au point où elle a été laissée par Poincaré. Malgré tout son intérêt, ni M. Liapounoff, ni M. Darwin ne se la posent.

Il y a quelque temps, nous avons essayé de résoudre cette question par une méthode différente de celle employée par Poincaré; mais les difficultés de l'analyse étant trop grandes, nous n'avons pu que démontrer que l'analyse de Poincaré était inexacte et que les oscillations simples semblables à celles que l'on obtient en négligeant la force centrifuge composée sont impossibles.

Nous commencerons par donner le résumé de la méthode de Poincaré, ensuite nous montrerons qu'en admettant ses résultats et en les appliquant aux cas particuliers, nous arriverons à des conclusions impossibles à admettre.

Enfin, nous indiquerons l'inadvertance commise par Poincaré et nous démontrerons l'impossibilité des oscillations simples.

2. *Méthode de Poincaré* (³). — Au n° 13 (p. 348 à 365) de son Mémoire classique des *Acta mathematica*, Poincaré traite la question

(¹) Love, *The oscillations of a mass of gravitating liquid in the form of an elliptic cylinders which rotates as if rigid about its axes* (*Quarterly Journal of Mathematics*, vol. XXIII, 1889).

(²) *The free and forced vibrations of an Elastic spherical Schell containing a given mass of liquid* (*Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. XIX).

(³) Pour faciliter les recherches, nous conserverons, pour indiquer les formules, les numéros donnés par Poincaré au n° 13 de son Mémoire.

des petits mouvements d'un ellipsoïde en rotation autour de sa position d'équilibre relatif.

Il commence par écrire les équations générales de mouvement d'un liquide, sous leur forme habituelle; ensuite, en supposant que le mouvement est assez petit pour pouvoir négliger les carrés et les produits des vitesses et de leurs dérivées par rapport aux coordonnées x, y, z, et en tenant compte de la condition d'incompressibilité du liquide, il obtient l'équation suivante :

$$\frac{d^2 \Delta\psi}{dt^2} = -4\omega^2 \frac{d^2\psi}{dz^2}, \tag{3}$$

où ψ désigne la différence $V - p$ entre la fonction des forces V et la pression p.

La vitesse angulaire est désignée, comme toujours, par ω; l'axe de rotation est pris pour axe Oz et la densité du liquide est supposée égale à 1.

Comme sur la surface libre la pression est nulle, on doit avoir

$$\psi = V$$

sur la surface libre du liquide.

L'équation (3), avec cette dernière condition, déterminent formellement la fonction ψ et, par suite, donnent la solution du problème.

Pour résoudre effectivement ce problème, Poincaré emploie l'artifice suivant : il suppose que chaque molécule fait un mouvement pendulaire autour de sa position d'équilibre et il représente les déplacements δx, δy, δz de la molécule des coordonnées x, y, z de la manière suivante :

$$\delta x = e^{\lambda t}\xi, \quad \delta y = e^{\lambda t}\eta, \quad \delta z = e^{\lambda t}\zeta,$$

λ étant une constante et ξ, η, ζ fonctions des coordonnées moyennes x, y, z, mais indépendantes du temps t.

Poincaré admet par là la possibilité des oscillations simples, où toutes les molécules ont la même période d'oscillation.

En supposant encore que, dans ce cas,

$$\psi = e^{\lambda t}\psi_1,$$

ψ_1 étant une fonction de x, y, z mais pas du temps, il trouve l'équa

tion suivante pour déterminer ψ_1 :

$$(4)\qquad \frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}+\left(1-\frac{4\omega^2}{\lambda^2}\right)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2}=0.$$

Désignons par

$$\varepsilon=\delta x\cos\alpha+\delta y\cos\beta+\delta z\cos\gamma$$

l'épaisseur de la couche qu'il faut ajouter à notre ellipsoïde pour obtenir la surface déformée à l'instant t; et supposons que, pour $t=0$, ε soit développable en une série de fonctions de Lamé

$$(a)\qquad \varepsilon_0=\xi\cos\alpha+\eta\cos\beta+\zeta\cos\gamma=\Sigma A_i\,l M_i N_i.$$

α, β, γ étant les cosinus directeurs de la normale. Alors

$$\varepsilon=e^{\omega t}\Sigma A_i\,l M_i N_i$$

et le potentiel à la surface libre sera

$$V_1=-4\pi e^{\omega t}\Sigma A_i\left(\frac{R_i S_i}{\lambda}-\frac{R_i S_i}{2n+1}\right)M_i N_i,$$

car la surface primitive était d'équilibre.

La condition *sur la surface libre* devient alors

$$(5)\qquad \psi=-4\pi\Sigma A_i\left(\frac{R_i S_i}{\lambda}-\frac{R_i S_i}{2n+1}\right)M_i N_i.$$

La formule (a) se transforme et donne finalement

$$(6)\qquad \lambda\left[\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\frac{x}{\rho^2}+\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\frac{y}{\rho^2-b^2}-\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\left(1-\frac{4\omega^2}{\lambda^2}\right)\frac{z}{\rho^2-c^2}\right]$$
$$-2\omega t\left[\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\frac{x}{\rho^2}-\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\frac{y}{\rho^2-b^2}\right]=\frac{\lambda(4\omega^2-\lambda^2)}{\lambda\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2}}\Sigma A_i M_i N_i.$$

La fonction ψ_1 et les coefficients A_i sont déterminés par l'équation (4) et les conditions (5) et (6), qui doivent être vérifiées sur la surface libre.

Ensuite, Poincaré pose

$$\psi=\frac{\psi_1}{\lambda^2}+\tau,\qquad \psi_1=\tau\lambda^2.$$

et considère deux ellipsoïdes :

$$(E)\qquad \frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2}=1 \qquad \text{(l'ellipsoïde de départ)},$$

$$(E')\qquad \frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z'^2}{\rho^2-c'^2}=1,$$

et il fait suivre du signe (′) toutes les quantités relatives à (E′).

La fonction ψ_1 devient une fonction harmonique des variables (x, y et z'), et, par suite, peut être représentée par une somme de produits de Lamé :

$$\psi_1=\sum D_q B'_q M'_k N'_k.$$

Puis, en posant

$$(5)\qquad \rho^2-c'^2=\frac{\rho^2-c^2}{\tau^2},$$

il démontre, en transformant (E) et (E′) en une même sphère, qu'un produit de Lamé M′N′ sur (E′) peut être représenté sur (E) par une somme de Lamé du même ordre :

$$(7)\qquad M'_q N'_q=\sum B_{k,q} M_k N_k.$$

A l'aide de cette formule, il développe en série de $M_k N_k$ la fonction ψ_1 et la partie gauche de l'équation (6) et obtient les équations suivantes :

$$(8)\qquad -4\pi A_k\left(\frac{B_1 S_1}{3}-\frac{B_k S_k}{2n+1}\right)=\sum_q D_q B_{kq} B_q,$$

$$(9)\qquad \frac{A_k\lambda(4\sigma^2-\lambda^2)}{\rho\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2}}=\lambda\sum_q D_q B_{kq}\frac{dB_q}{\rho\, d\rho}-2\sigma i\sum_q D_q G_{kq},$$

où G_{qk} et B_{kq} sont des constantes connues.

Ces deux systèmes d'équations donneront les valeurs des A_k, D_q et λ. Pour les résoudre, on suppose d'abord tous les A_k et D_q nuls, sauf ceux qui correspondent à des fonctions de Lamé d'un certain ordre, d'ordre n par exemple. Il y aura $4n+2$ équations linéaires homogènes. Si la solution en A_k, D_k existe, le déterminant est nul. En l'écrivant, on a une équation pour déterminer λ. A chaque racine réelle de cette équation correspondra une oscillation avec la période λ. Si toutes les racines sont réelles, la figure de départ est stable.

3. *Conclusions impossibles à admettre.* — Nous voulons montrer qu'en admettant les formules de ce Mémoire, on arrive à des conclusions impossibles. En effet, considérons un ellipsoïde de bifurcation, déformons-le en lui ajoutant une couche le transformant en une figure d'équilibre infiniment voisine et laissons-le sans vitesse initiale. Dans ce cas, la formule (A) s'écrira

$$\xi \cos\alpha + \eta \cos\beta + \zeta \cos\gamma = A_k l M_k N_k$$

et la formule (5) deviendra

$$\psi_1 = -4\pi A_k \left(\frac{R_k S_k}{3} - \frac{R_k S_k}{2n+1} \right) M_k N_k = 0.$$

Par conséquent, ψ_1 sera identiquement nul sur la surface libre (ce qu'il fallait prévoir, car la figure déformée est encore d'équilibre). Nous concluons de là que tous les D_q sont nuls. L'équation (9) nous donnera alors

$$A_k \lambda (\lambda^2 + 4\omega^2 - \lambda^2) = 0,$$

et, comme $A_k \neq 0$, on aura trois racines pour λ :

$$\lambda = 0, \qquad \lambda = \pm 2\omega.$$

Le liquide pourra choisir entre le repos ($\lambda = 0$) et un mouvement d'oscillation de période 2ω ou -2ω (?), ce qui est manifestement impossible. Si nous faisons le même calcul dans l'exemple que donne Poincaré sur l'ellipsoïde de Maclaurin, nous trouverons λ indéterminée.

4. *Inadvertance de Poincaré.* — Ces résultats bizarres ont pour cause une inadvertance qui s'est glissée dans ce Mémoire et qui n'a pas encore été remarquée. Je signalerai d'abord le changement de variables que fait Poincaré pour ramener l'équation (E') à la forme canonique. Il pose en effet

$$\rho = c' = \frac{\rho - c}{\tau},$$

c', c et τ étant des constantes et ρ *la même* variable. Dans ces conditions, la transformation est absolument impossible. Ce n'est pas une faute d'impression et ρ est bien le même dans les deux parties de la

formule. Cela devient évident si nous considérons les formules à l'aide desquelles Poincaré transforme (E) et (E′) en une même sphère. Il pose

$$X = \frac{x}{\rho}, \qquad Y = \frac{y}{\sqrt{\rho^2 - b^2}}, \qquad Z = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 - c^2}} = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 - c}}.$$

On voit donc bien que ρ est le même dans toutes les formules.

Une autre remarque non moins importante est la suivante :

$V - p$ étant une fonction linéaire des déplacements δx, δy, δz (s'ils sont petits) n'est pas homogène par rapport à ces derniers, car elle possède une partie principale, indépendante de δx, δy, δz, à savoir : la valeur de $V - p$ relative à l'ellipsoïde non déformé. Par conséquent, en posant $\delta x = e^{\delta t}\xi$, ..., on n'a pas le droit de poser

$$\psi = e^{\delta t}\psi_1.$$

En conservant les notations, il faudrait poser

$$\psi = \psi_0 + e^{\delta t}\psi_1,$$

ψ_0 étant une fonction connue de x, y, z, constante sur la surface de l'ellipsoïde E.

3. *Impossibilité des oscillations simples de l'espèce considérée.* — Cette remarque conduit naturellement à la conclusion de l'impossibilité des oscillations avec une seule période commune à toutes les molécules.

En effet, les équations générales de l'Hydrodynamiqne sont :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - 2\omega v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{dv}{dt} + 2\omega u &= -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{\partial \psi}{\partial z}. \end{aligned}$$

Avec les notations admises, on aura

$$u = \frac{d\delta x}{dt}, \qquad v = \frac{d\delta y}{dt}, \qquad w = \frac{d\delta z}{dt}.$$

En remplaçant δx, δy, δz par leurs valeurs et en les portant dans les

équations ci-dessus, on aura

$$\left(-\xi\lambda^2 + 2\omega i\lambda\eta - \frac{\partial\psi_0}{\partial y}\right)e^{i\lambda t} = \frac{\partial\psi_0}{\partial x},$$

$$\left(-\eta\lambda^2 - 2\omega i\lambda\xi - \frac{\partial\psi_0}{\partial x}\right)e^{i\lambda t} = \frac{\partial\psi_0}{\partial y},$$

$$\left(-\zeta\lambda^2 \qquad\qquad - \frac{\partial\psi_0}{\partial z}\right)e^{i\lambda t} = \frac{\partial\psi_0}{\partial z},$$

et, comme ψ_0 est indépendant du temps, ces équations sont manifestement impossibles. Donc le mouvement d'oscillation régulière est dans ce cas impossible. C'est ce que nous avons voulu démontrer.

6. *Conclusion.* — Il se pose maintenant la question : De quelle nature sera alors l'oscillation d'une masse fluide dans les conditions susindiquées? Car si la figure de départ est stable, les oscillations auront lieu forcément. Il est évident aussi que, si nous ne considérons que des petits mouvements, l'oscillation de chaque molécule, prise séparément, ne peut être que simple, pendulaire. Nous pourrons donc poser

$$\lambda = \lambda(t)$$

seulement λ sera une fonction de coordonnées et non une constante. Chaque molécule oscillera pendulairement, mais la période d'oscillation variera d'une molécule à l'autre. Nous n'aurons pas d'ondes régulières, mais la surface libre se déformera continuellement et ne reprendra jamais sa forme primitive.

AVIS.

La publication des Œuvres de George Halphen confiée aux soins de MM. Jordan, Picard et Vessiot se poursuit régulièrement et commence à approcher de son terme. Mais on désirerait la rendre aussi complète que possible. Nous serions donc reconnaissants aux savants qui possèdent de lui quelques documents inédits ou quelque correspondance intéressante pour la science mathématique de vouloir bien nous les faire connaître.

C. JORDAN.

TABLE DES MATIÈRES.

HUITIÈME SÉRIE. — TOME II.

Les indications qui précèdent le titre de chaque Mémoire de cette Table sont celles adoptées par le Congrès international de Bibliographie des Sciences mathématiques en 1889.

Note de la Rédaction.

Pages.

[B2] Sur les constituants transitifs de certains groupes linéaires à invariant bilinéaire dans un champ de Galois; par M. *J.-A. de Séguier* 1

[I22] Sur les racines primitives et les systèmes de bases et indices dans le corps quadratique général; par Mme *Vera Mylter-Lebedeff* 81

[H1g] Sur les singularités irrégulières des équations différentielles linéaires; par M. *Rene Garnier* 99

[S4a] La notion d'énergie utile de la Thermodynamique; par M. *Umberto Crudeli* 201

[R5b] Figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide en rotation. Variation du grand axe avec moment de rotation constant; par M. *Alex. Véronnet* 211

[I15] Sur les représentations propres par quelques formes quadratiques de Liouville; par M. *E. T. Bell* 247

[R5b] Contribution à l'étude des mouvements d'une masse fluide en rotation; par M. *B. Globa-Mikhaïlenko* 271

Avis 291

FIN DU TOME II DE LA HUITIÈME SÉRIE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,

60715 Quai des Grands-Augustins, 55

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PUBLIÉ DE 1875 A 1884

PAR H. RESAL

HUITIÈME SÉRIE

PUBLIÉE

PAR CAMILLE JORDAN

AVEC LA COLLABORATION DE

G. HUMBERT, MONTESSUS DE BALLORE, E. PICARD

TOME TROISIÈME — ANNÉE 1920

(85e Volume de la Collection)

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

55, Quai des Grands-Augustins, 55

1920

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Quelques problèmes d'Hydrodynamique générale;

PAR ÉMILE JOUGUET.

L'intervention de la Thermodynamique permet d'aborder l'étude de certains mouvements qui, accompagnés de transformations physiques ou chimiques, échappent plus ou moins à la Mécanique rationnelle.

C'est ce qui se présente, par exemple, dans la Mécanique des fluides.

Déjà, pour traiter du mouvement des fluides compressibles ordinaires, il est nécessaire de faire un appel plus ou moins large aux principes de la Thermodynamique. Mais ces principes permettent de ne pas s'arrêter là. Grâce à eux, on peut envisager des fluides qui sont le siège de phénomènes plus complexes que la simple dilatation. Il y a ainsi une hydrodynamique générale, fondée sur la Thermodynamique comme l'hydrodynamique classique est fondée sur la Mécanique rationnelle, qui comprend l'hydrodynamique classique comme cas particulier, mais qui étend beaucoup son champ d'application.

Nous avons réuni dans le présent Mémoire quatre études se rattachant à cette hydrodynamique générale. Chacune de ces études est indépendante des autres et peut être lue séparément. Un lien cependant les unit : toutes concernent des problèmes de propagation d'ondes. Mais les ondes sont envisagées dans des fluides qui sont de plus en plus complexes au point de vue physique, et pour lesquels les principes de la Mécanique rationnelle sont de plus en plus insuffisants.

La première étude a pour objet les fluides incompressibles. En général, la Mécanique rationnelle suffit pour traiter du mouvement des fluides incompressibles. La Thermodynamique cependant n'y est pas sans intérêt. Elle fournit des indications et des rapprochements instructifs, principalement quand la viscosité du fluide n'est pas négligeable. C'est ce que nous essayerons de montrer en présentant quelques observations sur les phénomènes classiques du remous et du ressaut.

Dans la seconde étude, les fluides envisagés sont des fluides compressibles ordinaires. Nous nous proposons de mettre en évidence quelques conséquences de la théorie thermodynamique des ondes de choc dans la question de la résistance des fluides compressibles. Ce Chapitre est le développement d'une Note parue il y a déjà longtemps aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (1).

Dans le problème de la propagation des flammes dans les mélanges gazeux, le fluide considéré est le siège de réactions chimiques. Nous avons consacré d'assez nombreux travaux à ce problème d'hydrodynamique chimique. La troisième étude du présent Mémoire est relative à un cas particulier nouveau dudit problème, cas qui a été abordé pour la première fois, à notre connaissance, dans la Note que nous avons publiée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 18 août 1919 (2).

Enfin, dans la quatrième étude, nous envisageons un fluide dont

---

(1) *Sur la résistance de l'air* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 149, 9 septembre 1907).

(2) *Sur un problème d'hydraulique généralisée. Ecoulement d'un mélange gazeux en combustion* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 169, 18 août 1919).

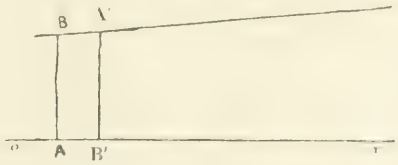
chaque élément a un état physique défini par sa densité et par une variable vectorielle : tel est, par exemple, un fluide affecté de polarisation magnétique ou diélectrique. Nous étudions la propagation d'une onde dans un fluide de cette nature. Mais ici, la Thermodynamique n'est plus suffisante pour traiter entièrement le sujet. Elle n'envisage qu'un côté du problème physique qui se pose et ne saurait être considérée comme en fournissant la solution véritable et entière. Malgré ce caractère incomplet, nous croyons pouvoir faire connaître les calculs auxquels elle conduit : ils présentent au moins l'intérêt de faire soupçonner une influence de la polarisation sur la vitesse de propagation des ondes.

Le présent Mémoire comprend donc une série d'exemples empruntés à tout le champ d'application de l'hydrodynamique générale fondée sur la Thermodynamique, depuis les questions où son intervention n'est pas essentielle (fluides incompressibles) jusqu'à celles où elle n'est pas suffisante (fluides polarisés), en passant par celles qui constituent son domaine propre (fluides compressibles et fluides avec réaction chimique).

VEINES GAZEUSES ET EAUX COURANTES.

1. On trouve, dans l'Ouvrage de Stodola sur les turbines à vapeur, le résumé d'études poursuivies par divers auteurs alle-

Fig. 1.



mands (Lorenz, Prandtl, Proell) sur les veines gazeuses. Un des faits les plus intéressants mis en lumière par ces travaux est l'apparition de discontinuités dans le mouvement rectiligne par tranches parallèles quand la vitesse du gaz atteint la vitesse du son. Stodola, qui insiste sur ce fait, ajoute : « L'analogie du phénomène avec le

ressaut superficiel observé en hydraulique sur les canaux découverts est évidente [1] ».

Je me propose de développer ici, d'une manière systématique, l'analogie qui existe en effet entre la théorie des veines gazeuses à section uniforme et celle des eaux courantes, du moins quand on prend celle-ci en toute première approximation.

Équations du mouvement. — 2. Soit un cours d'eau dont le fond plan a une pente i et dont la section est supposée rectangulaire. Prenons un axe Ox dirigé suivant une ligne de plus grande pente du fond. Dans la première approximation généralement adoptée pour ce problème [2], on suppose un déplacement par tranches normales au fond et l'on admet que, dans une tranche quelconque AB, les pressions se répartissent suivant la loi hydrostatique. Dans ces conditions, la poussée totale sur une section AB est égale à la surface de cette section multipliée par la pression au centre de gravité. Soient ϖ le poids spécifique de l'eau, g l'accélération de la pesanteur, H la profondeur de la section *qui peut être comptée suivant* AB *si l'on suppose — ce que nous ferons — que la pente i est assez faible pour qu'on puisse négliger i^2*, p_a la pression atmosphérique. La pression au centre de gravité est $p_a + \varpi \frac{H}{2}$ et la poussée totale $\left(p_a + \varpi \frac{H}{2}\right) H$, en considérant, pour simplifier l'écriture, que la largeur du lit est égale à l'unité.

Nous désignerons par P l'expression $\varpi \frac{H^2}{2}$, qui représenterait la poussée sur AB si l'écoulement avait lieu dans le vide.

Envisageons la partie dx du cours d'eau située entre deux sections AB et A′B′ infiniment voisines et écrivons, pour cette masse, l'équation du mouvement du centre de gravité en projection sur Ox.

On peut considérer que la pression atmosphérique s'exerce sur toute la surface de la masse ABA′B′, à condition de défalquer ensuite cette pression des autres pressions. Or la projection sur Ox

---

[1] Stodola, *Les turbines à vapeur*, trad. Hahn (chez Dunod et Pinat, 1909).

[2] *Voir* les Traités d'Hydraulique, notamment l'*Hydraulique* de Flamant.

de toutes les pressions p_a s'exerçant sur une surface fermée est nulle. La pression atmosphérique ne donne donc rien dans l'équation que nous avons en vue.

Restent alors les poussées P sur AB et $P + \frac{\partial P}{\partial x} dx$ sur A'B' qui donnent

$$P - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x} dx\right).$$

Soit μ la masse d'eau $\frac{\varpi}{g} H$ par unité de longueur du canal. Soit encore u la vitesse moyenne de la tranche : l'accélération du centre de gravité est $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x}$. Les forces d'inertie donnent alors sur Ox

$$\mu\, dx \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Le frottement sur les parois donne une résistance qui est mesurée sur Ox par

$$\mu g \frac{\chi}{\omega} \varphi(u)\, dx$$

(χ périmètre mouillé de la section droite ω) et le poids donne en projection sur Ox

$$\mu g i\, dx.$$

L'équation cherchée est donc

$$P - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x} dx\right) - \mu g \frac{\chi}{\omega} \varphi(u)\, dx + \mu g i\, dx = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx$$

ou, en simplifiant,

$$(1) \qquad \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = g i - g \frac{\chi}{\omega} \varphi(u).$$

Nous avons fait, dans tout ce qui précède, l'hypothèse des tranches. Il n'est pas sans intérêt de faire remarquer, avec M. Boussinesq, qu'en réalité on pourrait faire des hypothèses moins restrictives et supposer seulement que les filets sont animés de vitesses parallèles avec des accélérations égales. Mais nous n'insisterons pas

sur ce point qui n'a pas grande importance pour la question qui nous occupe ici.

D'autre part, l'équation de continuité s'écrira, en exprimant que la masse de l'élément dx se conserve,

$$dx\,\mu = dx\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}dt\right)\left(\mu + \frac{\partial \mu}{\partial x}u\,dt + \frac{\partial \mu}{\partial t}dt\right)$$

ou

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0. \tag{2}$$

Enfin la comparaison des valeurs de P et de μ donne

$$P = \frac{\varpi^2}{2\varpi'}\mu^2. \tag{3}$$

3. Les équations (1), (2), (3) sont les équations du mouvement de l'eau dans un canal en première approximation. On voit qu'elles sont identiques à celles du mouvement par tranches parallèles dans un tuyau rectiligne d'un gaz dont la densité serait μ et la pression P, et dont l'équation de compressibilité serait l'équation (3) (où $\frac{\varpi^2}{2\varpi'}$ est une constante) [1].

Il y a toutefois une remarque à faire. Dans le mouvement rectiligne d'un gaz, $\frac{Z}{\varpi}$ serait constant. Au contraire ici $\frac{Z}{\varpi}$ est variable : par exemple si le canal est très large par rapport à sa profondeur, $\frac{Z}{\varpi}$ est égal à $\frac{1}{H}$ ou $\frac{\varpi}{g\mu}$. Pour avoir identité absolue entre les deux problèmes, il faut supposer, pour le gaz, un frottement inversement proportionnel à sa densité.

D'autre part, il est bien certain que le mouvement *par tranches parallèles* d'un gaz, quand on suppose une inclinaison du tuyau par rapport à la verticale et un frottement contre les parois, ne peut être considéré que comme une approximation. Si donc c'est

[1]) Nous avons déjà employé une méthode analogue pour réduire aux équations des gaz les équations du mouvement de l'eau dans une conduite. Voir *Théorie générale des coups de bélier* (*Rapports au deuxième Congrès de la Houille blanche*, t. II, Lyon, 1914).

moyennant une approximation que les équations des eaux courantes se mettent sous la forme (1), (2), (3), c'est aussi moyennant une approximation que les équations (1), (2), (3) représentent le mouvement des veines gazeuses. On pourra remarquer d'ailleurs que ces deux approximations sont d'autant plus voisines de la réalité que les sections droites des courants et des veines sont plus étroites.

Ajoutons enfin que, dans certains problèmes (par exemple celui du ressaut), l'inclinaison et le frottement contre les parois sont sans importance. Dans ces problèmes, l'approximation, en ce qui concerne les veines gazeuses, est rigoureuse; seule subsiste l'approximation en ce qui concerne les eaux courantes.

Nous parvenons donc au résultat suivant. Les mouvements de l'eau dans les canaux sont identiques aux mouvements rectilignes d'un gaz fictif, qu'on peut appeler *gaz hydraulique*, dont le frottement contre les parois suit une loi particulière, et dont l'équation de compressibilité est telle que la pression est proportionnelle au carré de la densité. On sait que, dans les gaz parfaits, la pression est proportionnelle à une certaine puissance de la densité, puissance qui est 1 pour les mouvements isothermes, et comprise entre 1 et 2 pour les mouvements adiabatiques. Pour le gaz hydraulique, la puissance est 2.

4. On peut d'ailleurs pousser encore plus loin le parallélisme que nous venons de mettre en évidence, ne pas le borner aux phénomènes de mouvement, et l'étendre aux phénomènes thermiques accompagnant le mouvement.

Cherchons en effet quelles propriétés thermiques nous devons attribuer à notre gaz hydraulique pour que la chaleur reçue par lui soit exactement celle que reçoit l'eau du courant.

Il suffira évidemment :

1° D'abord que l'entropie du gaz hydraulique soit égale à l'entropie de l'eau, laquelle est une fonction $S(T)$ de la seule température absolue;

2° Que la viscosité du gaz hydraulique soit la même que celle de l'eau.

Nous déterminerons donc le potentiel interne spécifique du gaz hydraulique $\bar{\mathfrak{F}}$ par les conditions que la pression soit égale à P et l'entropie à S (T) :

$$\mu^2 \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial \mu} = P = \frac{g^2}{2\varpi} \mu^2,$$

$$\frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial T} = - S(T);$$

d'où

$$\bar{\mathfrak{F}} = \frac{g^2}{2\varpi} \mu - \int S(T)\, dT;$$

et par suite l'énergie interne $\Upsilon = \bar{\mathfrak{F}} - T \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial T}$ est

$$\Upsilon = \frac{g^2}{2\varpi} \mu + U,$$

en désignant par U l'énergie interne de l'eau.

Le gaz hydraulique est un de ces corps que Duhem appelle *isothermo-adiabatique* [1].

Pour ce qui est de la viscosité, l'eau présente une certaine viscosité correspondant à la déformation de ses éléments. Cette viscosité est normalement négligeable et, en effet, elle ne figure pas dans les équations (1), (2), (3); mais, en certains points isolés, elle peut donner lieu à des pertes de charge. Le gaz hydraulique devra avoir une viscosité normalement négligeable, mais égale à celle de l'eau là où se produisent des pertes de charge. Il nous sera inutile ici d'approfondir davantage la connaissance de la viscosité.

Indiquons maintenant quelques conséquences du rapprochement entre le problème des veines gazeuses et celui des eaux courantes.

Célérité des ondes. — 5. En toute rigueur, les équations du mouvement de l'eau dans les canaux étant des équations du mouvement d'un fluide incompressible sont des équations aux dérivées partielles du type elliptique.

---

[1] *Traité d'Énergétique*, t. I, p. 319 (Gauthier-Villars, 1911).

Avec l'approximation admise ici, ces équations sont transformées en équations du type hyperbolique, à caractéristiques réelles.

On sait d'ailleurs que Lagrange a ramené le problème des petits mouvements de l'eau, dans un canal de faible profondeur, à l'équation du son [1]. Dans la question que nous étudions ici, les hypothèses faites sur le mouvement par tranches ont précisément pour résultat d'assimiler le mouvement dans un canal de profondeur finie au mouvement dans un canal peu profond. Le problème que nous avons en vue ressemble donc beaucoup à celui qui est traité par Lagrange. Mais nous ne supposons pas ici, comme le fait Lagrange, que les vitesses sont petites.

Comme l'apprend l'étude des caractéristiques des équations du mouvement des gaz, la célérité de la propagation des ondes est donnée par

$$\sqrt{\frac{dP}{d\rho}} = \sqrt{gH}.$$

C'est en effet la valeur approchée de la célérité de l'onde solitaire. Pour aller plus loin et obtenir une valeur plus exacte de cette célérité, il ne faut pas se contenter de l'approximation que nous avons admise et il convient de recourir à la théorie beaucoup plus approfondie de M. Boussinesq.

Remous. — **6**. Cherchons ce qui, dans les veines gazeuses, correspond au phénomène qu'on appelle le *remous* dans le mouvement des eaux courantes.

Pour cela, traitons les équations (1) et (2) en y ajoutant, à la place de (3), l'équation

$$P = k\rho^{\gamma}. \tag{4}$$

Nous étudions ainsi le mouvement d'une veine gazeuse. Notre calcul s'appliquera à la fois à un gaz réel et au gaz hydraulique. Pour le gaz hydraulique, il faudra faire $\gamma = 2$. Pour les gaz réels, si le mouvement est isotherme, on fera $\gamma = 1$. Mais les mouvements des gaz réels sont plus voisins, en général, de l'adiabatique que de

[1] *Mécanique analytique*, seconde Partie, Section XI, article 37.

l'isotherme. A la vérité, quand on suppose un frottement contre les parois, le mouvement ne saurait être rigoureusement adiabatique, car il y a toujours de la chaleur fournie par le frottement. Mais nous admettrons que le frottement est assez faible pour qu'il y ait adiabaticité presque complète. Alors γ doit être pris égal au rapport des chaleurs spécifiques.

Nous allons donc traiter du même coup et du remous en hydraulique et du phénomène qui lui correspond dans les veines gazeuses. Il faudra toutefois faire attention, quand on appliquera les résultats au gaz hydraulique, que $\frac{Z}{\omega}$ dépend alors de la densité.

Le problème que nous avons en vue est l'étude du mouvement permanent. Pour le mouvement permanent, (2) s'écrit

$$\rho u = \text{const.} = q. \tag{5}$$

et (1) donne, grâce à (4) et à (5),

$$dx = \frac{\left(u^2 - \frac{dP}{d\rho}\right) du}{gu\left[\gamma - \frac{Z}{\omega}\varphi(u)\right]}. \tag{6}$$

$\frac{dP}{d\rho}$ est fonction de ρ; $\frac{Z}{\omega}$ peut l'être (cas du gaz hydraulique). Mais ρ s'exprime en fonction de u par (5). On trouve ainsi

$$\frac{dP}{d\rho} = k\gamma q^{\gamma-1} u^{\gamma-1}.$$

Le problème est donc ramené à la quadrature (6).

Sans discuter les cas où cette quadrature peut s'effectuer par les fonctions élémentaires, indiquons sommairement l'allure qu'ont les intégrales avec les expressions usuelles de $\frac{Z}{\omega}$ et de $\varphi(u)$.

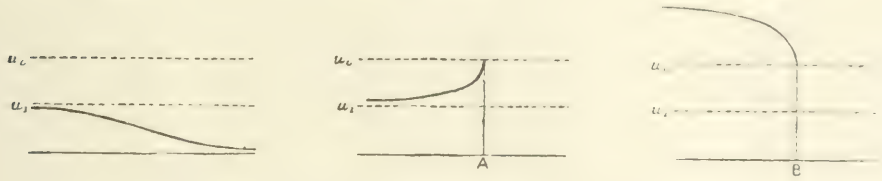
Le numérateur du deuxième membre de (6) s'annule pour

$$u = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}} = \sqrt{k\gamma q^{\gamma-1} u^{\gamma-1}} = \left(k\gamma^{\frac{1}{\gamma-1}} q\right)^{\frac{1}{2}} = u_0.$$

La vitesse des molécules fluides est alors égale à la célérité des ondes, c'est-à-dire pour les gaz ordinaires à la vitesse du son, pour le gaz hydraulique à la vitesse de l'onde solitaire.

Le dénominateur s'annule pour une certaine valeur u_1 de u. Supposons, pour fixer les idées, $u_1 < u_0$. C'est le cas qui correspond, pour les eaux courantes, aux cours d'eau de faible pente. La courbe représentant u en fonction de x a alors une des trois formes suivantes, suivant que l'on part d'un point où u est inférieur à u_1, compris entre u_1 et u_0, supérieur à u_0.

Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4.



La représentation de la densité μ en fonction de x s'obtient facilement, en vertu de (5), en prenant l'inverse des courbes ci-dessus : elle a l'avantage, pour le gaz hydraulique, de représenter la profondeur du courant. C'est par la discussion de μ (ou de H) qu'on procède en effet dans la plupart des traités d'hydraulique. Nous avons préféré discuter directement u pour mettre mieux en évidence l'égalité existant aux points A et B entre la vitesse des molécules et la célérité des ondes.

Il convient de signaler que, dans le cas de l'hydraulique, où $\frac{Z}{\omega}$ est proportionnel à u et où $\varphi(u)$ est de la forme bu^2, la courbe de la figure 4 ne se prolonge pas à l'infini vers les x négatifs : elle a de ce côté une asymptote verticale.

La figure 2 donne le remous d'exhaussement, ou, pour les veines gazeuses, ce qu'on pourrait appeler le *remous de compression;* la figure 3 donne le remous d'abaissement (pour les veines gazeuses, le remous de dilatation); la figure 4 donne le remous d'exhaussement (pour les veines gazeuses, de compression) aboutissant à un ressaut d'exhaussement.

Ressaut. — **7.** Les tangentes verticales des courbes ci-dessus sont

l'indice que l'écoulement ne peut se poursuivre conformément aux hypothèses admises jusqu'aux points correspondant à ces tangentes verticales. Il se produit une discontinuité, une onde de choc. Et s'il s'agit du gaz hydraulique, l'onde de choc n'est autre chose que le ressaut.

Une onde de choc rigoureuse a une épaisseur nulle. Il est plus exact de dire qu'il se produit une quasi-onde de choc, qui peut être traitée, en première approximation, comme une onde véritable.

Appliquons à l'onde de choc la loi adiabatique dynamique d'Hugoniot. Nous en avons le droit. L'hypothèse, nécessaire pour la démonstration, de l'adiabaticité du phénomène est acceptable quand l'épaisseur de la quasi-onde est assez faible. Nous pouvons donc écrire, en appelant 1 et 2 les états qui encadrent l'onde de choc,

$$(7) \qquad (P_1 + P_2)\left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1}\right) + 2(U_2 - U_1) = 0.$$

Dans le cas du gaz hydraulique, on a

$$P = \frac{g^2}{2\pi}\mu^2, \qquad U = \frac{g^2}{2\pi}\mu + U_0.$$

L'équation (7) appliquée à ce cas permet alors de calculer $\frac{U_2 - U_1}{g}$. Or on sait que, dans l'écoulement adiabatique d'un liquide, $\frac{U_2 - U_1}{g}$ (où U est l'énergie interne de l'eau) n'est autre chose que *la perte de charge*. La loi d'Hugoniot nous donne donc la perte de charge produite par l'onde de choc, c'est-à-dire par le ressaut. Elle conduit à

$$(8) \qquad \frac{U_2 - U_1}{g} = \frac{g}{4\pi}\frac{(\mu_2 - \mu_1)^2}{\mu_1\mu_2} = \frac{(H_2 - H_1)^2}{4H_1H_2}.$$

C'est bien le résultat classique de Bélanger.

Ainsi donc, *la formule de Bélanger pour le ressaut n'est qu'un cas particulier de la loi adiabatique dynamique d'Hugoniot.*

Pour les gaz parfaits, le principe de Carnot permet de démontrer [1] :

1° Que les seules ondes de choc possibles sont des ondes comprimées;

2° Que la célérité des ondes de choc est supérieure à la vitesse du son dans le milieu aval et inférieure à celle du son dans le milieu amont.

La démonstration s'étend au gaz hydraulique et, par conséquent :

1° Les seuls ressauts possibles sont les ressauts d'exhaussement. Ce sont les seuls qui donnent une perte de charge positive, comme cela est forcé. Il est vrai que Bazin a pu observer des ressauts d'abaissement, mais en créant une dénivellation brusque du fond du lit. On obtient ainsi un travail de la pesanteur qui vient compenser les pertes de charge. Remarquons en effet que la théorie précédente, notamment la formule (8), suppose le lit rectiligne.

2° Le ressaut d'exhaussement se propage, par rapport à l'eau, avec une vitesse supérieure à $\sqrt{gH}$, en désignant par H la profondeur en avant. Or si le mouvement est permanent, le ressaut est immobile et sa célérité est égale à la vitesse du courant. Le ressaut d'exhaussement se produit donc en un point où la vitesse de l'eau est supérieure à $\sqrt{gH}$. Dans la courbe de la figure 4 on ne va pas jusqu'au point où la tangente est verticale.

Tous ces résultats sont classiques. J'ai voulu simplement ici montrer qu'ils ne sont que des cas particuliers des lois des ondes de choc dans les gaz.

SUR LA RÉSISTANCE DES FLUIDES COMPRESSIBLES AUX GRANDES VITESSES.

Remarques générales sur la résistance des fluides. — **1**. Le problème de la résistance des fluides est un des premiers qui se soient

---

[1] *Remarques sur la propagation des percussions dans les gaz* (C. R. Acad. S., t. 138, 27 juin 1904). — *Sur la propagation des réactions chimiques dans les gaz* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 6e série, t. II, 1906).

posés aux savants qui ont abordé l'étude de l'hydrodynamique. Les recherches qu'il a suscitées n'ont pas peu contribué à la formation et au développement de cette science. Mais sa difficulté est telle qu'il ne peut, même aujourd'hui, être considéré comme entièrement résolu. Des théories diverses se sont constituées, fondées chacune sur des hypothèses spéciales et mettant en lumière chacune une des faces de la question, un cas particulier du problème. Ces théories, malgré les brillants résultats obtenus par quelques-unes d'entre elles, sont sujettes encore à d'importants perfectionnements et appellent de nouvelles recherches pour l'éclaircissement de leurs liens réciproques. Si l'on me permet cette comparaison, la question de la résistance des fluides apparaît comme une mer d'où le lent travail du temps a fait émerger quelques îlots solides. Ces îlots s'accroissent peu à peu, mais ils restent encore isolés les uns des autres et, entre eux, les relations ne sont encore établies que d'une manière sommaire.

2. Il y a résistance aussi bien avec les fluides compressibles qu'avec les fluides incompressibles. Mais si le corps solide contre lequel résiste le fluide se déplace dans celui-ci avec une faible vitesse, les mouvements du fluide sont lents. Or il résulte d'un théorème de Helmholtz convenablement généralisé que, dans les mouvements lents des fluides, la compressibilité joue un rôle faible, la viscosité et la conductibilité un rôle considérable [1]. On peut donc étudier la résistance d'un fluide quelconque aux faibles vitesses en le supposant incompressible et visqueux. De là un premier groupe de théories, inaugurées par Stokes [2], continuées par divers auteurs [3], où la résistance, due à la viscosité, est proportionnelle à la vitesse. Ces théories s'appliquent, par exemple, au mouvement des pendules dans l'air.

---

(1) *Sur la similitude dans le mouvement des fluides* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 141, 7 août, 1905). — *Sur la résistance de l'air* (*Ibid.*, t. 145, 2 septembre 1907).

(2) *Effet du frottement intérieur des fluides sur le mouvement des pendules* (*Transactions de Cambridge*, t. IX, Part. II, 1851).

(3) Voir la Note de M. Boussinesq, pages 107-[illegible] du Tome II de sa *Théorie analytique de la chaleur* (Gauthier-Villars, 1903).

5. Un second groupe de théories considère les fluides incompressibles avec viscosité assez faible et négligeable.

Dès le XVIIe siècle, les premiers savants qui se sont occupés de cette question [le Père Pardies, Huygens, Mariotte [1]] ont, par des considérations de similitude, démontré que la résistance dans ce cas devait être proportionnelle à la surface, à la densité du fluide et au carré de la vitesse. Leurs raisonnements ont été modernisés par Recch [2]. Mais ces raisonnements ne fournissent pas à proprement parler une théorie de la résistance des fluides : ils ne donnent qu'un cadre pour une telle théorie. Tout ce qu'ils démontrent, c'est que, *si la résistance existe*, elle doit satisfaire aux lois énoncées. Or le paradoxe de d'Alembert apprend que, si le solide est animé d'un mouvement uniforme, la résistance est nulle dans tout régime permanent dans lequel le fluide est en repos à l'infini [3].

Une théorie de la résistance des fluides incompressibles et non visqueux doit donc fournir un moyen d'échapper au paradoxe de d'Alembert.

Bien entendu, le paradoxe de d'Alembert n'empêche pas la résistance d'exister quand le mouvement du solide n'est pas uniforme. Le calcul de la résistance dans ce cas a été fait pour la première fois par Poisson [4]. Mais l'expérience exige qu'on trouve une résistance même quand le mouvement est uniforme. La théorie certainement la plus satisfaisante pour échapper dans ces conditions au paradoxe de d'Alembert est actuellement celle qui est fondée sur les surfaces de glissement de Helmholtz. Inaugurée par Kirchhoff [5], elle a pris dernièrement de grands développements

---

(1) Pardies, *Statique des forces mouvantes*, 1671. — Du Hamel, *Histoire de l'Académie des Sciences de* 1666 *à* 1686 (pour les travaux d'Huygens). — Mariotte, *Traité de la percussion des corps* (1679) ; *Traité du mouvement des eaux* (1686).

(2) *Cours de Mécanique d'après la nature généralement flexible et élastique des corps* (1852).

(3) Je prends l'énoncé du paradoxe de d'Alembert sous la forme qui lui a été donnée par M. Cisotti (*Sul moto permanente di un solido in un fluido indefinito* (*Atti del R. Instituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti*, t. LXIX, 1909, p. 141).

(4) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. XI, 1831, p. 170.

(5) *Mechanik*, 22e Vorlesung (chez Teubner, Leipzig, 1877).

(lord Rayleigh, Levi-Civita, Brillouin, Villat). Elle rejette l'hypothèse du repos à l'infini, et établit en somme une espèce d'assimilation entre le phénomène de la résistance d'un courant fluide et celui du choc d'une veine fluide contre un solide. Elle parvient bien, comme c'était forcé, à une expression proportionnelle à la surface, à la densité et au carré de la vitesse.

Les travaux de Kutta et de Joukowski [1] ont porté également sur les fluides incompressibles non visqueux. Ils ne constituent pas une théorie de la résistance puisqu'ils ne donnent, pour l'action d'un courant fluide sur un solide, aucune composante parallèle au courant. Mais ils fournissent des expressions de ce que les mécaniciens de l'aviation appellent la *poussée* et ces expressions rentrent naturellement dans le cadre de Pardies, Huygens et Mariotte. Cette nouvelle théorie soulève bien quelques difficultés, comme l'existence d'un potentiel des vitesses non uniforme, dont il serait intéressant de montrer comment il s'établit à partir du repos. Mais elle montre qu'il y a peut-être, dans l'action d'un courant d'air sur un solide, des régimes différents donnant des sustentations différentes pour les ailes d'avions. Il est peut-être permis de rapprocher cette remarque des résultats expérimentaux de Rateau et d'Eiffel qui ont mis en évidence, pour les faibles inclinaisons des voilures, des poussées qui ne se raccordent qu'avec une certaine discontinuité aux poussées obtenues dans le cas des fortes inclinaisons.

4. Avant l'existence de la théorie des surfaces de glissement, Poncelet, suivi par Saint-Venant, avait expliqué l'existence de la résistance par les pertes de charge [2]. Les pertes de charge sont dues à la viscosité du fluide; mais on peut les estimer grossièrement par les formules de l'hydraulique, si bien que les coefficients de viscosité n'interviennent pas, à proprement parler, dans les calculs

---

(1) *Voir* ces travaux résumés dans l'*Aérodynamique* de Joukowski, traduction Drzewiecki (Gauthier-Villars, 1916).

(2) Poncelet. *Introduction à la Mécanique industrielle*. — Saint-Venant. *Résistance des fluides* (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1887).

de Poncelet et de Saint-Venant. Leur théorie hydraulique est donc une théorie qui s'applique aux fluides incompressibles et qui tient compte de la viscosité, mais qui en tient compte par des moyens sommaires et globaux, rendant inutile la connaissance des coefficients de viscosité eux-mêmes. Cette théorie est loin d'avoir la valeur de la théorie des surfaces de glissement : elle reste néanmoins intéressante parce qu'elle la complète sur un point. Dans la théorie des surfaces de glissement, ces surfaces doivent s'éloigner à l'infini. Or, l'expérience apprend qu'elles ne se comportent certainement pas ainsi. Les considérations de Poncelet et Saint-Venant font comprendre comment il se fait que, derrière l'obstacle, elles puissent se rejoindre sans que pour cela la résistance s'annule.

5. La résistance des fluides incompressibles a ainsi donné lieu à une série considérable de travaux. Il n'en est pas de même, à ma connaissance, de celle des fluides compressibles [1]. Aussi ne sera-t-il sans doute pas inutile d'attirer l'attention sur un résultat important obtenu par Newton dans la Proposition XXXIII du Livre II (7e section) de ses *Principes*, touchant la résistance d'un fluide quelconque aux grandes vitesses. L'illustre savant montre que la résistance est, dans ce cas, proportionnelle au carré de la vitesse. Il se sert, il est vrai, pour sa démonstration, d'hypothèses moléculaires. Mais nous allons voir que l'on peut moderniser ses raisonnements en remplaçant ses conceptions moléculaires par les lois des gaz parfaits. Nous rattacherons ainsi son beau théorème aux théories de l'hydrodynamique actuelle [2].

Nous ne nous dissimulons pas que les considérations qui vont

---

[1] Il convient de signaler toutefois les recherches de MM. Bairstow et Booth en Angleterre et celles de MM. Darrieus, Langevin, Vessiot en France. *Voir* sur ce sujet une Note parue aux *Comptes rendus* du 12 juillet 1920 et rédigée postérieurement au présent Mémoire.

[2] Ce qui va suivre n'est que le développement d'une Note (*Sur la résistance de l'air*), parue le 9 septembre 1907 dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. 145). Il nous a paru intéressant d'expliciter cette Note, dont la rédaction est un peu trop condensée, et en même temps d'y ajouter quelques éléments nouveaux.

suivre peuvent parfois laisser quelque peu à désirer au point de vue de la rigueur. Telles qu'elles sont, elles nous paraissent néanmoins mériter de retenir l'attention des physiciens.

Le théorème de Newton. — **6**. Quand le solide se déplace très vite dans le fluide, les mouvements de celui-ci sont rapides, et il résulte du théorème de Helmholtz généralisé que la compressibilité joue un rôle important, la viscosité et la conductibilité un rôle faible. Nous allons donc considérer un fluide compressible, non visqueux, animé de mouvements adiabatiques. Nous supposerons d'ailleurs que le fluide étudié est un gaz parfait.

Le corps solide se déplaçant très vite, sa vitesse est supérieure à celle du son. Si donc l'ébranlement n'atteint pas immédiatement les points à l'infini en avant, il ne peut avancer que par une onde de choc. L'expérience confirme en effet la formation d'une telle onde : les photographies de projectiles en mouvement la mettent bien en évidence, et les méthodes de repérage par le son sont fondées sur son existence. Une théorie complète devrait évidemment justifier l'existence d'une onde de choc d'une manière plus serrée, et apprendre à en déterminer les éléments. A ma connaissance, une telle théorie n'est pas encore faite : les travaux de M. Charbonnier [1], notamment laissent ce point incomplètement traité. Je me contenterai ici de prendre pour fondement de mes raisonnements le fait, considéré comme probable *a priori* et certain expérimentalement, de l'existence d'une onde de choc.

7. Soit C le corps solide, SAΣ l'onde de choc. On sait par les travaux expérimentaux des artilleurs (Labouret, Gossot, Charbonnier) que la discontinuité va en s'atténuant au fur et à mesure qu'on s'éloigne vers S et Σ, si bien qu'à une distance suffisante de A, l'onde cesse d'être pratiquement une onde de choc, pour devenir sensiblement une onde d'accélération. En ces points éloignés Σ et S, la direction de la surface de l'onde fait alors, avec

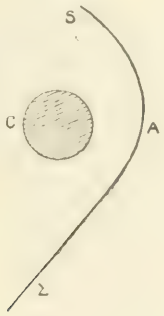
---

[1] *Le Champ acoustique*, *Ann. de Chimie et de Physique*, 8e série, t. VIII, 1906.

la vitesse du corps C, un angle dont le sinus est égal au rapport de la vitesse du son à la vitesse du corps C.

La surface d'onde de choc sépare la masse fluide, supposée indéfinie, en deux parties. Dans la première, distinguée par l'indice 1, il y a repos; les vitesses sont $u_1 = v_1 = w_1 = 0$; la densité, la pression, la température sont ρ_1, p_1, T_1 uniformes dans toute la partie 1. La seconde partie, distinguée par l'indice 2, est celle où se trouve le corps C. Vitesses, densité, pression, température, sont repré-

Fig. 5.



sentées par les fonctions u_2, v_2, w_2, ρ_2, p_2, T_2 *analytiques*, tout au moins, jusqu'à l'apparition (possible) d'une autre onde.

8. Considérons deux expériences faites avec deux corps C et C′ géométriquement semblables, la première avec une vitesse V dans un gaz ρ_1, p_1, T_1, la seconde avec une vitesse V′ dans un gaz ρ'_1, p'_1, T'_1. Du côté 2 de l'onde de choc, les deux gaz sont dans un état de mouvement caractérisé respectivement par

$$u_2,\quad v_2,\quad w_2,\quad \rho_2,\quad p_2,\quad T_2 \qquad \text{(mouvement } \mathcal{M}\text{)}$$

et

$$u'_2,\quad v'_2,\quad w'_2,\quad \rho'_2,\quad p'_2,\quad T'_2 \qquad \text{(mouvement } \mathcal{M}'\text{)}.$$

Les deux gaz sont supposés avoir même rapport γ des chaleurs spécifiques.

Désignons par R la constante universelle des gaz parfaits, par m et m' les masses moléculaires des deux gaz.

Dans les parties 2, les équations du mouvement sont :

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial(x,y,z)} - \dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial x} - u\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial x} - v\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial z} - w\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \dfrac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0, \\ p = \dfrac{R}{m}\rho T \\ \dfrac{dT}{T} - (\gamma - 1)\dfrac{d\rho}{\rho} = 0 \end{cases} \quad \text{ou simplement} \quad \rho\, dp - \gamma p\, d\rho = 0.$$

Ce système est le même pour les deux gaz, avec cette différence que m doit, pour le second, être changé en m'. Nous désignerons par (1′) le système où a été fait ce changement.

Le mouvement $\mathfrak{M}$ est une solution de (1); le mouvement $\mathfrak{M}'$ une solution de (1′). Mais considérons le mouvement $\mathfrak{M}$. Multiplions les longueurs par α, les densités par δ, les pressions par ϖ, les températures par θ, les vitesses par φ. Nous obtenons ainsi un mouvement $\mathfrak{N}$:

$$\varphi u, \quad \varphi v, \quad \varphi w, \quad \delta\rho, \quad \varpi p, \quad \theta T \quad (\text{mouvement } \mathfrak{N}),$$

mouvement semblable à $\mathfrak{M}$. Je dis que le mouvement $\mathfrak{M}'$ peut être pris sensiblement identique à $\mathfrak{N}$.

9. En effet, tout d'abord je remarquerai que le mouvement $\mathfrak{N}$ vérifie bien les équations (1′) que doit vérifier $\mathfrak{M}'$ dans la partie 2, à condition que l'on ait

$$(2)\quad \begin{cases} \varpi = \delta\varphi^2, \\ \varpi = \delta\theta\dfrac{m}{m'}. \end{cases}$$

D'autre part, on satisfait aux conditions aux limites, résultant de la présence du corps C′ dans le gaz, pourvu qu'on prenne α égal au rapport des dimensions linéaires des corps C′ et C et φ égal au rapport $\sqrt{\ }$ de leurs vitesses.

Reste maintenant à montrer que l'on peut prendre δ de manière que le mouvement $\mathfrak{N}$ soit compatible avec la propagation par onde de choc dans l'état du gaz caractérisé par l'indice 1.

Les équations de l'onde de choc sont, en désignant par λ, μ, ν les cosinus directeurs de la normale à la surface de l'onde, et par $\frac{dh_1}{dt}$ la célérité de l'onde par rapport à la matière dans l'état 1 :

$$(3)\quad \begin{cases} \frac{\rho_1}{\lambda}\frac{dh_1}{dt}(u_2-u_1)=\frac{\rho_1}{\mu}\frac{dh_1}{dt}(v_2-v_1)=\frac{\rho_1}{\nu}\frac{dh_1}{dt}(w_2-w_1)=p_2-p_1, \\ \left(\frac{dh_1}{dt}\right)^2=\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{p_2-p_1}{\rho_2-\rho_1}, \\ p_2=p_1\frac{(\gamma+1)\rho_2-(\gamma-1)\rho_1}{(\gamma+1)\rho_1-(\gamma-1)\rho_2} \qquad \text{(loi adiabatique d'Hugoniot)}. \end{cases}$$

Mais nous supposons C et C′ animés d'un mouvement *très rapide*. Donc, *tout au moins dans une zone d'une certaine étendue autour de* A, on peut négliger u_1, v_1, w_1 devant u_2, v_2, w_2 et p_1 devant p_2. Les équations (3) deviennent alors

$$(4)\quad \begin{cases} \frac{\rho_1}{\lambda}\frac{dh_1}{dt}u_2=\frac{\rho_1}{\mu}\frac{dh_1}{dt}v_2=\frac{\rho_1}{\nu}\frac{dh_1}{dt}w_2=p_2, \\ \left(\frac{dh_1}{dt}\right)^2=\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{p_2}{\rho_2-\rho_1}, \\ (\gamma+1)\rho_1=(\gamma-1)\rho_2. \end{cases}$$

Quand on passe du premier gaz au second, la densité dans la partie 1, ρ_1 devient ρ'_1. On voit qu'il suffit de faire $\frac{\rho'_1}{\rho_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}$, c'est-à-dire δ égal au rapport des densités initiales $\frac{\rho_1}{\rho}$, sans préjudice, bien entendu des relations (2), pour que les équations (4) soient vérifiées.

Ainsi donc, on prend α égal au rapport des dimensions linéaires de C′ et de C; ρ égal au rapport $\sqrt{}$ de leurs vitesses; δ égal au rapport des densités initiales $\frac{\rho_1}{\rho_1}$. Alors θ et ϖ sont déterminés par (2). Le mouvement $\mathfrak{M}$, dont les éléments sont ceux de $\mathfrak{m}$ respectivement multipliés par les ρ, δ, θ, ϖ que nous venons de déterminer vérifie les équations du mouvement (1′). Il est en outre compatible approximativement avec la propagation par onde de choc dans l'état initial, tout au moins dans une région d'une certaine étendue autour de A, région où les équations (3) peuvent être rem-

placées par (4). Par conséquent, dans cette région, le mouvement $\mathfrak{M}'$ peut être pris approximativement identique à $\mathfrak{M}$. Mais le corps solide C peut être considéré comme étant tout entier dans cette région ou dans son voisinage. Les pressions sur C sont donc sensiblement celles du mouvement $\mathfrak{M}$.

Arrêtons-nous un instant pour faire une remarque. Le rapport des densités des deux gaz n'est pas sensiblement modifié par l'onde de choc; le rapport des pressions l'est au contraire et différemment d'une expérience à l'autre. Cela est possible parce que la densité ρ_2 est voisine de la valeur qui donne p_2 infini : une très faible variation de ρ_2 produit une variation très grande de p_2. Bien entendu, il y a corrélativement une très grande variation de la température.

10. Les deux expériences dont nous venons d'analyser les conditions sont approximativement semblables, puisque $\mathfrak{M}'$ est approximativement $\mathfrak{M}$. Le rapport ϖ des pressions qui s'exercent sur C′ et C est $\delta\rho^2$; le rapport des forces est $\alpha^2\delta\rho^2$. On peut énoncer le théorème suivant :

Considérons deux gaz ayant même rapport des chaleurs spécifiques. Les résistances qu'ils opposent au mouvement de deux corps géométriquement semblables et animés de vitesses très grandes sont dans le rapport des produits de la surface par la densité et par le carré de la vitesse.

Comme cas particulier, on peut supposer que la seconde expérience est faite dans le même fluide que la première, avec le même corps C, mais à une vitesse V′ différente de V. Tout ce qui précède est applicable. Il faut seulement faire $\alpha = 1$ et $\delta = 1$. Quant à ρ, il vaut toujours $\frac{V}{V'}$. Donc :

Dans un gaz, la loi de la résistance aux grandes vitesses s'approche asymptotiquement de la loi du carré de la vitesse.

Ce résultat a été assez bien vérifié par les expériences des artilleurs.

Existence de la résistance. — **11.** Les résultats que nous venons d'énoncer ressemblent à ceux que Pardies, Huygens et Mariotte

ont donnés pour les fluides incompressibles. Ils ne constituent pas, à proprement parler, une théorie de la résistance des fluides aux grandes vitesses, car ils ne calculent pas cette résistance et se bornent à énoncer des conditions auxquelles elle doit satisfaire.

Il y a toutefois quelque chose de plus. Les considérations d'Huygens, Mariotte et Pardies n'indiquaient pas le moyen d'échapper au paradoxe de d'Alembert. Ici, on aperçoit le principe d'une telle échappatoire. Il est fourni par l'existence de l'onde de choc. A la vérité, nous ne démontrons pas, en toute rigueur, que l'existence de l'onde de choc entraîne le fait que la résistance n'est pas nulle. Mais il est facile de voir qu'elle rend ce fait possible et même probable.

En effet, Hugoniot a fait le calcul complet dans le cas du mouvement par ondes planes où le fluide, au lieu d'être indéfini, est enfermé dans un cylindre et où le corps solide est un piston se déplaçant dans ce cylindre ([1]). Il trouve bien une résistance non nulle, satisfaisant aux conditions de la théorie précédente, dont il doit être regardé, par conséquent, comme le véritable promoteur.

Si l'on passe maintenant au cas général, il faut se reporter à la démonstration donnée par Duhem du paradoxe de d'Alembert. Duhem montre que si le fluide est en repos à l'infini, et s'il est en régime permanent par rapport au solide, la résistance est nulle *même si le fluide est le siège de surfaces de discontinuité d'un ordre quelconque.* Mais en même temps, il fait voir que ces hypothèses entraînent la conséquence que les surfaces de discontinuité qui peuvent exister *sont forcément des surfaces de glissement*, séparant toujours les deux mêmes masses du fluide ([2]). L'existence d'une onde de choc, progressant par rapport à la matière, est donc incompatible avec le repos à l'infini et, par suite, si une telle onde existe, *la résistance peut n'être pas nulle.*

12. Maintenant, pourquoi est-il permis de supposer qu'une onde

---

([1]) *Propagation du mouvement dans les corps* (*Journal de l'École Polytechnique*, 58e cahier, 1889).

([2]) Pierre Duhem, *Sur le paradoxe hydrodynamique de M. d'Alembert* (*C. R. Acad. Sc.*, 19 octobre 1914).

de choc existe ? Duhem a démontré que, dans un fluide visqueux, il ne peut pas exister d'onde de choc rigoureuse, mais seulement des quasi-ondes de choc dont l'épaisseur peut être d'autant plus faible que le coefficient de viscosité est lui-même plus petit [1]. Or, nous savons qu'aux très grandes vitesses le gaz se comporte comme si la viscosité était très faible. A la limite, on peut supposer un gaz sans viscosité et une onde de choc rigoureuse, comme nous l'avons fait. Mais, dans ce passage à la limite, le travail non compensé produit par l'onde de choc, qui est la limite du travail de la viscosité dans la quasi-onde, ne devient pas nul. Il subsiste parce que l'onde de choc rigoureuse est un phénomène irréversible, et, au fond, c'est lui qui est la véritable raison physique de la résistance.

La démonstration de Newton. — **13**. Comme nous l'avons dit, les résultats exposés dans ce qui précède, ne sont que la modernisation et la généralisation d'un théorème de Newton. La démonstration de Newton est différente de celle que nous avons donnée, et est fondée sur des hypothèses moléculaires, si bien qu'un observateur superficiel pourrait croire qu'il n'y a, entre son théorème et celui que nous avons démontré, qu'une analogie de forme. En réalité, il y a identité et, pour le faire voir, nous allons suivre pas à pas le raisonnement de Newton en remplaçant simplement les hypothèses moléculaires par les lois des gaz parfaits. Ce nouveau mode de démonstration ne sera pas sans intérêt pour faire pénétrer le sens exact de celui que nous avons développé plus haut. C'est d'ailleurs lui qui s'est présenté le premier à notre esprit, après la lecture des *Principes*.

14. Nous nous attacherons simplement à montrer que, dans un fluide donné, la résistance aux grandes vitesses est proportionnelle au carré de la vitesse.

Newton commence par considérer un fluide formé de molécules n'exerçant [illegible] sur les autres que des actions au

[1] *Recherches sur l'Hydrodynamique*, 2e et 3e Parties (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. III, IV, V, [illegible]).

contact et il montre que, dans un tel fluide, la loi de la résistance est celle du carré de la vitesse. Nous considérerons ici un gaz parfait au *zéro absolu*. Le déplacement d'un solide y provoque une onde de choc et les équations du mouvement sont (1) et (3). Mais, avant l'onde, on a $u_1 = v_1 = w_1 = p_1 = T_1 = 0$. Après l'onde, comme $\frac{dh_1}{dt}$ n'est pas nul, les équations (3) montrent que p_2 et T_2 ne le sont pas non plus. Donc $\frac{p_2}{p_1} = \infty$ et $(\gamma - 1)\rho_2 = (\gamma + 1)\rho_1$. Les équations (3) sont remplacées rigoureusement par (4). A tout système de solutions des équations (1) et (4) correspond un autre système de solutions [1] se déduisant du premier en multipliant les longueurs par α, les densités par δ, les pressions par ϖ, les températures par θ, les vitesses par φ, avec

$$\varpi = \delta\varphi^2,$$
$$\varpi = \delta\theta.$$

A ces deux systèmes de solutions on peut faire correspondre deux expériences dans lesquelles on fait déplacer un même corps, avec des vitesses V et V′ dans un même gaz de même densité pris au zéro absolu. On a alors

$$\alpha = 1, \qquad \delta = 1, \qquad \varphi = \frac{V'}{V}.$$

Et les résistances sont dans le rapport $\varphi^2 = \frac{V'^2}{V^2}$.

Ainsi, dans cette masse M_0 d'un gaz au zéro absolu, les résistances R_0 et R'_0 aux vitesses V et V′ sont telles que

$$\frac{R'_0}{R_0} = \frac{V'^2}{V^2}.$$

Prenons maintenant une masse M d'un gaz quelconque, ayant la même densité initiale que la masse M_0, mais dans des conditions ordinaires de température et de pression. Lançons-y le même corps

[1] Ici le système (4′) est identique à (4) car on conserve le même gaz. Donc $m' = m$.

que nous déplacions tout à l'heure dans la masse M_0 et avec la vitesse V. Les équations du mouvement sont (1) et (3). A un système de solutions de ces équations, en correspond un autre obtenu en multipliant les longueurs par α, les densités par δ, les pressions par ϖ, les températures par θ, les vitesses par φ, ces rapports étant reliés par (2). Faisons $\alpha = 1$, $\delta = 1$, $\varphi = \frac{V}{V'}$. Alors

$$\varpi = \frac{V^2}{V'^2} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{V^2}{V'^2}.$$

Cela revient à dire que la nouvelle solution correspond à une nouvelle expérience qui serait faite avec le même solide dans une masse M′ du même gaz ayant la même densité que M, mais porté initialement à une température $\frac{V'^2}{V^2}$ fois plus forte. Les résistances dans les fluides M′ et M sont alors R′ et R telles que

$$\frac{R'}{R} = \frac{V'}{V^2}.$$

Par conséquent

$$\frac{R'}{R} = \frac{R_0}{R_0'} \quad \text{et} \quad R' = R\frac{R_0}{R_0'}.$$

Laissons maintenant V′ constant et faisons croître V indéfiniment en conservant le même état pour la masse M. $\frac{V'}{V^2}$ tend vers zéro; le rapport des températures de M′ et de M tend vers zéro; donc la masse M′ tend vers la masse M_0 et, par suite, $\frac{R_0}{R_0'}$ tend vers 1. En conséquence, R tend vers R_0 et comme R_0 est proportionnel au carré de la vitesse, R tend asymptotiquement vers cette loi.

Nous avons suivi d'aussi près que possible le raisonnement de Newton. Il saute aux yeux que ce mode de démonstration n'est autre chose qu'une manière symbolique de présenter celui que nous avons primitivement donné.

Gaz non parfaits. Loi des états correspondants. — **15.** Les gaz naturels ne sont pas rigoureusement parfaits. A la vérité, ils sont

assez voisins de l'état parfait pour qu'il soit très suffisamment légitime, dans la théorie de la résistance, de supposer qu'ils le possèdent tout à fait. Nous allons néanmoins nous arrêter quelque temps à l'hypothèse que le potentiel interne est plus compliqué que celui qui résulte des lois de Mariotte et de Gay-Lussac. Cette recherche, d'un ordre peut-être un peu spéculatif, présentera cependant l'intérêt de mettre en lumière les circonstances auxquelles les gaz parfaits doivent de permettre les raisonnements développés dans ce qui précède.

Les gaz naturels obéissent, du moins si on les range par groupes, à la loi des états correspondants [1]. Cette loi comprend un certain nombre de propriétés énoncées successivement par divers auteurs tels que Van der Waals, Young, Mathias, Bakker, Amagat, Leduc. Les travaux d'Amagat ont montré que, parmi ces propriétés, deux sont fondamentales : la première est l'existence d'une équation de compressibilité réduite, découverte initiale de Van der Waals ; la seconde est le fait que, sous faible pression, les gaz tendent vers l'état parfait, fait qui fournit, par combinaison avec les propriétés moléculaires des gaz (Gay-Lussac, Avogadro, Delaroche et Bérard), les lois d'Amagat sur le produit $\frac{p}{\rho T}$ et de Leduc sur les chaleurs spécifiques. Ces deux propriétés sont fondamentales en ce sens qu'elles ne sont pas réductibles l'une à l'autre, mais que toutes les autres propriétés des états correspondants s'en déduisent. Donnons une démonstration rapide de ces beaux théorèmes d'Amagat.

16. Soient Π, P, Θ la pression, la densité et la température critiques. Posons

$$x = \frac{\rho}{P}, \qquad y = \frac{T}{\Theta}, \qquad z = \frac{p}{\Pi}. \tag{5}$$

[1] Je prends la loi des états correspondants sous sa forme primitive et non sous la forme qui lui a été donnée par divers auteurs. Sur les travaux résumés dans ce qui va suivre, *voir* Amagat et Décombe, *La Statique des fluides*, *La liquéfaction des gaz et l'industrie du froid* (chez Béranger, 1917).

La première propriété nous apprend que l'équation de compressibilité est

$$z = f(x, y), \tag{6}$$

la fonction f étant la même pour tous les corps d'un même groupe.

Or, le potentiel thermodynamique interne $\mathfrak{F}(\rho, T)$ est tel que

$$\rho^2 \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \rho} = p. \tag{7}$$

Désignons par $F(x, y)$ une fonction telle que $\frac{dF}{dx} = \frac{f(x, y)}{x^2}$. Elle n'est définie qu'à une fonction de y près. Nous choisirons une fonction F bien déterminée *et qui soit la même pour tous les corps :* il est évident que cela est possible. Dès lors, le potentiel $\mathfrak{F}$ sera, en vertu de (5), (6), (7),

$$\mathfrak{F}(\rho, T) = \frac{\Pi}{P} F(x, y) + h(y). \tag{8}$$

La fonction $h(y)$ est une fonction jusqu'à présent arbitraire et qui, jusqu'à nouvel ordre, peut être différente suivant les différents corps.

Ainsi l'existence d'une équation de compressibilité réduite entraîne la forme (8) pour le potentiel interne et toutes les propriétés qui peuvent s'en déduire.

17. Mais passons maintenant aux propriétés thermiques. De (8) on tire, pour la chaleur spécifique c sous volume constant,

$$c = -T\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial T^2} = \frac{\Pi}{P\Theta} y^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{1}{\Theta} y^2 h''(y).$$

Or, aux faibles pressions, le gaz tend vers l'état parfait et ce fait a deux conséquences :

1° Combiné avec la loi d'Avogadro, il apprend que $\frac{\Pi}{P\Theta}$ est inversement proportionnel à la masse moléculaire m, c'est-à-dire

que

$$\frac{\Pi}{P\Theta} = \frac{\lambda}{m} \qquad \text{(loi d'Amagat)}.$$

En effet, si l'on considère les états où la pression p est très faible, on a, puisqu'en ces états les gaz suivent les lois des gaz parfaits, $\frac{mp}{\rho T} = r$, r étant une constante universelle, la même pour tous les gaz. Cette formule d'ailleurs n'est pas illusoire, car l'expérience montre que, lorsque p tend vers zéro, $\frac{p}{\rho}$ tend vers une certaine limite.

D'autre part, si nous considérons, dans deux gaz quelconques, des états où $y = \frac{T}{\Theta}$ et $z = \frac{p}{\Pi}$ sont les mêmes, ces états sont correspondants et, comme conséquence, x ainsi que $\frac{z}{xy} = \frac{pP\Theta}{\rho T\Pi}$ y sont les mêmes. Prenons, en particulier, des états où y est le même et où z a la même valeur *zéro*. Ils sont correspondants et $\frac{pP\Theta}{\rho T\Pi}$ y a la même valeur (remarquer que $\frac{p}{\rho}$ tend vers une limite bien que p soit nul). Mais ces états sont des états de pression nulle. Les quantités p, ρ, T vérifient donc la relation $\frac{mp}{\rho T} = r$. On déduit de là que $\frac{rP\Theta}{m\Pi}$ a la même valeur pour deux gaz quelconques d'un même groupe. Par conséquent, on a bien

$$\frac{\Pi}{P\Theta} = \frac{\lambda}{m},$$

λ étant la même constante pour tous les gaz. C'est la loi d'Amagat.

2° Combiné avec les propriétés des chaleurs spécifiques moléculaires, le fait que les gaz tendent vers l'état parfait pour les faibles pressions a une autre conséquence. Il nous apprend que, aux faibles pressions, c doit être inversement proportionnel à m.

Mais nous avons donné l'expression de c sous forme d'une somme de deux termes. En vertu de la loi d'Amagat, le premier terme est

déjà inversement proportionnel à m pour des états correspondants (x et y donnés). En particulier, il en est ainsi pour les états où les températures sont correspondantes et où la pression est nulle. Il faut donc qu'en de tels états le second terme de c soit aussi inversement proportionnel à m. Cela exige que $\frac{1}{\Theta} y h(y)$ soit de la forme $\frac{g(y)}{m}$, *la fonction $g(y)$ étant la même pour tous les corps.*

Observons tout de suite qu'il suit de là que les chaleurs spécifiques moléculaires sont les mêmes pour tous les états correspondants (loi de Leduc). En outre, on a

$$h(y) = \frac{\Theta}{m} \int dy \int \frac{g(y)}{y} dy = \frac{\Theta}{m} \mathrm{H}(y).$$

$h(y)$ n'est ainsi défini qu'à une fonction linéaire près de y. On peut prendre pour $\mathrm{H}(y)$ une fonction *qui soit la même pour tous les corps d'un même groupe.* Le potentiel interne est alors

$$(9) \qquad \tau(x, y) = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{P}} \Gamma(x, y) + \frac{\Theta}{m} \mathrm{H}(y) = \frac{\Theta}{m} [\lambda \Gamma(x, y) + \mathrm{H}(y)].$$

L'expression entre crochets est la même pour tous les corps d'un même groupe.

18. Le potentiel interne synthétise toutes les propriétés thermomécaniques des corps. Des formes (8) et (9) on peut déduire, pour les états correspondants, toute une série de propriétés qui sont, on le voit, des conséquences soit de la loi de Van der Waals seule, soit de cette loi combinée avec les lois des gaz parfaits appliquées aux faibles pressions. Il y a donc deux manières de suivre la loi des états correspondants : la manière large, où le potentiel interne a la forme (8) et la manière étroite où il a la forme (9).

Loi des états correspondants et similitude mécanique. — 19. Mais nous ne sommes pas sortis jusqu'ici de la statique. Faisons maintenant la dynamique des états correspondants.

Les équations du mouvement d'un fluide sont :

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial(x,y,z)} + u\frac{\partial(u,v,w)}{\partial x} + v\frac{\partial(u,v,w)}{\partial y} + w\frac{\partial(u,v,w)}{\partial z} + \frac{\partial(u,v,w)}{\partial t} = 0,\\
&\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0,\\
&p = \rho^2\frac{\partial\bar{\varpi}}{\partial\rho},\\
&\text{et, pour les mouvements isothermes,}\\
&\qquad T = \text{const.};\\
&\text{pour les mouvements adiabatiques,}\\
&\qquad \frac{\partial\bar{\varpi}}{\partial T} = \text{const.}
\end{aligned}
\right.
$$

Comparons les mouvements de deux fluides dont les constantes critiques sont Π, P, Θ et Π', P', Θ'. Pour le premier fluide, les équations du mouvement sont (10); pour le second elles seront (10′), différant de (10) par la substitution de Π', P', Θ', m' à Π, P, Θ m dans l'expression du potentiel interne.

Soit un mouvement du premier fluide. Il vérifie les équations (10). Multiplions

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\text{les longueurs par } \bar{\alpha};\\
&\text{les densités par } \delta = \frac{P'}{P};\\
&\text{les températures par } \theta = \frac{\Theta}{\Theta};\\
&\text{les pressions par } \varpi = \frac{\Pi'}{\Pi};\\
&\text{les vitesses par } \nu, \text{ tel que } \varpi = \delta\nu^2, \text{ ce qui revient à } \nu = \sqrt{\frac{\Pi P}{\Pi' P'}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Ce nouveau mouvement qui est semblable au premier sera solution de (10′), et par conséquent appartiendra au second fluide, pourvu que soit remplie la condition suivante :

a. S'il s'agit de mouvements isothermes, la condition en question est que les deux fluides suivent la loi des états correspondants au sens large, c'est-à-dire que le potentiel interne soit de la forme (8).

b. S'il s'agit de mouvements adiabatiques, la condition en ques-

tion est que les deux fluides suivent la loi des états correspondants au sens étroit, c'est-à-dire que le potentiel interne soit de la forme (9).

En d'autres termes :

Deux gaz situés dans des états correspondants constituent des systèmes mécaniquement semblables. Cette similitude se borne aux mouvements isothermes si les gaz suivent la loi des états correspondants au sens large (loi de Van der Waals seule) ; elle s'étend aux mouvements adiabatiques s'ils suivent la loi des états correspondants au sens étroit (loi de Van der Waals avec les lois d'Amagat et Leduc) [1].

Le rapport de similitude des longueurs est arbitraire. Au contraire, ceux des densités, des températures, des pressions, des vitesses sont déterminés. En particulier, le rapport des vitesses correspondantes est $\sqrt{\frac{\Pi P}{\Pi' P'}}$.

Bornons-nous aux gaz qui, suivant la loi des états correspondants au sens étroit, présentent la similitude adiabatique. Alors, en vertu de la loi d'Amagat, $\sqrt{\frac{\Pi P}{\Pi' P'}}$ est égal à $\sqrt{\frac{m\Theta}{m'\Theta'}}$. Donc :

Pour deux états correspondants, les vitesses du son sont dans le rapport $\sqrt{\frac{m\Theta}{m'\Theta'}}$. *En particulier, il en est ainsi pour les vitesses du son* Σ' et Σ *dans l'état critique.*

20. La similitude mécanique que nous venons de signaler est-elle troublée si les fluides sont traversés par des ondes de choc ?

Aux équations (10), il faut ajouter les équations des ondes de choc qui sont, avec les notations de l'article **9**, et en désignant

---

[1] Amagat a bien vu que les états correspondants de deux fluides sont statiquement semblables. C'est le fondement de sa méthode des *dimensions* pour traiter des propriétés de ces états. Il ne semble pas avoir songé à appliquer la même remarque aux phénomènes de mouvement. J'ai attiré l'attention sur cette extension dynamique de la loi des états correspondants dans une Note insérée à la fin de mon Mémoire *Sur la résistance de l'air et les expériences sur les modèles réduits* (*Revue de Mécanique*, janvier 1913).

par U l'énergie interne :

$$
(12)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\rho_1}{\lambda}\frac{dh_1}{dt}(u_2-u_1)=\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{dh_1}{dt}(v_2-v_1)=\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{dh_1}{dt}(w_2-w_1)=p_2-p_1,\\
&\left(\frac{dh_1}{dt}\right)^2=\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{p_2-p_1}{\rho_2-\rho_1},\\
&(p_1+p_2)(\rho_1-\rho_2)+2\rho_1\rho_2(U_2-U_1)=0.
\end{aligned}
\right.
$$

Mais

$$U=\bar{\varkappa}-T\frac{\partial\bar{\varkappa}}{\partial T},$$

et, par suite, en tenant compte de (9)

$$U=\frac{\Theta}{m}\left[\lambda\left(F-y\frac{\partial F}{\partial y}\right)+H-y\frac{\partial H}{\partial y}\right].$$

Pour le premier gaz, les équations des ondes de choc sont (12). Pour le second, elles sont (12′) différant de (12) par la substitution de Θ' et m' à Θ et à m. La transformation (11) transforme bien une solution de (12) en une solution de (12′) puisque la loi d'Amagat est supposée vraie.

L'existence des ondes de choc ne trouble donc pas la similitude mécanique des états correspondants [nous supposons bien entendu les états correspondant au sens étroit, puisque nous avons fait usage de (9)].

Résistance des gaz non parfaits. — **21**. Dans les mouvements adiabatiques semblables que nous venons de signaler, le rapport des longueurs α est indéterminé. On peut donc, dans les états correspondants des deux gaz, déplacer deux corps solides C et C′ semblables dont les dimensions linéaires sont dans un rapport quelconque. Que pourra-t-on dire des résistances éprouvées par C et C′?

Ces résistances sont dans le rapport $\alpha^2\varpi=\alpha^2\varpi'^2$, ce qui peut s'énoncer de deux manières.

Dans les états correspondants de deux fluides, considérons deux corps solides semblables se déplaçant avec des vitesses qui soient dans le

rapport $\sqrt{\frac{\Pi' P}{\Pi P}}$ *ou* $\sqrt{\frac{m\Theta}{m'\Theta}}$. *Les résistances qu'ils éprouvent sont dans le rapport* $\alpha^2 \frac{\Pi'}{\Pi}$.

Désignons par s le rapport de la vitesse du solide à la vitesse du son dans le fluide à l'état critique Σ. *Pour tous les gaz d'un même groupe, la résistance opposée au mouvement de corps semblables dont le maître couple est* A *est de la forme* $K(x, y, s) A \rho V^2$.

Ces énoncés supposent, bien entendu, qu'il existe un moyen d'échapper, pour le gaz en question, au paradoxe de d'Alembert. Pour ne pas encourir le reproche d'énoncer des résultats illusoires, nous limiterons nos affirmations au cas où le projectile va plus vite que le son. Il se forme alors une onde de choc qui, comme nous l'avons montré, n'altère pas la similitude, et l'on peut considérer comme certain, bien que cela ne soit pas entièrement démontré, que, dans ces conditions, la résistance n'est pas nulle.

22. Il est impossible ici d'aller plus loin et d'étudier, comme on l'a fait pour les gaz parfaits, la loi asymptotique, pour les vitesses infinies, de la résistance d'un fluide donné.

Cherchons à nous rendre compte de ce qui a rendu possible cette recherche pour les gaz parfaits.

La similitude définie par (11) est telle que, deux gaz étant choisis et le premier étant pris dans un état déterminé, l'état dans lequel il faut prendre le second s'ensuit forcément ainsi que tous les rapports de similitude sauf celui des longueurs.

Pour les gaz parfaits, les équations (10) deviennent les équations (1) et la similitude (11) est remplacée par la similitude (9). Ici, α, β, θ sont arbitraires. Deux gaz étant choisis, et le premier étant pris dans un état déterminé, on peut prendre, pour état semblable du second, un état quelconque. Donc deux états quelconques de deux gaz parfaits quelconques sont correspondants. Bien entendu, le rapport des vitesses correspondantes est alors déterminé; il est égal au rapport des vitesses du son dans les deux états.

Soient alors deux corps C et C′ se déplaçant dans le même gaz pris dans le même état. Pour qu'il y ait similitude absolue, il faut

que les vitesses de C et de C′ soient égales. Mais supposons que C et C′ se déplacent avec des vitesses inégales V et V′ mais *très grandes* et d'ailleurs données.

Nous avons, comme on l'a dit, deux mouvements 2 et 2′ se propageant par onde de choc dans l'état 1 donné. Faisons abstraction d'abord de la propagation de 2 et de 2′ dans 1, et occupons-nous uniquement des équations (1) et (1′) que doivent vérifier 2 et 2′. On peut prendre les mouvements 2 et 2′ semblables avec $\theta = \tau^2 = \frac{V'}{V}$ et δ arbitraire, par exemple $\delta = 1$. Les états du fluide dans les mouvements 2 et 2′ sont alors correspondants parce que deux états quelconques d'un même gaz parfait sont correspondants. Il ne reste plus qu'à faire voir que les mouvements 2 et 2′ sont compatibles avec la propagation dans le même état 1. C'est ce qui arrive approximativement quand V′ et V sont très grandes.

Nous venons de reprendre en raccourci la démonstration des articles **8** à **10**. Ce résumé, éclairé par la discussion sur la loi des états correspondants, montre bien, croyons-nous, ce qui fait le caractère spécial des gaz parfaits dans la théorie qui nous occupe.

ÉCOULEMENT D'UN MÉLANGE GAZEUX COMBUSTIBLE PAR UN ORIFICE.

Introduction. — **1**. L'étude expérimentale de la propagation des explosions dans les gaz a conduit à distinguer deux modes de propagation, l'un très rapide, qui constitue la détonation, et l'autre relativement lent, qui constitue la déflagration. L'hydrodynamique chimique fondée sur la thermodynamique a permis, dans ces dernières années, de faire une théorie satisfaisante de cette distinction en considérant les flammes détonantes comme des ondes de choc et combustion comprimées, et les flammes déflagrantes comme des ondes de choc et combustion dilatées [1].

---

[1] On trouvera la réunion de mes recherches sur ce sujet dans ma *Mécanique des explosifs* (Doin, 1917).

Je me propose ici de développer cette théorie en étudiant un problème de déflagration, l'écoulement d'un mélange gazeux enflammé par un orifice. J'ai déjà étudié un autre cas de déflagration, la propagation d'une flamme en régime uniforme dans un mouvement par ondes planes [1]. Ce cas correspond à la méthode expérimentale du tube, employée par Mallard et Le Chatelier dans leurs études sur la combustion des mélanges gazeux. Mais les recherches expérimentales touchant les déflagrations ont aussi employé la méthode de Bunsen où un mélange combustible est enflammé à la sortie d'un orifice. Le nouveau problème que nous allons étudier ici se rattache à cette seconde méthode. Pour en faciliter la solution, nous allons préciser les conditions dans lesquelles nous l'aborderons. Nous nous placerons, on le verra, dans un cas relativement simple. Et néanmoins, nous serons obligés, pour parvenir à la solution, d'avoir recours à certaines hypothèses de l'ordre de celles qu'on fait dans les études élémentaires d'écoulement par les orifices ou les ajutages. Notre étude sera donc plutôt une étude d'hydraulique généralisée que d'hydrodynamique généralisée [2].

Débit d'un ajutage sous une différence de pression donnée. — 2. Soit un mélange gazeux combustible enfermé dans un réservoir où règne la pression p_0 et où le poids spécifique est σ_0 et la température absolue T_0. Ce réservoir communique avec l'extérieur, où règne la pression p, inférieure à p_0, par un ajutage que nous supposerons parfaitement évasé pour éliminer les pertes de charge. γ étant le rapport des chaleurs spécifiques du mélange non brûlé, nous nous supposerons placés dans le cas où

$$\frac{p}{p_0} > \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \tag{1}$$

[1] *Sur la propagation des déflagrations dans les mélanges gazeux; Sur la propagation des déflagrations et sur les limites d'inflammabilité* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 156, 17 mars et 7 avril 1913). — *Mécanique des explosifs* (Doin, 1917).

[2] Ce qui va suivre est le développement d'une Note parue aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, le 18 août 1919 (t. 169) sous le titre : *Sur un problème d'hydraulique généralisée. Ecoulement d'un mélange gazeux en combustion*

valeur correspondant au débit limite dans l'écoulement du mélange non enflammé, de sorte que l'ajutage parfaitement évasé se compose d'une partie graduellement convergente prolongée par une partie cylindrique.

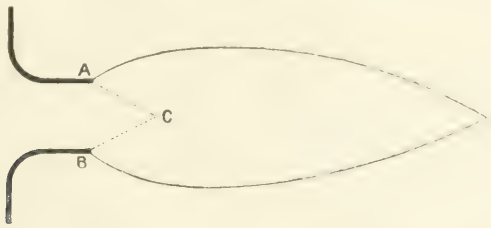
Si le mélange s'écoule *sans être enflammé*, les lois de son écoulement sont les lois classiques de l'écoulement des gaz parfaits. Le débit en masse par unité de temps et par unité de surface de la section *terminale* de l'ajutage est donné par la formule de Saint-Venant et Wantzel :

$$M = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_0}{\sigma_0}}\sqrt{1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}. \tag{2}$$

Imaginons maintenant qu'on fasse écouler le mélange gazeux *en l'enflammant*. Comment l'écoulement est-il modifié ? quel va être le nouveau débit ?

3. Il se forme (*fig.* 6) un cône ABC ayant pour base la section

Fig. 6.



terminale AB de l'ajutage et séparant, dans la veine fluide, la partie non brûlée de la partie en combustion. Comme l'a indiqué M. Gouy [1] le demi-angle au sommet de ce cône a pour sinus le rapport entre la célérité de la flamme par rapport à la matière et la vitesse des molécules fluides. A la vérité, le sommet C n'est pas toujours très pointu. Il l'est quelquefois cependant, surtout, dit M. Gouy, pour les mélanges dans lesquels la flamme a une célérité élevée, comme le mélange théorique d'hydrogène et d'air. Si, souvent, il est arrondi,

[1] *Recherches photométriques sur les flammes colorées* (*Annales de Chimie et de Physique*, 5e série, t. XVIII, 1879).

cela doit tenir à ce que la célérité de la flamme est plus grande au centre de la veine gazeuse, ce qui augmente le sinus de l'angle d'ouverture, et cette augmentation de célérité de la flamme a très probablement pour cause le fait que, dans la région centrale, le gaz frais, entouré par le cône CAB, peut atteindre, avant d'arriver à la flamme, une température plus élevée que dans le reste de la veine : or on sait que la célérité des flammes déflagrantes augmente avec la température du milieu où elles se propagent. Cette explication est celle que donne M. Gouy, et cet auteur l'a étayée par une expérience. Mettant en suspension du chlorure de cuivre dans la veine gazeuse, il a observé que la dissociation de ce corps donnait naissance, à l'intérieur du cône, à une seconde surface bleue dont la distance au cône variait de zéro à $0^{m},0015$ et augmentait quand l'acuité du cône diminuait. La température nécessaire à la dissociation du chlorure de cuivre était donc atteinte avant le cône et d'autant plus tôt que celui-ci était moins aigu.

Dans l'étude approchée que nous voulons faire ici, nous négligerons l'élévation de température probable des filets centraux et nous supposerons le cône CAB à sommet pointu.

Selon l'interprétation que nous adoptons pour les déflagrations, la surface latérale du cône doit être considérée comme une onde de choc et combustion avec chute de pression. Distinguons par les indices 1 et 2 les états du fluide au voisinage du cône soit à l'intérieur soit à l'extérieur de celui-ci. La pression sera alors p_2 à l'extérieur et $p_1 > p_2$ à l'intérieur du cône.

A la traversée de la flamme, les particules fluides subissent une variation de vitesse normale à la surface de cette flamme. Ce résultat a été obtenu par M. Gouy au moyen d'une démonstration incomplète et assez bien vérifié par lui expérimentalement. La théorie des ondes de choc et combustion en donne une démonstration entièrement satisfaisante [1] et les vérifications expérimentales de M. Gouy acquièrent ainsi toute leur portée.

---

[1] *Sur la propagation des réactions chimiques dans les gaz* (Chap. III, n° 6). (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 6e série, t. II, 1906).

Les équations des ondes de choc et combustion nous permettent d'écrire, pour un point quelconque de la surface CAB :

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma_1^2} D_1^2 = \dfrac{p_2 - p_1}{\sigma_1 - \sigma_2}, \\ (p_1 + p_2)(\sigma_2 - \sigma_1) + 2(U_2 - U_1) = 0. \end{cases}$$

Dans ces formules, D_1 représente la célérité de la flamme par rapport à la matière prise dans l'état 1 : p, σ, U sont la pression, le volume spécifique et l'énergie interne spécifique du fluide, ces lettres étant affectées de l'indice convenable suivant le point auquel elles se rapportent. Puisqu'il s'agit de mélanges gazeux parfaits, les U ne dépendent pas de σ et ne sont fonctions que de la température absolue T et du degré de combustion. Nous supposerons d'ailleurs la combustion totale dans l'onde, si bien que le degré de combustion, nul dans l'état 1, est total dans l'état 2. Dans ces conditions, U_1 est une fonction de T_1 seul, U_2 une autre fonction de T_2 seul. D'ailleurs T est relié à p et à σ par l'équation de compressibilité; par celle des gaz frais pour les points 1, par celle des gaz brûlés pour les points 2. Finalement donc, on peut considérer les U comme des fonctions des p et des σ.

4. Les équations (3) s'appliquent à un point quelconque de la surface CAB du cône et les quantités qui y figurent (p_2, p_1, σ_2, σ_1, D_1) peuvent varier le long de cette surface, car il n'est pas démontré que les états 1 et 2 soient les mêmes en tous les points de l'onde. Il est vrai que la régularité du cône qu'on obtient dans des expériences bien faites (abstraction faite de la partie tout à fait centrale que nous négligeons dans une première approximation) porte à penser qu'il serait assez exact d'admettre la constance des états 1 et 2 et par suite de p_1, p_2, σ_1, σ_2, D_1, sur toute la surface CAB. Nous éviterons néanmoins de faire cette hypothèse et il nous suffira d'écrire les équations (3) pour des points particuliers : les points situés sur le parallèle de base AB du cône.

En ces points, la pression p_1 peut être considérée comme égale à la pression qui règne dans toute la section terminale de l'ajutage :

il faut en effet remarquer que la pression est constante dans toute la section terminale de l'ajutage, qui est normale à tous les filets fluides qui la traversent, et cette valeur constante est en particulier celle qui règne au bord de la section, c'est à dire sur le parallèle AB. Quant à p_2, comme nous sommes ici sur le bord de la veine gazeuse, on peut le prendre approximativement égal à la pression extérieure p. Dès lors, aux équations (3) on peut adjoindre les suivantes :

$$p_2 = p, \tag{4}$$

et, puisque le gaz s'écoule sans brûler et adiabatiquement entre le réservoir (pression p_0) et la section terminale de l'ajutage (pression p_1),

$$p_0 \sigma_0 = p_1 \sigma_1. \tag{5}$$

Les équations (3), (4), (5), qui sont au nombre de quatre, déterminent les quatre quantités p_1, σ_1, p_2, σ_2, si l'on suppose D_1 donné ou si on le considère simplement comme une fonction connue de l'état 1, c'est à dire de p_1 et σ_1.

Pour avoir le débit de l'ajutage, il suffit alors de calculer le débit entre les deux pressions p_0 et p_1, c'est-à-dire de porter la valeur de p_1 à la place de p dans la formule (2).

Théoriquement donc nous savons calculer le débit du mélange enflammé si D_1 est connu.

5. *Formules approchées.* — Nous terminerons les calculs en tenant compte du fait que la variation de pression

$$\Delta p = p_1 - p_2 = p_1 - p$$

produite par l'onde est faible et en négligeant les quantités de l'ordre de son carré.

Posons d'ailleurs $\frac{p}{p_0} = \lambda$. C'est une donnée du problème.

Si le gaz s'écoulait sans brûler de l'enceinte p_0 à l'extérieur p, sa température deviendrait

$$T = T_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Cette valeur est très voisine de T_1, lequel vaut $\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ puisque p_1 est voisin de p. Calculons la température de combustion X du mélange *à pression constante* p, *et à partir de la température* T. Evidemment X différera de T_2 d'une quantité de l'ordre de Δp. Calculons de même le volume spécifique σ du mélange brûlé à la température X et à la pression p; il différera de σ_2 d'une quantité de l'ordre de Δp et l'on peut écrire

$$\sigma_2 = x - h\,\Delta p.$$

D'autre part, on a

$$\sigma_1 = \sigma_0\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \sigma_0\left(\frac{p_0}{p + \Delta p}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{\sigma_0}{\lambda^{\frac{1}{\gamma}}}(1 - h\,\Delta p).$$

Portons ces valeurs dans la première équation (3). Il vient

$$\frac{\lambda^{\frac{1}{\gamma}}}{\sigma_0^2} D_1^2 = \frac{\Delta p\,(1 - h\,\Delta p)^2}{x\lambda^{\frac{1}{\gamma}} - \sigma_0 + h\lambda^{\frac{1}{\gamma}}\Delta p - h\sigma_0\,\Delta p},$$

ou, avec l'approximation convenue,

$$\Delta p = \frac{1}{\sigma_0^2}\lambda^{\frac{1}{\gamma}}\left(x\lambda^{\frac{1}{\gamma}} - \sigma_0\right) D_1^2. \tag{6}$$

Dans la formule (2) nous remplaçons maintenant p par p_1, c'est-à-dire par $p + \Delta p$, nous aurons, toujours au même degré d'approximation,

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{1}{\gamma p_0}\,\frac{\lambda^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - \frac{\gamma-1}{2}}{\left(1 - \lambda^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)\lambda^{\frac{1}{\gamma}}}\,\Delta p,$$

ou, vu (6),

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{1}{\gamma p_0 \sigma_0^2}\,\frac{1 - \frac{\gamma-1}{2}\lambda^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{1 - \lambda^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}\,\lambda^{\frac{1}{\gamma}}\left(x\lambda^{\frac{1}{\gamma}} - \sigma_0\right) D_1^2 \tag{7}$$

Cette formule donne la variation de débit qui résulte du fait que le gaz est enflammé à la sortie de l'orifice.

x est très grand par rapport à σ_0 ; donc $x\lambda^{\frac{1}{\gamma}} - \sigma_0$ est positif. En outre, λ est inférieur à 1 : donc $1 - \lambda^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} > 0$. Enfin $1 - \frac{\gamma+1}{2}\lambda^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} < 0$ en vertu de l'hypothèse (1). Par conséquent, le débit subit une *diminution*.

6. *Remarques.* — Nous avons résolu nos équations (3), (4), (5) en supposant D_1 connu. C'est seulement dans ce cas que la formule (7) donne la valeur du débit. Si D_1 était donné en fonction de p_1, σ_1, la résolution des équations dependrait évidemment de son expression.

Mais, en tout état de cause, notre solution suppose D_1 connu, soit en tant que quantité fixe, soit en tant que fonction de p_1 et σ_1. Elle n'est donc pas complète et précisément la solution complète devrait conduire à la détermination de la célérité de la flamme. Nous avions donc bien raison de dire plus haut que nous ne traitions ici qu'un problème d'hydraulique. En somme, nous ébauchons seulement la question et nous sommes obligés de nous contenter de demander la valeur de D_1 à l'expérience.

La flamme se présente ici comme une onde de forme conique. Les expériences sur la propagation des flammes dans les tubes (Mallard et Le Chatelier) ont déterminé la célérité des ondes planes. Rien ne dit que la célérité des ondes coniques soit la même. En adoptant les célérités mesurées dans les tubes pour les introduire dans la formule (7) on se contente donc d'une approximation.

On peut d'ailleurs avoir une idée de la valeur de D_1 par la méthode indiquée par M. Gouy : mesurer l'angle au sommet du cône; calculer, par le débit, les vitesses des molécules fluides, et déduire de là la célérité de la flamme. En se plaçant à ce point de vue, on peut dire que notre formule (7) donne une relation entre le débit de l'ajutage et l'angle au sommet du cône formé par la flamme.

7. *Cas d'une forte différence de pression.* — Nous nous sommes

placés jusqu'ici dans l'hypothèse (1). Imaginons maintenant que l'on ait au contraire

$$\frac{p}{p_0} < \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \tag{8}$$

Dans ce cas, l'ajutage parfaitement évasé qui fait communiquer l'enceinte p_0 et l'extérieur p a une forme d'abord convergente puis divergente. La vitesse des molécules au col de cet ajutage est égale à la vitesse du son; dans la section terminale, elle est encore plus grande. C'est dire que la veine gazeuse s'échappe avec une très grande vitesse. Il paraît probable qu'il est impossible de l'enflammer alors à la sortie, et que par suite le problème disparaît.

A la vérité, on conçoit théoriquement la possibilité d'avoir, à la sortie, un cône CAB assez aigu pour convenir à une vitesse quelconque des molécules fluides. Mais si la vitesse est très forte, le cône est excessivement allongé. Il devient très hasardeux d'admettre, dans ces conditions, les hypothèses qui ont servi de base à nos raisonnements et nous avons tendance à croire que, comme nous l'avons dit, la flamme ne peut alors se maintenir à l'orifice.

Admettons néanmoins qu'elle s'y maintienne. Que nous donneraient nos formules? Il résulte de (8) que (7) indiquerait une *augmentation* de débit quand le gaz est enflammé. Mais il faut bien remarquer ce que suppose l'application de la formule (7). L'ajutage parfaitement évasé conduisant le fluide de p_1 à p est une tuyère convergente-divergente dans lequel le rapport de la section terminale à la section du col est bien déterminé. Quand on enflamme le gaz, la pression dans la section terminale devient $p_1 > p$. Pour que l'ajutage soit encore parfaitement évasé entre p_0 et p_1 il faut maintenant que la section terminale soit diminuée. Il faudrait donc supposer que la section terminale varie quand la pression passe de p à p_1 pour pouvoir appliquer en toute rigueur la formule (7).

Mais n'insistons pas davantage sur ce cas peu intéressant et revenons à celui où l'hypothèse (1) est vérifiée et où la présence de la flamme entraîne une diminution du débit.

Pression dans le réservoir pour un débit donné. — **8.** Il serait

intéressant de mettre en évidence expérimentalement la diminution de débit résultant de l'inflammation du mélange gazeux. Ce serait en effet une vérification de la théorie des explosions qui comblerait une lacune regrettable. Alors en effet que la théorie des détonations trouve une confirmation remarquable dans l'accord qui existe entre les vitesses calculées et mesurées de l'onde explosive, la théorie des déflagrations n'a guère donné jusqu'ici de résultats *numériques* utilisables.

Mais la variation de débit est très faible avec les mélanges gazeux usuels, comme on pourra le voir par les nombres que nous donnerons plus loin. Les expériences propres à la déceler seront donc difficiles. Il sera certainement plus commode, comme nous l'a indiqué M. Le Chatelier, d'instituer des vérifications équivalentes un peu autrement en réalisant l'expérience suivante.

Le mélange gazeux est supposé chassé du réservoir p_0 par un débit d'eau constant, et il s'écoule à l'atmosphère sans brûler par un ajutage donné. La pression atmosphérique est p; la pression dans le réservoire st p_0. Maintenant, laissant le débit d'eau constant, allumons le mélange à sa sortie de l'ajutage. Le débit de gaz, *mesuré en volume dans le réservoir amont*, est toujours le même. Ni p ni l'ajutage ne sont changés. Comme la flamme a tendance à diminuer le débit, il faut ici, le débit restant constant, que la pression p_0 dans le réservoir augmente. On pourra mesurer cette augmentation de pression avec un manomètre très sensible.

Nous allons calculer l'augmentation de la pression p_0 qui doit se produire dans l'expérience ainsi conduite.

9. Quand le gaz s'écoule sans être enflammé, la pression et la température dans le réservoir sont p_0, T_0; la pression et la température dans la section terminale de l'ajutage sont p, pression extérieure, et T. Quand le gaz s'écoule en brûlant, la pression dans le réservoir est $p_0' = p_0 + P_0$, la température y est $T_0' = T_0 + \Theta_0$; dans la section terminale de l'ajutage, la pression est $p_1' = p + P_1$, et la température T_1'. D'une manière générale, les lettres se rapportant à l'expérience où le gaz brûle seront affectées d'un accent.

Nous allons calculer P_0 et P_1. Nous poserons d'ailleurs

$$\frac{p}{p_0} = \lambda.$$

10. Considérons d'abord la première équation (3) dans laquelle nous devons supposer que les lettres sont accentuées. Nous écrirons

$$\frac{1}{\sigma_1'^2} D_1^2 - \frac{p_1' - p_2'}{\sigma_2' - \sigma_1'} = \frac{P_1}{\sigma_2 - \sigma_1}.$$

Mais on a

$$\sigma_1' = \sigma_0' \left(\frac{p_0'}{p_1'}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \sigma_0' \left(\frac{p_0 + P_0}{p + P_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \sigma_0' \lambda^{-\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{1 + \frac{P_0}{p_0}}{1 + \frac{P_1}{p}}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

T est la température atteinte par le mélange non brûlé quand il se détend de p_0 à p. La température T_1' diffère de T d'une quantité de l'ordre de P_1. Calculons la température de combustion X à partir de T et à pression constante. La température T_2' diffère évidemment de X d'une quantité de l'ordre de P_0 ou de P_1. Calculons de même le volume x du mélange brûlé à la température X et à la pression p. Evidemment σ_2' différera de x d'une quantité de l'ordre de P_1. On peut écrire

$$\sigma_2' = x + hP_1.$$

Les valeurs de σ_1' et σ_2' portées dans la première équation (3) donnent

$$\frac{\lambda^{\frac{2}{\gamma}}}{\sigma_0'^2} \left(\frac{1 + \frac{P_1}{p}}{1 + \frac{P_0}{p}}\right)^{\frac{2}{\gamma}} D_1^2 = \frac{P_1}{x + hP_1 - \sigma_0' \lambda^{-\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{1 + \frac{P_0}{p_0}}{1 + \frac{P_1}{p}}\right)^{\frac{1}{\gamma}}},$$

ou, en négligeant P_1^2, $P_1 P_0$, P_0^2,

$$P_1 = \frac{\lambda^{\frac{1}{\gamma}} \left(x \lambda^{\frac{1}{\gamma}} - \sigma_0'\right) D_1^2}{\sigma_0'^2}.$$

Mais

$$\frac{p_0\sigma'_0}{T'_0} = \frac{p_0\sigma_0}{T_0};$$

d'où, en négligeant les carrés et les produits de P_0 et de Θ_0,

$$\sigma'_0 = \sigma_0\left(1 + \frac{\Theta_0}{T_0} - \frac{P_0}{p_0}\right).$$

Il suit de là que, avec le même degré d'approximation, on peut écrire

$$P_1 = \frac{\gamma^{\frac{1}{2}}\left(\alpha\gamma^{\frac{1}{2}} - \sigma'_0\right)}{\sigma_0} D'_1. \tag{9}$$

11. Il nous reste maintenant à calculer P_0. Nous le ferons en exprimant que le débit, mesuré en volume dans le réservoir, est le même dans les deux expériences.

Commençons par supposer que, dans les deux expériences, la température est la même dans le réservoir ($T_0 = T'_0$; $\Theta = 0$). L'égalité de débit, en volume, s'exprime par

$$\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}p_0\sigma_0}\sqrt{1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}p'_0\sigma'_0}\sqrt{1-\left(\frac{p'_1}{p'_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}\left(\frac{p'_1}{p'_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}. \tag{10}$$

Dans ce cas $p_0\sigma_0 = p'_0\sigma'_0$. Par conséquent, (10) donne

$$\frac{p'_1}{p'_0} = \frac{p}{p_0} = \gamma,$$

ou, avec l'approximation convenue,

$$P_0 = \frac{P'_1}{\gamma},$$

et, par (9),

$$P_1 = \frac{1}{\sigma_0}\gamma^{\frac{1}{2}}\left(\alpha\gamma^{\frac{1}{2}} - \sigma'_0\right)D'_1. \tag{11}$$

12. Nous avons supposé que, quand on allumait le gaz, la température dans le réservoir restait la même qu'au cours de l'écoulement sans combustion. Quand on fait l'expérience, peut-on être

assuré qu'il en est réellement ainsi? L'augmentation de pression se produit brusquement au moment de l'allumage; il se pourrait alors que la température variât dans le réservoir du fait de cette compression. Comme cas limite, supposons un accroissement de pression adiabatique. Evidemment, la réalité sera intermédiaire entre ce cas et celui de la température constante.

L'égalité de débit s'exprime toujours par (10), mais on a ici

$$\sigma'_0 = \sigma_0 \left(\frac{p_0}{p'_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Portons cette expression dans (10), remplaçons p'_0 par $p_0 + P_0$, p_1 par $p + P_1$ et négligeons les carrés et les produits de P_0 et P_1. On trouve

$$P_0 = \frac{(\gamma+1)\lambda^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 2}{\gamma - 3 + 2\lambda^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \frac{1}{\gamma} P_1,$$

ou, vu (9),

$$(12) \qquad P_0 = \frac{(\gamma+1) - 2\lambda^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma - 3 + 2\lambda^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \frac{(x\lambda^{\frac{1}{\gamma}} - \sigma_0)}{\sigma_0^2} D_1^2.$$

13. Pour produire le débit d'eau qui chasse le gaz du réservoir, on pourrait, par exemple, utiliser un vase de Mariotte. Mais alors ce débit ne serait pas rigoureusement constant quand la pression dans le réservoir varie. Le vase de Mariotte donne en effet un débit d'eau qui, mesuré en volume, est $A\sqrt{H - p_0}$ dans la première expérience, $A\sqrt{H - p'_0}$ dans la seconde, A et H étant des constantes instrumentales. On a donc

$$\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} p_0 \sigma_0} \sqrt{1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}} = A\sqrt{H - p_0},$$

$$\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} p'_0 \sigma'_0} \sqrt{1 - \left(\frac{p_1}{p'_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left(\frac{p_1}{p'_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}} = A\sqrt{H - p'_0}.$$

Nous supposerons d'ailleurs les températures T_0 et T'_0 égales

dans les deux expériences. Éliminons alors A entre les deux équations précédentes en remarquant que $p'_0 \sigma'_0 = p_0 \sigma_0$. Il vient

$$\frac{\sqrt{1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}}}{\sqrt{H-p_0}} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{p'_1}{p'_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\left(\frac{p'_1}{p'_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}}}{\sqrt{H-p'_0}}.$$

Remplaçons $\frac{p}{p_0}$ par λ, p'_1 par $p+P_1$, p'_0 par p_0+P_0 et faisons toujours la même approximation. On a

$$(13) \qquad P_0 = \frac{1}{\gamma}\,\frac{\left[(\gamma-1)\lambda^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-2\right](H-p_0)}{\left[(\gamma-1)\lambda^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-2\right](H-p_0)-\gamma p_0\left(1-\lambda^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)}\,P_1.$$

14. Ainsi l'augmentation de pression P_0 dans le réservoir est différente dans chacune des trois hypothèses que nous avons examinées. Mais, en général, l'expérience est faite dans des conditions telles que λ est très voisin de 1. Alors la valeur de P_0 est la même dans toutes les hypothèses, et elle est égale à la valeur de P_1. On a en effet dans ce cas

$$(14) \qquad P_0 = P_1 = \frac{\sigma_1-\sigma_0}{\sigma_0^2}\,D_1^2.$$

Quand on fait le calcul de cette expression pour les mélanges des gaz combustibles usuels (hydrogène, formène) avec l'air, on trouve des pressions de 05 à 1^{mm} d'eau pour des célérités D_1 de 1^{m} par seconde.

PROPAGATION D'UNE ONDE DANS UN FLUIDE POLARISÉ.

Nature du problème traité. — **1.** Dans l'hydrodynamique ordinaire, l'état d'un élément fluide dépend exclusivement de sa densité et de sa température.

Le problème de la propagation des réactions chimiques et des flammes dans les gaz fournit un exemple de fluide dont l'état est

défini par la densité, la température et par une troisième variable scalaire, la composition chimique.

On peut aussi concevoir des fluides dont l'état dépendrait de la densité, de la température et d'une variable vectorielle. Nous nous proposons de donner ici un exemple de problème se rapportant à ce cas. Nous allons appliquer les équations de l'hydrodynamique générale à un fluide admettant pour potentiel interne celui qui convient soit à un fluide diélectrique, soit à un fluide aimanté, et nous étudierons, par la méthode d'Hugoniot, la propagation d'une onde dans un tel fluide.

2. Pouvons-nous dire qu'en faisant cette étude, nous traitons le problème physique de la propagation d'une onde, par exemple d'une onde sonore, dans un fluide diélectrique ou aimanté ?

Pour fixer les idées, considérons un fluide parfaitement doux aimanté sous l'action d'aimants permanents. Soient ρ la densité de l'élément de volume $d\tau$; M son moment magnétique dont les composantes suivant les trois axes sont A, B, C; α, β, γ les composantes du champ magnétique; T la température absolue. Le potentiel thermodynamique est

$$(1) \qquad \mathcal{F} = \mathbf{S}\,\zeta(\rho, \mathrm{M}, \mathrm{T})\,\rho\,d\tau - \frac{1}{2}\mathbf{S}\,(\mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\beta + \mathrm{C}\gamma)\,d\tau.$$

Cette expression est propre à l'étude des phénomènes d'équilibre et des transformations infiniment lentes. Si on lui applique les méthodes de la statique générale, on fait bien la statique des fluides aimantés, et c'est ce qu'ont fait Duhem et M. Liénard dans leurs études sur la pression au sein des fluides polarisés [1]. Mais si le fluide cesse d'être immobile, l'aimantation s'accompagne de phénomènes électrodynamiques qui compliquent beaucoup

[1] Pierre Duhem, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. II, 1892. — *Sur la pression dans les milieux diélectriques ou magnétiques* (*American Journal of Mathematics*, vol. XVII, 1895). — Liénard, *Pressions à l'intérieur des aimants et des électriques* (*Lumière électrique*, t. LII, 1894).

les problèmes en introduisant toutes les difficultés de l'Électrodynamique des corps en mouvement. Je vais négliger systématiquement ces phénomènes et me contenter d'appliquer les équations de l'hydrodynamique générale. Je n'étudierai donc pas réellement la propagation d'une onde dans un fluide aimanté. Le problème que je traiterai sera en somme un problème idéal, si l'on veut un simple problème d'ordre mathématique où l'on pourra voir l'application de la méthode d'Hugoniot à un système d'équations relativement compliqué.

Il ne faut donc pas se faire illusion sur la portée physique des résultats que nous allons obtenir. Il me paraît certain toutefois que cette portée, si faible qu'elle soit, n'est pas entièrement nulle. Assurément, la conception d'un fluide aimanté qui ne serait ni conducteur ni diélectrique, — ce serait à un tel fluide seulement que s'appliqueraient rigoureusement nos développements, — est une conception toute théorique. Il me semble cependant que la théorie qui va suivre, si elle ne peut être donnée pour l'étude complète d'un phénomène physique, est tout au moins celle d'un des éléments constitutifs de ce phénomène. Les termes qu'elle nous donnera dans l'expression de la célérité des ondes doivent (cela me paraît du moins très probable) se retrouver, avec peut-être certaines modifications, dans l'expression vraie de la vitesse du son dans un fluide aimanté. Elle nous portera tout au moins à penser que le seul fait de la polarisation peut rendre la vitesse du son variable avec la direction de sa propagation.

Au fond, d'ailleurs, on fait des simplifications analogues quand on étudie les oscillations d'un barreau aimanté dans un champ magnétique sans tenir compte des courants induits.

Application de la méthode d'Hugoniot. — **5.** Quand on prend le problème de la façon que nous venons de préciser, les équations du mouvement du fluide s'obtiennent en ajoutant simplement les forces d'inertie aux équations d'équilibre (nous négligeons la viscosité). Soient u, v, w les composantes de la vitesse; X, Y, Z celles des accélérations dues aux forces massiques comme la

pesanteur. Les équations du mouvement sont :

$$(2)\qquad (\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\rho}{M}\frac{\partial \zeta}{\partial M} \times (A, B, C) = F(M, \zeta, T) \times (A, B, C)$$

$$(3)\qquad \frac{\partial}{\partial(x, y, z)}\left(\zeta + \rho\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}\right) - \frac{\partial \zeta}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial(x, y, z)}$$

$$= (X, Y, Z) - \frac{\partial(u, v, w)}{\partial t} - u\frac{\partial(u, v, w)}{\partial x}$$

$$- v\frac{\partial(u, v, w)}{\partial y} - w\frac{\partial(u, v, w)}{\partial z},$$

$$(4)\qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0.$$

On a posé

$$(5)\qquad F = \frac{\rho}{M}\frac{\partial \zeta}{\partial M};$$

F est l'inverse de la *susceptibilité magnétique*. Les équations (2) comme les équations (3) sont au nombre de 3, chacune se déduisant de la précédente par une permutation circulaire indiquée par une notation qui se comprend d'elle-même.

Dans ces équations, on considérera comme fonctions inconnues

$$(6)\qquad \rho,\ T,\ A,\ B,\ C,\ u,\ v,\ w.$$

Les α, β, γ s'en déduisent par des formules connues.

4. Soit une surface de discontinuité Ω séparant deux régions dans la masse fluide.

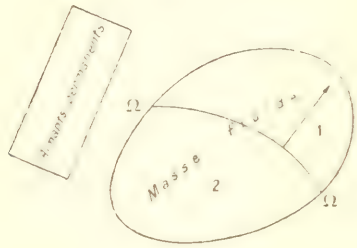
Dans la première région, règnent les intégrales ρ_1, T_1, A_1, B_1, C_1, u_1, v_1, w_1; dans la seconde, règnent les intégrales ρ_2, T_2, A_2, B_2, C_2, u_2, v_2, w_2. La surface Ω est supposée une onde d'accélération, c'est-à-dire que les fonctions ρ, T, A, B, C, u, v, w sont continues à sa traversée et que la discontinuité n'apparaît que dans les dérivées premières. Si l'on pose

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \rho_1 - \rho_2 = R, & A_1 - A_2 = G, & u_1 - u_2 = U, \\ M_1 - M_2 = P, & B_1 - B_2 = H, & v_1 - v_2 = V, \\ T_1 - T_2 = \Theta, & C_1 - C_2 = K, & w_1 - w_2 = W, \end{array}\right.$$

les quantités R, P, Θ, G, H, K, U, V, W sont nulles sur Ω, mais non leurs dérivées premières.

Soient λ, μ, ν les cosinus directeurs de la normale à Ω dirigée de

Fig. 7.



2 vers 1. Au bout du temps dt, la surface Ω est venue en Ω′ dans le champ des variables d'Euler, à une distance dn de Ω mesurée sur la normale λ, μ, ν. La célérité de l'onde dans le champ des variables d'Euler est $\frac{dn}{dt}$; la célérité par rapport à la matière est

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{dn}{dt} - (\lambda u + \mu v + \nu w).$$

(Il est indifférent d'affecter les u, v, w de l'indice 1 ou de l'indice 2 puisque, sur Ω, les vitesses sont égales.) La méthode d'Hugoniot va nous permettre de calculer $\frac{dn}{dt}$.

3. Les quantités R, P, Θ, G, H, K, U, V, W étant nulles sur Ω, les raisonnements classiques d'Hugoniot nous apprennent qu'une quelconque d'entre elles, par exemple R, vérifie, aux points situés sur Ω, les équations suivantes :

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial x} : \dfrac{\partial R}{\partial y} : \dfrac{\partial R}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\lambda} : \dfrac{\partial R}{\mu} : \dfrac{\partial R}{\nu} = \dfrac{\partial R}{dn}, \\ \dfrac{\partial R}{\partial t} - \dfrac{dn}{dt}\dfrac{\partial R}{dn} = 0. \end{cases}$$

Des équations de cette forme s'appliquent à toutes les grandeurs R, P, Θ, G, H, K, U, V, W.

Cherchons maintenant comment se comporte le champ, α, β, γ, à la traversée de Ω. Il est évidemment continu. Mais calculons $\frac{d\alpha_1}{dn} - \frac{d\alpha_2}{dn}$ et les quantités analogues relatives à β et à γ.

On sait que α, β, γ sont les dérivées partielles d'une fonction $\varphi(x, y, z)$ ainsi définie. Appelons r la distance du point x, y, z à un autre point x' y', z', autour duquel nous considérerons un élément de volume $d\tau'$ dont le moment magnétique sera A', B', C'. On a

$$\varphi(x, y, z) = \mathrm{S}\left(\frac{\partial A'}{\partial x'} + \frac{\partial B'}{\partial y'} + \frac{\partial C'}{\partial z'}\right) d\tau' + \mathrm{I}.$$

I étant une intégrale de surface se rapportant à la surface limitant le fluide.

On peut décomposer en deux parties le champ de l'integrale triple qui figure dans φ, le champ 1 et le champ 2 séparés par la surface Ω. Posons

$$\Delta = \frac{\partial A'}{\partial x'} + \frac{\partial B'}{\partial y'} + \frac{\partial C'}{\partial z'} = \text{Divergence M}.$$

On aura

$$\varphi = \mathrm{S}_1 \Delta_1 \frac{d\tau'}{r} + \mathrm{S}_2 \Delta_2 \frac{d\tau'}{r} + \mathrm{I}.$$

De là on tire, moyennant une dérivation et des intégrations par parties, en remarquant que $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right)$,

$$\alpha = \mathrm{S}_1 \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta_1}{\partial x'} d\tau' + \mathrm{S}_2 \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta_2}{\partial x'} + \sum_{\Omega} \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{r} \lambda\, d\omega + \ldots.$$

Dans $+ \ldots$ sont comprises les intégrales relatives à la surface extérieure du fluide qui sont inutiles ici.

α a donc la forme d'un potentiel newtonien produit par des charges massiques et des charges superficielles réparties sur Ω. Il suit d'une formule classique que

$$\frac{d\alpha_1}{dn} - \frac{d\alpha_2}{dn} = 4\pi(\Delta_2 - \Delta_1)$$

ou, en vertu des définitions (7),

$$\frac{d\alpha_1}{dn} - \frac{d\alpha_2}{dn} = -4\pi\lambda\left(\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial z}\right).$$

Mais, sur Ω, les quantités G, H, K vérifient les équations (8). Donc

$$(9)\qquad \frac{d\varpi_1}{dn} - \frac{d\varpi_2}{dn} = -4\pi\lambda\left(\lambda\frac{dG}{dn} + \mu\frac{dH}{dn} + \nu\frac{dK}{dn}\right).$$

6. Ces préliminaires posés, le développement de la méthode d'Hugoniot est classique. Nous le rappellerons brièvement.

Écrivons l'équation (4) pour le mouvement 1, puis pour le mouvement 2, et retranchons les deux équations obtenues l'une de l'autre en remarquant que, si nous nous plaçons sur Ω, les quantités (6) sont égales avec les indices 1 ou 2. Il vient, grâce à (8) :

$$(10)\qquad \frac{dN}{dt}\frac{dR}{dn} = \rho\left(\lambda\frac{dU}{dn} + \mu\frac{dV}{dn} + \nu\frac{dW}{dn}\right).$$

Traitons les équations (3) comme nous avons traité (4). Chacune donne une équation en $\frac{dR}{dn}, \frac{dG}{dn}, \ldots$ Ajoutons les trois équations obtenues, respectivement multipliées par λ, μ, ν. Il vient

$$\begin{aligned}
&\left(\nu\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} - \rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2}\right)\frac{dR}{dn}\\
&\quad + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial M} + \rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial M}\right)\left(\frac{A}{M}\frac{dG}{dn} + \frac{B}{M}\frac{dH}{dn} + \frac{C}{M}\frac{dK}{dn}\right) + \rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}\frac{d\Theta}{dn}\\
&\quad = \left(\lambda\frac{dU}{dn} + \mu\frac{dV}{dn} + \nu\frac{dW}{dn}\right)\frac{dN}{dt}.
\end{aligned}$$

La définition (5) de F permet d'écrire autrement les coefficients de $\frac{dG}{dn}, \frac{dH}{dn}, \frac{dK}{dn}$. D'autre part, tenons compte de (10). Il vient définitivement

$$(11)\qquad \left[\nu\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} - \rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2} - \frac{1}{\rho}\left(\frac{dN}{dt}\right)^2\right]\frac{dR}{dn}$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial\rho}\left(A\frac{dG}{dn} + B\frac{dH}{dn} + C\frac{dK}{dn}\right) + \rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}\frac{d\Theta}{dn} = 0.$$

Dérivons maintenant la première équation (2) suivant la normale n. Écrivons l'équation obtenue pour le mouvement 1 et pour

le mouvement 2 et retranchons. Il vient

$$A\frac{\partial F}{\partial \rho}\frac{dR}{dn}+\left(F+\frac{A^2}{M}\frac{\partial F}{\partial M}\right)\frac{dG}{dn}$$
$$+\frac{AB}{M}\frac{\partial F}{\partial M}\frac{dH}{dn}+\frac{AC}{M}\frac{\partial F}{\partial M}\frac{dK}{dn}+A\frac{\partial F}{\partial T}\frac{d\Theta}{dn}=\frac{d\varphi_1}{dn}-\frac{d\varphi_2}{dn},$$

équation qui, grâce à (9), donne la première des équations suivantes. Les deux autres s'obtiennent en partant de deux autres équations (2) :

$$(12)\quad\left\{\begin{aligned}
&A\frac{\partial F}{\partial \rho}\frac{dR}{dn}+\left(F+\frac{A^2}{M}\frac{\partial F}{\partial M}+4\pi\lambda^2\right)\frac{dG}{dn}+\left(\frac{AB}{M}\frac{\partial F}{\partial M}-4\pi\lambda\mu\right)\frac{dH}{dn}\\
&\qquad+\left(\frac{AC}{M}\frac{\partial F}{\partial M}-4\pi\lambda\nu\right)\frac{dK}{dn}+A\frac{\partial F}{\partial T}\frac{d\Theta}{dn}=0,\\
&B\frac{\partial F}{\partial \rho}\frac{dR}{dn}+\left(\frac{AB}{M}\frac{\partial F}{\partial M}-4\pi\lambda\mu\right)\frac{dG}{dn}+\left(F+\frac{B^2}{M}\frac{\partial F}{\partial M}-4\pi\mu^2\right)\frac{dH}{dn}\\
&\qquad+\left(\frac{BC}{M}\frac{\partial F}{\partial M}-4\pi\mu\nu\right)\frac{dK}{dn}+B\frac{\partial F}{\partial T}\frac{d\Theta}{dn}=0,\\
&C\frac{\partial F}{\partial \rho}\frac{dR}{dn}+\left(\frac{AC}{M}\frac{\partial F}{\partial M}-4\pi\lambda\nu\right)\frac{dG}{dn}+\left(\frac{BC}{M}\frac{\partial F}{\partial M}-4\pi\mu\nu\right)\frac{dH}{dn}\\
&\qquad+\left(F+\frac{C^2}{M}\frac{\partial F}{\partial M}-4\pi\nu^2\right)\frac{dK}{dn}+C\frac{\partial F}{\partial T}\frac{d\Theta}{dn}=0.
\end{aligned}\right.$$

Il faut enfin faire une hypothèse sur la relation supplémentaire. Cette hypothèse peut être assez générale sans que la méthode d'Hugoniot cesse d'être applicable [1]. Nous nous contenterons ici d'admettre que l'entropie $-\frac{\partial\zeta}{\partial T}$ d'un élément est une fonction $\varsigma(T)$ de la température. La fonction ς peut d'ailleurs varier d'une particule à l'autre. Considérons la fonction $\sigma=-\frac{\partial\zeta}{\partial T}-\varsigma(T)$. C'est une fonction de ρ, M, T et de a, b, c coordonnées *initiales* d'une particule. La relation supplémentaire est, dans notre hypothèse,

$$\sigma(\rho, M, T, a, b, c)=0.$$

Elle comprend comme cas particulier celui des mouvements adia-

[1] *Voir* sur ce sujet mon *Mémoire sur la propagation des réactions chimiques dans les gaz* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 9e série, t. I, 1905, p. 387).

batiques, où $\frac{\partial \zeta}{\partial T}$ est constant : il suffit de faire $\rho = \text{const}$. Si, dans cette relation, nous considérons ρ, M, T comme fonctions des variables d'Euler x, y, z, t, nous aurons évidemment en dérivant en suivant une particule :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)$$
$$+ \frac{\partial \sigma}{\partial M}\left(\frac{\partial M}{\partial t} + u\frac{\partial M}{\partial x} + v\frac{\partial M}{\partial y} + w\frac{\partial M}{\partial z}\right) + \frac{\partial \sigma}{\partial T}\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z}\right) = 0.$$

Écrivons cette équation pour le mouvement 1, puis pour le mouvement 2 et retranchons. On obtient

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \rho}\frac{dR}{dn} - \frac{\partial \sigma}{\partial M}\left(\frac{A}{M}\frac{dG}{dn} + \frac{B}{M}\frac{dH}{dn} + \frac{C}{M}\frac{dK}{dn}\right) + \frac{\partial \sigma}{\partial T}\frac{d\Theta}{dn} = 0.$$

Il est facile de voir que cela peut s'écrire, en multipliant d'ailleurs par ρ dans un but de symétrie qui sera visible ultérieurement :

$$(13)\quad \rho\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\,\partial T}\frac{dR}{dn} + \frac{\partial F}{\partial T}\left(A\frac{dG}{dn} + B\frac{dH}{dn} + C\frac{dK}{dn}\right) + \rho\left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2} + \rho(T)\right]\frac{d\Theta}{dn} = 0.$$

Les équations (11), (12), (13) sont cinq équations linéaires et homogènes en

$$\frac{dR}{dn},\quad \frac{dG}{dn},\quad \frac{dH}{dn},\quad \frac{dK}{dn},\quad \frac{d\Theta}{dn}.$$

Ces cinq quantités ne sont d'ailleurs pas toutes nulles, sinon la discontinuité supposée sur la surface Ω n'existerait pas. Donc le déterminant de leurs coefficients est nul et l'on a, en désignant par f, f', f'', g, g', g'', pour simplifier l'écriture, les coefficients de $\frac{dG}{dn}, \ldots,$

$$(14)\quad \begin{vmatrix} \rho\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + \rho\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{dN}{dt}\right)^2 & A\frac{\partial F}{\partial \rho} & B\frac{\partial F}{\partial \rho} & C\frac{\partial F}{\partial \rho} & \rho\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\,\partial T} \\ A\frac{\partial F}{\partial \rho} & f(\lambda^2) & g(\lambda\mu) & g(\lambda\nu) & A\frac{\partial F}{\partial T} \\ B\frac{\partial F}{\partial \rho} & g'(\lambda\mu) & f'(\mu^2) & g(\mu\nu) & B\frac{\partial F}{\partial T} \\ C\frac{\partial F}{\partial \rho} & g''(\lambda\nu) & g(\mu\nu) & f''(\nu^2) & C\frac{\partial F}{\partial T} \\ \rho\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\,\partial T} & A\frac{\partial F}{\partial T} & B\frac{\partial F}{\partial T} & C\frac{\partial F}{\partial T} & \rho\left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2} + \rho(T)\right] \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation (14), dont le premier nombre est un déterminant symétrique, détermine la célérité $\frac{dN}{dt}$. On voit que $\frac{dN}{dt}$ dépend de λ, μ, ν et par conséquent de l'orientation de l'onde par rapport à la polarisation.

Toutefois, si l'on change λ, μ, ν en $-\lambda$, $-\mu$, $-\nu$, l'équation (14) ne change pas. Par conséquent, la célérité dans une direction est la même que dans la direction opposée.

Interprétation de la formule de la célérité. — **7.** On peut donner l'interprétation suivante de la formule de la célérité.

Soit le vecteur $4\pi M$ porté par le vecteur aimantation. Projetons ce vecteur $4\pi M$ sur la normale λ, μ, ν. On obtient un second vecteur $4\pi(\lambda A + \mu B + \nu C)$ dirigé suivant la normale λ, μ, ν. Soit aussi le vecteur H représentant le champ et porté dans la direction de l'aimantation. Considérons finalement le vecteur J, résultante de H et de $4\pi(\lambda A + \mu B + \nu C)$. Ses projections sur les trois axes sont

$$AF + 4\pi\lambda(\lambda A + \mu B + \nu C), \qquad BF + 4\pi\mu(\lambda A + \mu B + \nu C),$$
$$CF + 4\pi\nu(\lambda A + \mu B + \nu C).$$

Envisageons maintenant la fonction

$$h = \zeta + \rho\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} + \int \rho(T)\,dT.$$

Imposons au fluide une modification virtuelle assujettie aux conditions de laisser

$$\sigma = -\frac{\partial\zeta}{\partial T} - \rho(T)$$

constamment nul et de conserver le vecteur J en grandeur et en direction. Les équations qui lient δh, $\delta\gamma$, δA, δB, δC, δT dans cette modification virtuelle sont précisément les équations (11), (12), (13), où

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{dN}{dt}\right)^2\frac{dB}{dn}$$

est remplacé par δh et où

$$\frac{dR}{dn},\quad \frac{dG}{dn},\quad \frac{dH}{dn},\quad \frac{dK}{dn},\quad \frac{d\Theta}{dn}$$

sont remplacés par

$$\delta\rho,\quad \delta A,\quad \delta B,\quad \delta C,\quad \delta T.$$

Il s'ensuit que

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)^2 = \rho\frac{\delta h}{\delta\rho}.$$

Propriétés de la célérité. — 8. Pour étudier la valeur de la célérité donnée par (14), nous poserons

$$D = \begin{vmatrix} f & g' & g \\ g' & f' & g \\ g' & g & f \end{vmatrix}.$$

Développant alors le déterminant (14), nous aurons

$$(15)\quad \left[\rho\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} + \rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2} - \frac{1}{\rho}\left(\frac{dN}{dt}\right)^2\right]\rho\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2} + \rho\,\zeta(T)\right]D - \rho^2\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}\right)^2 D + \tau = 0,$$

en groupant sous la dénomination τ des termes qui tous contiennent en facteur les carrés ou les doubles produits de $\frac{\partial F}{\partial\rho}$ et de $\frac{\partial F}{\partial T}$ et les carrés ou les doubles produits de A, B, C.

De là les conclusions suivantes :

Si $\frac{\partial F}{\partial\rho}$ et $\frac{\partial F}{\partial T}$ sont nuls (susceptibilité magnétique indépendante de la densité et de la température), τ est nul, D est en facteur dans (15) et, par suite, la célérité est indépendante de λ, μ, ν, c'est-à-dire de la direction de la propagation.

Bien plus, je dis que, dans cette hypothèse $\left(\frac{\partial F}{\partial\rho} = \frac{\partial F}{\partial T} = 0\right)$, la célérité est la même que si le fluide n'était pas aimanté.

En effet, F est alors fonction de M seul et la définition (5) de F donne alors

$$\zeta = \frac{1}{\rho}\int_{\rho_0}^{\rho_M} M\,F(M)\,dM + \psi(\rho, T);$$

$\psi(\rho, T)$ est le potentiel de l'unité de masse quand l'aimantation est

nulle. Dès lors, on calcule facilement que

$$2\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}+\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2}=2\frac{\partial\psi}{\partial\rho}+\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2},$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial T^2},$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}=\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho\,\partial T},$$

et par suite (15) donne pour $\frac{dN}{dt}$ la même valeur que si le potentiel était ψ au lieu d'être ζ.

9. Supposons maintenant $\frac{\partial F}{\partial\rho}$ et $\frac{\partial F}{\partial T}$ non pas nuls, mais assez petits pour qu'on puisse en négliger les carrés et les doubles produits.

Dès lors, ϖ, est négligeable et (15) donne encore une célérité indépendante de la direction de la propagation. Mais cette célérité est différente de ce qu'elle serait en l'absence de toute aimantation. Calculons-la. On a

$$\zeta=\int_0^M\frac{M\,F(M,\rho,T)}{\rho}\,dM+\psi(\rho,T),$$

d'où

$$2\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}+\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2}=\int_0^M M\frac{\partial^2F}{\partial\rho^2}\,dM+2\frac{\partial\psi}{\partial\rho}+\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2},$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2}=\frac{1}{\rho}\int_0^M M\frac{\partial^2F}{\partial T^2}\,dM+\frac{\partial^2\psi}{\partial T^2},$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}=\frac{1}{\rho}\int_0^M\left(M\frac{\partial^2F}{\partial\rho\,\partial T}-\frac{M}{\rho}\frac{\partial F}{\partial T}\right)dM+\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho\,\partial T}.$$

On substituera ces valeurs dans (15) pour avoir $\frac{dN}{dt}$. Contentons-nous ici de nous rendre compte de l'ordre de grandeur du terme supplémentaire qu'introduit l'aimantation. Supposons pour simplifier $\frac{\partial F}{\partial\rho}$ nul et $\frac{\partial F}{\partial T}$ constant. Nous aurons alors

$$2\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}+\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2}=2\frac{\partial\psi}{\partial\rho}+\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2},$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial T^2},$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}=-\frac{M^2}{2\rho^2}\frac{\partial F}{\partial T}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho\,\partial T}.$$

et (15) donne, en négligeant ϖ :

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)^2 = 2\rho\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} + \rho^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2} - \rho^2\frac{\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}\right)^2\left[1 - \frac{M^2\frac{\partial F}{\partial T}}{\rho^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}}\right]^2}{\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2} + \varpi}.$$

Ne conservons pas les termes en $\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)^2$ puisque nous avons déjà supposé ϖ négligeable. Prenons d'autre part le cas particulier des mouvements adiabatiques ($\varphi' = 0$). Nous aurons

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)^2 = 2\rho\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} + \rho^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2} - \rho^2\frac{\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}\right)^2}{\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2}} + M^2\frac{\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}}{\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2}}\frac{\partial F}{\partial T}.$$

Les trois premiers termes de cette expression donnent la valeur de $\left(\frac{dN}{dt}\right)^2$ quand il n'y a pas d'aimantation. L'aimantation introduit le terme

$$M\frac{\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}}{\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2}}\frac{\partial F}{\partial T}.$$

Ce terme est en général petit, car M est généralement faible dans les gaz naturels. Il n'est pas sans intérêt d'observer que ϖ, qui a été négligé, contient, lui aussi, en facteur M^2.

10. Voyons l'ordre de grandeur de ce terme complémentaire pour l'oxygène qui est le gaz le plus magnétique.

Soient c, C les chaleurs spécifiques du gaz, $p = (C - c)\rho T$ la pression. $\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2}$ c'est $-\frac{c}{T}$; $\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}$ c'est $\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial p}{\partial T}$. Le terme correctif est donc

$$-\frac{TM}{c\rho^2}\frac{\partial p}{\partial T}\frac{\partial F}{\partial T} \quad \text{ou} \quad -\left(\frac{C}{c} - 1\right)\frac{TM^2}{\rho}\frac{\partial F}{\partial T},$$

ou, en désignant le champ par $\mathcal{H}$,

$$-\left(\frac{C}{c} - 1\right)\frac{T}{\rho}\frac{1}{M^2}\frac{\partial F}{\partial T}\mathcal{H}^2.$$

Pour l'oxygène, en unités électromagnétiques C. G. S.,

$$F = \frac{10^6}{0,18} \text{ à } 27^\circ,$$

$$F = \frac{10^6}{0,15} \text{ à } 293^\circ,$$

$$\rho = 0,001\,429,$$

$$\frac{C}{c} = 1,41.$$

Le terme complémentaire est donc

$$-\frac{1,43}{10^4}\mathcal{H}^2.$$

Mais la valeur de $\left(\frac{dN}{dt}\right)^2$, quand l'aimantation est nulle, est de l'ordre de 10^9. Pour que l'aimantation introduise une variation de $\frac{1}{100}$ dans la valeur de $\frac{dN}{dt}$, il faudrait que

$$\frac{1,43}{10^4}\mathcal{H}^2 = \frac{1}{50}10^9,$$

$$\mathcal{H} = 10^5 \times 3,7.$$

Il faudrait donc se placer dans un champ considérable.

Remarquons toutefois que la théorie qui précède serait directement applicable à la propagation dans un solide élastique dans le cas *des ondes planes*. On pourrait donc l'appliquer à la propagation des ondes planes dans du fer par exemple, sous réserve bien entendu des observations faites au début sur les phénomènes électrodynamiques induits. La susceptibilité magnétique serait alors beaucoup plus grande et l'influence de l'aimantation beaucoup plus sensible.

11. Essayons enfin de nous rendre compte de l'ordre de grandeur de l'influence de la polarisation dans le cas d'un fluide diélectrique.

Admettons la loi de Mossotti et Clausius qui peut s'exprimer

par $F = \frac{a}{\rho}$ (a est une constante). Donc

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial T} = 0, \\ \zeta = \dfrac{aM^2}{2\rho^2} + \psi(\rho, T). \end{cases}$$

Bornons-nous à appliquer (16) aux deux cas suivants :

1° Propagation d'une onde dans le sens de la polarisation,

$$\begin{array}{lll} A = M, & B = 0, & C = 0, \\ \lambda = 1, & \mu = 0, & \nu = 0. \end{array}$$

La formule (14) donne

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)^2 = 2\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \rho^2\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} - \rho^2\frac{\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\rho\,\partial T}\right)^2}{\dfrac{\partial^2\psi}{\partial T^2}} - \frac{M^2}{\rho}\,\frac{4\pi}{1 + \dfrac{4\pi}{F}}.$$

2° Propagation dans un sens perpendiculaire à la polarisation.

$$\begin{array}{lll} A = M, & B = 0, & C = 0, \\ \lambda = 0, & \mu = 1, & \nu = 0. \end{array}$$

La formule (14) donne

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)^2 = 2\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \rho^2\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} - \rho^2\frac{\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\rho\,\partial T}\right)^2}{\dfrac{\partial^2\psi}{\partial T^2}}.$$

Dans le second cas, la célérité est la même que si la polarisation était nulle. Dans le premier, on a un terme complémentaire :

$$\frac{M^2}{\rho}\,\frac{4\pi}{1 + \dfrac{4\pi}{F}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\rho F^2}\,\frac{4\pi}{1 + \dfrac{4\pi}{F}}\,\text{cc}^2.$$

Pour l'air à 20 atmosphères, on a, en unités électrostatiques C.G.S.,

$$\frac{4\pi}{F} = 0{,}01,$$

$$\rho = \frac{26}{10}.$$

Le terme complémentaire est donc

$$\frac{1}{3\,266}\,\mathfrak{K}^2.$$

Pour avoir, sur $\frac{dN}{dt}$, une variation de 1 pour 100, il faudrait que $\mathfrak{K}$ fût de l'ordre de $2{,}5 \times 10^5$ (en unités électrostatiques), valeur très considérable.

Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles;

PAR MAURICE JANET.

INTRODUCTION.

1. Dans la théorie générale des systèmes d'équations aux dérivées partielles, deux cas peuvent être actuellement considérés comme classiques :

1° Celui d'un système du *premier ordre* à *une* fonction inconnue;

2° Celui d'un système à *autant d'équations* que *de fonctions inconnues de la forme de Cauchy et de Mme Kowalewsky.*

Le système d'équations aux dérivées partielles le plus général est susceptible de différentes formes simples :

Tout système peut se ramener à un système du premier ordre.

Tout système peut se ramener à un système du deuxième ordre à une seule fonction inconnue (1).

Dans un autre ordre d'idées, on peut remarquer que tout système d'équations aux dérivées partielles est équivalent à un système d'équations aux différentielles totales : la théorie de ces derniers systèmes (2) fournirait donc une base d'étude pour celle que nous avons en vue.

(1) Cette propriété, plus cachée que la précédente, a été signalée par M. Drach (*C. R. Acad. Sc.*, 1897, p. 398).

(2) *Voir* en particulier les travaux de M. Cartan (*Ann. Éc. Norm.*, 1899-1904) et de M. Goursat (*Ann. Toulouse*, 1912) auxquels se rattachent ceux de M. G. Cerf (*C. R. Acad. Sc.*, 1920).

Mais si cette méthode éclaire bien des questions posées par la théorie des systèmes d'équations aux dérivées partielles, il en est d'autres au contraire dont l'étude directe est plus naturelle : citons l'étude des systèmes *linéaires*.

Dans ce qui suit, nous n'aurons pas à nous servir des remarques qui précèdent; nous traiterons directement un système d'équations aux dérivées partielles donné sans changer de fonctions inconnues ni de variables indépendantes; nous arriverons à une forme canonique entièrement générale où le « degré de généralité » de la solution apparaîtra nettement.

Cette forme canonique générale est due à M. Riquier, qui a le premier [1], en 1892, démontré l'existence des solutions d'un système différentiel [2] quelconque.

Elle comprend comme cas particulier la forme canonique adoptée par M. Delassus : bien que cette dernière forme ait un grand degré de généralité, on doit remarquer qu'il existe des systèmes [3] auxquels elle ne peut s'appliquer même après un changement de variables.

2. Le présent travail a pour objet essentiel l'exposition simple des résultats de M. Riquier. Cette exposition nous conduira naturellement à certains résultats de nature algébrique qui complètent la théorie des formes donnée par M. Hilbert [4]. Les développements que comporterait cette théorie et leur application à la théorie des caractéristiques des systèmes seront réservés pour un autre travail : il nous a semblé qu'il y avait lieu d'exposer tout d'abord par une méthode nouvelle aussi simple que possible le théorème général relatif à l'existence des solutions d'un système quelconque.

Nous commencerons par des remarques de nature arithmétique : les dérivées d'une fonction de n variables (ou les coefficients du déve-

---

[1] *Voir* pour l'historique de la question l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, t. II, 4, t. et la préface de l'ouvrage de M. Riquier, *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles* (Gauthier-Villars, 1910).

[2] « formellement » compatible.

[3] Ce fait a été signalé par MM. Cunningham et Robinson (*C. R. Acad. Sc.*, 1913, p. 1147).

[4] *Mathematische Annalen*, 1890.

loppement d'une fonction de n variables en série entière) correspondent aux systèmes constitués par n entiers rangés dans un certain ordre; nous avons adopté le langage algébrique : le premier Chapitre sera consacré à l'étude des systèmes de « monomes » et en particulier des *modules* de monomes; nous mettons en évidence la notion de système de monomes complet qui est fondamentale pour la suite. Lorsqu'un système de monomes est complet, les monomes multiples de l'un d'eux (au moins) se répartissent immédiatement en un nombre fini de classes de formation simple (I). La classification des monomes d'un système complet d'après leur « hauteur » conduit à une propriété importante (II) qui est utilisée au Chapitre II. Nous en indiquons immédiatement l'application à ce que l'on peut appeler le « calcul inverse de la dérivation ».

Le deuxième Chapitre a un caractère algébrique : il est consacré à l'étude formelle des systèmes d'équations aux dérivées partielles; l'attribution de cotes aux fonctions et variables permet de classer d'une manière simple les dérivées des inconnues. Pour les systèmes de forme canonique, les deux notions de « système complet » et de « classement des dérivées des inconnues au moyen de cotes » permettent la position d'un problème « formel » pour lequel le degré de généralité de la solution est nettement en évidence; dans le cas où le système proposé est complètement intégrable, ce problème est équivalent au problème que l'on pose en assujettissant les équations du système à être simultanément vérifiées quelles que soient les valeurs des variables. Nous indiquons un procédé régulier pour reconnaître au bout d'un nombre fini d'opérations si un système donné est complètement intégrable. Nous montrons d'ailleurs que tout système peut se ramener par un procédé régulier à une forme canonique complètement intégrable. Nous donnons enfin quelques indications sur les conséquences que l'on peut tirer de ce qui précède dans la théorie des formes algébriques.

Les méthodes précédentes donnent le moyen de calculer les coefficients du développement en série d'une solution dont on suppose l'*existence* et la *régularité*, lorsque l'on connaît les conditions initiales relatives à cette solution. Réciproquement, les coefficients calculés définissent-ils effectivement une solution? Il suffit, pour démontrer

qu'il en est ainsi, de démontrer que les séries obtenues pour la solution sont *convergentes* (lorsque les variables diffèrent assez peu de certaines valeurs : valeurs initiales). C'est à cette démonstration qu'est consacré le troisième Chapitre. Il convient tout d'abord de généraliser les résultats indiqués au Chapitre II. Lorsque cette généralisation est faite, la démonstration devient très simple; nous mettons en évidence et nous prouvons à part trois lemmes de nature algébrique que nous utilisons. Cette démonstration de convergence n'est pas seulement plus simple que celle de M. Riquier; elle est aussi plus compréhensive puisqu'elle prouve en même temps les résultats plus généraux trouvés ensuite par le même auteur [1].

Nous terminons en traitant quelques exemples simples : le premier illustre à la fois la théorie exposée au premier Chapitre, celle des systèmes canoniques de M. Riquier et celle des chaînes de systèmes de M. Hilbert; le second est intéressant au point de vue de cette dernière théorie; le troisième enfin indique comment se présentent les cas singuliers qui échappent aux méthodes de M. Delassus.

Nous adressons ici l'expression de notre respectueuse gratitude à M. Hadamard, qui a orienté le début de nos recherches, et à M. Goursat, qui a bien voulu nous encourager de ses précieux conseils.

CHAPITRE I.

MODULES DE MONOMES. — THÉORIE GÉNÉRALE ET APPLICATIONS.

Le mot *monome* désignera dans ce qui suit une expression de la forme $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ où les α sont des entiers positifs (sens large); $(x_1^0 x_2^0 \ldots x_n^0)$ devra être considéré comme un « monome ».

1. Théorème général sur certaines suites de monomes. — *Une suite de monomes* $M_1, M_2, \ldots$ *telle que chacun d'eux n'est multiple*

---

(1) Signalés aussi par M. Goursat pour l'équation

$$s = f(x, y, z, p, q, r, t) \quad \text{lorsque} \quad \left|\frac{\partial f}{\partial r}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|_0 < \frac{1}{4}$$

z étant donnée sur $x = 0$ et sur $y = 0$.

d'aucun des précédents ne peut comprendre qu'un nombre fini de termes.

Dans le cas d'une variable, la proposition se réduit à celle-ci : Une suite d'entiers positifs décroissants est finie.

Admettons la proposition dans le cas de $n-1$ variables, et démontrons-la pour n. Soit $M_1 = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ le premier monome de la suite donnée (S); dans un des suivants, pris arbitrairement, l'exposant d'une des variables au moins, x_i par exemple, est inférieur à l'exposant de cette variable dans M_1. Appelons (S_{ik}) la suite des monomes de (S) où x_i entre à l'exposant k exactement : $(k = 0, 1, 2, \ldots, \alpha_i - 1)$; nous obtenons ainsi $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ suites partielles, dont l'ensemble renferme (peut-être avec répétition) *tous* les monomes de (S) qui suivent M_1. Mais les termes de S_{ik} ne sont autres, au facteur près x_i^k, que des monomes à $n-1$ variables $(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ tels que chacun d'eux ne soit multiple d'aucun des précédents. Chacune de ces suites est donc finie et il en est de même de la suite donnée.

2. *Conséquences diverses.* — Il résulte du théorème précédent que d'un système quelconque, infini, de monomes, on peut en extraire un système fini (M) tel que tout monome du système donné soit multiple de l'un, au moins, des monomes (M) : il suffit, en effet, de choisir arbitrairement un monome du système donné, M_1, puis, parmi les monomes du système, un monome M_2 qui ne soit pas multiple de M_1, puis parmi les monomes du système qui ne sont multiples ni de M_1, ni de M_2, un monome M_3, etc.; la suite ainsi obtenue sera finie : tout monome du système donné sera multiple de l'un au moins des monomes ainsi obtenus $M_1, M_2, \ldots, M_p$.

On peut utiliser la proposition précédente sous différentes formes que nous allons indiquer :

Si l'on considère une *suite* infinie de monomes, à partir d'un certain rang r, on n'obtient que des multiples des monomes de rang inférieur à r.

Si l'on considère une suite quelconque de monomes de degrés non décroissants, à partir d'un certain degré p, les monomes de la suite sont des multiples de monomes de la suite de degré inférieur à p.

Une suite de *systèmes* de monomes contenant chacun des monomes

qui ne sont multiples d'aucun de ceux contenus dans les systèmes précédents est finie.

Soit $S_1 S_2 \ldots S_k \ldots$ une suite de systèmes de monomes où S_{k+1} est constitué par : 1° les monomes de S_k; 2° des monomes qui ne sont multiples d'aucun monome de S_k; une telle suite est nécessairement finie ([1]).

Si l'on considère une suite de systèmes ([2]) de monomes $E_k, E_{k+1}, \ldots$, de degrés $k, k+1, \ldots$, où E_{i+1} contient tous les monomes de degré $i+1$ multiples des monomes de E_i (quel que soit i), dès que i dépasse une certaine valeur p, E_{i+1} ne contient *que* les multiples (de degré $i+1$) de E_i.

3. *Modules de monomes.* — Nous dirons qu'un *système de monomes* forme un *module* si *tout multiple d'un de ces monomes appartient au système*. Un module est toujours constitué par les multiples d'un nombre *fini* de monomes. Nous dirons quelquefois que ces monomes forment une *base* pour le module.

L'ensemble de tous les monomes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ forme un module.

Tout ce qui précède comme ce qui suivra s'applique, au langage près, aux systèmes de dérivées d'*une* fonction.

On pourra dire qu'un système de dérivées de u forme un *module* si toute dérivée de l'une d'elles appartient au système.

Il sera utile, pour la généralité du langage, de considérer u comme une *dérivée* (d'ordre zéro).

Le système formé par la fonction et toutes ses dérivées (d'ordre $\geqq 1$) pourra être considéré comme un module.

4. *Structure d'un module. Généralités.* — Lorsqu'il n'y a qu'une lettre, x_1, un module de monomes se compose simplement des multiples de *l'un d'eux*, celui qui entre au plus bas degré dans le module. Nous allons montrer comment on peut ramener l'étude d'un module M de monomes à n lettres à l'étude d'un certain nombre (fini) de modules de monomes à *moins de n lettres*. Nous aurons donc un procédé de récurrence pour faire l'étude d'un module quelconque.

([1]) Cet énoncé sera directement utilisé plus loin (II, 12).

([2]) Cf. Delassus, *Extension du théorème de Cauchy* (*Annales de l'École Normale*, 1896).

Parmi les monomes de M, considérons ceux M_0 qui ne contiennent pas x_n; ceux $M_1, M_2, \ldots, M_\lambda$ qui contiennent x_n respectivement au premier degré, au second degré, ..., au degré λ. L'ensemble des coefficients de x_n^λ dans ceux qui contiennent x_n au degré λ forme un module M'_λ; on obtient ainsi une infinité de modules $M'_0, M'_1, \ldots, M'_\lambda, \ldots$, aux $n-1$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Quelques-uns de ces modules, au début, peuvent ne pas se présenter effectivement; mais si M'_i existe, M'_{i+1} existe également et contient *tous les monomes de* M'_i (car si $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_{n-1}^{\lambda_{n-1}}$ appartient à M'_i, $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_{n-1}^{\lambda_{n-1}} x_n^{\lambda}$ appartient à M. Il en est donc ainsi de $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_{n-1}^{\lambda_{n-1}} x_n^{\lambda+1}$, et $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_{n-1}^{\lambda_{n-1}}$ appartient à M'_{i+1}). Par suite, à partir d'un certain rang k, les modules M'_λ $(\lambda \leq k)$ sont identiques. Pour connaître la constitution du module M à n variables, il suffit de connaître celle des modules $M'_0, M'_1, \ldots, M'_k$ à $n-1$ variables.

Supposons que l'on connaisse des monomes, en nombre fini, qui puissent servir à définir ces modules, c'est-à-dire qui, multipliés (une ou plusieurs fois) par $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, donnent tous leurs monomes. Si l'on multiplie (une ou plusieurs fois) par $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ les monomes correspondants de $M_0, M_1, \ldots, M_{k-1}$, et par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les monomes correspondants de M_k, on obtient certainement *tous* les monomes de M; car, un monome de M où x_n a un exposant $\lambda < k$ s'obtient en multipliant un monome de M_λ par un monome en $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ et un monome de M où x_n a un exposant $k+i$ $(i \geq 0)$ s'obtient en multipliant un monome de M_{k+i} par un monome en $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ et par suite un monome de M_k par x_n^i et par un monome en $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

5. *Étude d'un exemple.* — Nous allons appliquer le procédé précédent à un exemple que nous traiterons complètement et qui nous fera pressentir les résultats généraux que nous avons en vue.

Considérons le module constitué par les multiples de l'un des quatre monomes

$$x_1, \quad x_1 x_2 x_3, \quad x_1 x_2 x_3 x_4, \quad x_1 x_2 x_3 x_4 x_5.$$

Les modules (à deux variables x_1, x_2) M'_0, M'_1, M'_2, M'_3 sont définis ici par les monomes

$$x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2 x_1^2 \quad \begin{vmatrix} x_1^2 \\ x_1^2 x_2^2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x_1^2 \\ x_1^2 x_2^2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x_1^2 \\ x_1^2 x_2^2 \end{vmatrix}$$

et les modules M'_4, M'_5, ... sont identiques au module M'_3. A chaque monome du module donné correspond un et un seul monome d'un module M'_7.

Pour étudier plus complètement la constitution de chacun de ces modules à deux variables, appliquons à chacun d'eux la méthode même qui vient de nous servir.

Il n'y a évidemment pas lieu de l'appliquer à M'_0, M'_1 constitués chacun par les multiples d'un seul monome x_1^7.

Les monomes multiples de l'un des deux monomes

$$x_1^7, \quad x_2^7 x_1$$

peuvent se grouper d'après l'exposant de x_2 qui y figure; l'ensemble de ceux qui ne contiennent pas x_2 sera appelé M'_{20}; l'ensemble de ceux qui contiennent x_2 au premier, au second degré, ..., au degré λ, sera appelé M'_{21}, M'_{22}, ..., $M'_{2\lambda}$.

L'ensemble des coefficients de x_2^λ dans $M'_{2\lambda}$ constituera un module à une variable x_1, que nous désignerons par $M''_{2\lambda}$. Les modules à une variable M''_{21}, M''_{22}, M''_{23} sont définis ici par les monomes

$$x_1^\lambda, \quad x_2^\lambda x_1^\lambda.$$

Les modules M''_{23}, M''_{24}, ... sont identiques au module M''_{22}.

De même, en appelant $M'_{3\lambda}$ l'ensemble de ceux des monomes du module M'_3 qui contiennent x_2 à l'exposant λ, et $M''_{3\lambda}$ le module (à une variable x_1) constitué par les coefficients de x_2^λ dans ces monomes, M''_{30}, M''_{31}, M''_{32} seront définis par les monomes

$$x_1^\lambda, \quad x_2^\lambda x_1^\lambda$$

M''_{33}, M''_{34}, ... étant identiques à M''_{32}.

Le procédé précédent a mis en évidence certains monomes M du module (¹) primitif, à savoir :

$$\begin{array}{lll} [illegible] & [illegible] & [illegible] \\ & [illegible] & [illegible] \\ & [illegible] & [illegible] \end{array}$$

(¹) La lettre M désigne donc dans ce qui suit les *monomes du présent Tableau*, et non plus, comme au n° **4**, le *module* lui-même.

qui suffisent évidemment à définir ce module puisqu'ils contiennent tous les monomes dont nous sommes partis, mais qui jouissent de plus des propriétés suivantes :

On obtient tous les monomes du module où x_3 intervient au degré $i (i = 0, 1, 2)$, et ceux-là seulement, en multipliant tous les monomes M où x_3 a le degré i par tous les monomes en x_1, x_2.

On obtient tous les monomes du module où x_3 intervient à un degré $\geqq 3$ en multipliant tous les monomes M où x_3 a le degré 3 par tous les monomes en x_1, x_2, x_3.

On peut aller plus loin, et dire :

On obtient tous les monomes du module où, x_3 intervenant au deuxième degré, x_2 intervient au degré $j (j = 0, 1)$, et ceux-là seulement, en multipliant le monome M où x_3 intervient au degré 2, et x_2 au degré j, par tous les monomes en x_1.

On obtient tous les monomes du module où, x_3 intervenant au deuxième degré, x_2 intervient à un degré $\geqq 2$ en multipliant le monome M où x_3 a le degré 2 et x_2 le degré 2 par tous les monomes en x_1, x_2.

On obtient tous les monomes du module où, x_3 intervenant à un degré $\geqq 3$, x_2 intervient au degré $k (k = 0, 1)$, et ceux-là seulement, en multipliant le monome M où x_3, intervenant au degré 3, x_2 intervient au degré k, par tous les monomes en x_1, x_3.

On obtient tous les monomes du module où, x_3 intervenant à un degré $\geqq 3$, x_2 intervient à un degré $\geqq 2$, en multipliant le monome M, où x_3 a le degré 3 et x_2 le degré 2, par tous les monomes en x_1, x_2, x_3.

En résumé, on obtient, sans omission ni répétition, tous les monomes du module donné en multipliant :

$$(\mathrm{M}) \quad \left\{ \begin{array}{lll} x_3^3 x_2^3 x_1^2 & \text{par tous les monomes en} & x_1, x_2, x_3; \\ x_3^2 x_2^2 x_1^2 & \quad » & x_1, x_2; \\ x_3^2 x_1^2 & \quad » & x_1, x_3; \\ x_3^2 x_2^2 x_1^2 & \quad » & x_1, x_2; \\ x_3^2 x_2 x_1^2 & \quad » & x_1; \\ x_3^2 x_1^2 & \quad » & x_1, \\ x_2 x_1^2 & \quad » & x_1, x_2; \\ x_1^2 & \quad » & x_1, x_2; \end{array} \right.$$

A chaque monome M du Tableau précédent, nous faisons ainsi « correspondre » certaines variables x, celles qui se trouvent dans la seconde colonne, sur la même ligne que M.

Faisons, dès maintenant, au sujet des monomes M, les remarques suivantes, qui seront généralisées plus loin [1] :

Le produit par x_3 d'un monome $\overline{M}$ (où l'exposant λ de x_3 est inférieur à 3) est identique au produit d'un monome M plus haut que $\overline{M}$ par un monome ne contenant que les variables correspondant à $\overline{M}$.

Le produit par x_2 d'un monome $\overline{M}$ (où l'exposant de x_2 est inférieur à 2 pour ceux qui contiennent x_3 au deuxième degré, où il est inférieur à 2 pour ceux qui contiennent x_3 au troisième degré) est identique au produit d'un monome M plus haut que $\overline{M}$ par un monome ne contenant que les variables correspondant à M.

6. *Suite de l'étude précédente. Répartition en classes des monomes qui ne font pas partie du module.* — Nous avons réparti tous les monomes du module défini par les monomes donnés en un nombre fini de classes sans éléments communs, les monomes de chaque classe s'obtenant en multipliant un monome déterminé par tous les monomes que l'on peut former avec certaines variables déterminées.

On peut répartir tous les monomes ($\mathfrak{M}$) *qui ne font pas partie du module* en un nombre fini de classes de même nature.

Les monomes ($\mathfrak{M}$) qui ne contiennent pas x_1 contiennent x_1 au degré 0, 1, 2, ... ou 6. Ce sont les monomes en x_2 seul, les produits de x_1 par les monomes en x_2, ..., les produits de x_1^6 par les monomes en x_2.

Les monomes ($\mathfrak{M}$) qui contiennent x_3 au premier degré sont constitués d'une manière analogue; ce sont les produits de x_3, x_3x_1, ..., $x_3x_1^6$, par les monomes en x_2.

Les monomes ($\mathfrak{M}$) qui contiennent x_3 au deuxième degré se répartissent tout d'abord en trois groupes suivant que l'exposant de x_2 y est 0, 1 ou bien égal ou supérieur à 2. Le premier est constitué par les seuls monomes x_3^2, $x_3^2x_1$, ..., $x_3^2x_1^6$. Le second par les monomes $x_3^2x_2$, $x_3^2x_2x_1$, ..., $x_3^2x_2x_1^6$. Dans le troisième, l'exposant de x_1 est

[1] Nous employons les notations M, $\overline{M}$ pour désigner des monomes M particuliers.

nécessairement inférieur à 4; et les diverses classes sont constituées par les produits de $x_3^2x_2^2$, $x_3^2x_2^2x_1$, $x_3^2x_2^2x_1^2$, $x_3^2x_2^2x_1^3$ par tous les monomes en x_2.

Les monomes ($\mathfrak{M}$) qui contiennent x_3 à un degré égal ou supérieur à 3 se répartissent d'abord en trois groupes suivant que l'exposant de x_2 y est 0, 1, ou bien égal ou supérieur à 2.

Le premier est constitué par les produits des monomes x_3^3, $x_3^3x_1$, ..., $x_3^3x_1^4$ par tous les monomes en x_3. Le second par les produits des monomes $x_3^3x_2$, $x_3^3x_2x_1$, ..., $x_3^3x_2x_1^4$ par tous les monomes en x_3. Le troisième par les produits des monomes $x_3^3x_2^2$, $x_3^3x_2^2x_1$ par tous les monomes en x_3, x_2.

En résumé, nous obtenons, sans omission ni répétition, tous les monomes ($\mathfrak{M}$) en multipliant :

$$
(\mathrm{N})\left\{
\begin{array}{ll}
1,\ x_1,\ \ldots,\ x_1^6 & \\
x_3,\ x_3x_1,\ \ldots,\ x_3x_1^6 & \text{par tous les monomes en } x_3; \\
x_3^2,\ x_3^2x_1,\ \ldots,\ x_3^2x_1^6 & \\
x_3^2x_2,\ x_3^2x_2x_1,\ \ldots,\ x_3^2x_2x_1^6 & \text{par } 1; \\
x_3^2x_2^2,\ x_3^2x_2^2x_1,\ x_3^2x_2^2x_1^2,\ x_3^2x_2^2x_1^3 & \text{par tous les monomes en } x_3; \\
x_3^3,\ x_3^3x_1,\ \ldots,\ x_3^3x_1^4 & \\
x_3^3x_2,\ x_3^3x_2x_1,\ \ldots,\ x_3^3x_2x_1^4 & \text{par tous les monomes en } x_3; \\
x_3^3x_2^2,\ x_3^3x_2^2x_1 & \text{par tous les monomes en } x_3, x_2.
\end{array}
\right.
$$

La théorie générale qui suit, préparée par les numéros précédents, en est logiquement indépendante ; en particulier, elle ne nécessite pas la connaissance du théorème initial.

7. *Systèmes de monomes. Variables multiplicatrices; classes.* — Considérons un système formé d'un nombre fini de monomes, tous différents; nous désignerons l'un quelconque de ces monomes par la lettre M.

Soient $x_n^{\alpha_n}x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\ldots x_1^{\alpha_1}$ l'un d'eux; j un des indices $1, 2, \ldots, n$. On examinera si, parmi ceux des monomes M où $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{j+1}$ figurent avec les exposants $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_{j+1}$ exactement, il y en a où x_j figure avec un exposant supérieur à α_j; s'il n'y en a pas (et en particulier s'il n'y a pas d'autre monome M où $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{j+1}$ figurent avec les exposants $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_{j+1}$), nous dirons que x_j est *variable multi-*

plicatrice pour $x_n^{\alpha_n} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots x_1^{\alpha_1}$ dans le système des monomes M donnés.

[Dans le cas $j = n$, on examinera si, parmi les monomes M, il y en a où x_n figure avec un exposant supérieur à α_n; s'il n'y en a pas (et en particulier si le monome $x_n^{\alpha_n} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots x_1^{\alpha_1}$ constitue à lui seul le système donné), nous dirons que x_n est variable multiplicatrice pour $x_n^{\alpha_n} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots x_1^{\alpha_1}$ dans le système des monomes M donnés.]

De cette définition résulte immédiatement la remarque suivante :

Considérons ceux des monomes M où $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{k+1}$ figurent avec les exposants $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_{k+1}$ exactement; divisons-les par $x_n^{\alpha_n} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots x_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$; soit Q les quotients ainsi obtenus. Celles des variables $x_1, x_2, \ldots, x_k$ qui sont multiplicatrices pour $x_n^{\alpha_n} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots x_1^{\alpha_1}$ dans le système (M) sont précisément celles des variables $x_1, x_2, \ldots, x_k$ qui sont multiplicatrices pour $x_k^{\alpha_k} x_{k-1}^{\alpha_{k-1}} \ldots x_1^{\alpha_1}$ dans le système (Q) (aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_k$).

En particulier, considérons ceux des monomes (M) où x_n figure avec un exposant donné α_n; divisons-les par $x_n^{\alpha_n}$, soit Q les quotients ainsi obtenus; si α_n n'a pas sa valeur maxima, *les variables multiplicatrices* de $x_n^{\alpha_n} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots x_1^{\alpha_1}$ dans le système (M) sont précisément les variables multiplicatrices de $x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots x_1^{\alpha_1}$ dans le système (Q) (aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$). Si α_n a sa valeur maxima, les variables multiplicatrices de $x_n^{\alpha_n} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots x_1^{\alpha_1}$ dans le système (M) sont : 1° x_n; 2° les variables multiplicatrices de $x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots x_1^{\alpha_1}$ dans le système (Q) (aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$).

Soit un monome M particulier; faisons le produit de M par un quelconque des monomes que l'on peut former avec ses variables multiplicatrices; les produits ainsi obtenus (en y comprenant M lui-même $= M \times 1$) formeront la classe ($\mathfrak{M}$) correspondant à M dans le système donné (si M n'admet pas de variable multiplicatrice, la classe $\mathfrak{M}$ se réduit à M lui-même). Nous définissons ainsi autant de classes qu'il y a de monomes M.

Deux classes différentes n'ont aucun élément commun. — La proposition est vraie lorsque les M sont des « monomes » à une seule variable x_1; en effet, en désignant par a le plus grand des exposants de x_1, tout monome M, sauf x_1^a, constitue à lui seul sa classe, et la

classe de x_1^α est constituée par tous les monomes $x_1^{\alpha+\lambda}$ où $\lambda \geq 0$. Admettons que la proposition soit vraie pour tout système de monomes à $n-1$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$; montrons qu'elle est vraie pour tout système de monomes M à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Considérons deux monomes $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ obtenus en multipliant deux monomes M différents, M_1, M_2, respectivement par un certain nombre de leurs variables multiplicatrices. Si M_1, M_2 ont des *degrés différents* en x_n, x_n n'est multiplicatrice que pour l'un d'eux *au plus;* si x_n n'est multiplicatrice ni pour l'un ni pour l'autre, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ ont respectivement les mêmes degrés en x_n que M_1, M_2; si x_n est multiplicatrice pour M_1 et non pour M_2, le degré en x_n de $\mathfrak{M}_1$ est supérieur (et non égal) au degré en x_n de $\mathfrak{M}_2$. $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ sont donc certainement différents. Si M_1, M_2 ont *même degré* λ en x_n, considérons ceux des M où x_n figure avec l'exposant λ; soient Q leurs quotients par x_n^λ. Supposons $\lambda \leq a$, maximum des degrés de x_n dans les M; les variables multiplicatrices de M_1, M_2 dans le système M sont les mêmes que les variables multiplicatrices des monomes correspondants Q_1, Q_2 dans le système Q aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$; les monomes $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ ne diffèrent que par le facteur x_n^λ des monomes correspondants $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$ provenant de Q_1, Q_2; $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$ étant différents, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ sont différents. Supposons que M_1, M_2 aient tous deux pour degré en x_n le degré maximum de x_n dans les M, a; les variables multiplicatrices de M_1, M_2 dans le système M sont : 1° x_n; 2° les variables multiplicatrices des monomes correspondants Q_1, Q_2 dans le système Q (aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$). Si $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ ont été obtenus en multipliant M_1, M_2 par des monomes de degrés (en x_n) différents, ils sont certainement différents; s'ils ont été obtenus en multipliant M_1, M_2 par des monomes de même degré μ en x_n, ils ne diffèrent que par le facteur $x_n^{a-\mu}$ de deux monomes $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$ provenant de Q_1 Q_2 dans le système Q; $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$ étant différents, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ sont différents.

8. *Systèmes complets. Condition nécessaire et suffisante pour qu'un système soit complet.* — Les monomes $\mathfrak{M}$ font partie du module défini par les M. Nous allons donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble des monomes $\mathfrak{M}$ coïncide avec l'ensemble des monomes du module M, autrement dit pour que tout multiple d'un M fasse partie d'une classe $\mathfrak{M}$.

Multiplions un monome M quelconque par une quelconque de ses variables non multiplicatrices; il est *nécessaire* que tous les produits ainsi obtenus fassent partie des $\mathfrak{M}$. Je dis que cette condition est *suffisante*.

Si le produit d'un monome M *quelconque par une quelconque de ses variables non multiplicatrices est contenu dans les* ($\mathfrak{M}$), *tout multiple d'un* M *est contenu dans les* ($\mathfrak{M}$).

La proposition est vraie lorsque les M sont des monomes à une variable x_1. Supposons que le produit par x_1 de tout M où x_1 n'a pas son exposant maximum a fasse partie d'une classe $\mathfrak{M}$; il en résulte que si x_1^a (ou x_1^{a-1}) figure parmi les M, x_1^{a+1} figure aussi parmi les M (puisque les seuls $\mathfrak{M}$ qui ne soient pas des M ont des exposants supérieurs à a); si b est le minimum des exposants de x_1 dans les M, x_1^b, x_1^{b+1}, ..., x_1^{b+a-1} sont des monomes M; tout monome de degré supérieur ou égal à b fait donc partie d'une classe $\mathfrak{M}$.

Admettons que la proposition soit vraie pour tout système de monomes à $n-1$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$; montrons qu'elle est vraie pour tout système de monomes M à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Considérons ceux des monomes M donnés où x_n a un exposant déterminé λ : M_λ et leurs quotients par x_n^λ : Q_λ; celles des variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, qui sont multiplicatrices pour un (1) des monomes M_λ dans le système donné (M) sont précisément celles de ces variables qui sont multiplicatrices pour son quotient par x_n^λ dans le système des Q_λ; toute classe $\mathfrak{M}_\lambda$ contient donc les produits par x_n^λ des monomes $\overline{Q}$ de la classe correspondant à ce quotient $\overline{Q_\lambda}$ dans le système des Q_λ. Si le produit d'un $\overline{M}$ quelconque par une $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ non multiplicatrice pour cet M_λ fait partie d'une classe $\mathfrak{M}_\lambda$, on voit que le produit de $\overline{Q_\lambda} = \frac{\overline{M}}{x_n^\lambda}$ par une $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ non multiplicatrice pour ce $\overline{Q_\lambda}$ dans le système des Q_λ fait partie d'une classe $\mathfrak{Q}_\lambda$; d'après la proposition admise, il en résulte que le produit d'un Q_λ quelconque par un monome quelconque en $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ fait partie

(1) Nous emploierons souvent dans ce qui suit la notation $\overline{M}$, ou $\overline{M}$, pour désigner un monome M particulier; la notation $\mathfrak{M}$, $\overline{\mathfrak{M}}$ pour désigner une classe $\mathfrak{M}$ particulière, etc.

d'une classe $\mathfrak{p}$; donc le produit d'un M quelconque par un monome quelconque en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fait partie d'une classe $\mathfrak{M}$. Remarquons que le produit par un monome quelconque en $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ de tout monome $\mathfrak{M}$ où l'exposant de x_n n'est pas supérieur à sa valeur maxima dans les (M) fait partie d'une classe ($\mathfrak{M}$); car le monome $\mathfrak{M}$ considéré est le produit d'un M par un monome où peuvent figurer $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, mais non x_n.

Admettons que le produit de tout monome M par tout monome dont le degré en x_n est ρ fasse partie des ($\mathfrak{M}$); nous allons démontrer qu'il en est encore ainsi lorsque ce degré est $\rho + 1$.

Le produit d'un M par un monome de degré $\rho + 1$ en x_n peut, d'après l'hypothèse, être considéré comme le produit d'un ($\mathfrak{M}$) par x_n.

Si le degré en x_n du monome $\mathfrak{M}$ considéré, $\overline{\mathfrak{M}}$, est inférieur à a, maximum du degré de x_n dans les (M), ce monome $\overline{\mathfrak{M}}$ fait partie d'une classe où x_n n'est pas variable multiplicatrice; soit M le monome auquel correspond cette classe; $x_n\overline{\mathrm{M}}$ est un $\mathfrak{M}$ de degré (en x_n) au plus égal à a; donc $x_n\mathfrak{M}$, qui est égal au produit de $x_n\mathrm{M}$ par un monome ne renfermant pas x_n, est encore un $\mathfrak{M}$ (remarque faite plus haut). Si le degré en x_n du monome $\overline{\mathfrak{M}}$ est supérieur ou égal à a, $\overline{\mathfrak{M}}$ fait partie d'une classe où x_n est variable multiplicatrice, $x_n\overline{\mathfrak{M}}$ fait partie de la même classe.

Ce qui précède suffit à prouver que le produit de tout monome du système par un monome quelconque en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fait partie d'une classe $\mathfrak{M}$.

Si tous les produits obtenus en multipliant un quelconque des monomes M par une quelconque de ses variables non multiplicatrices font partie des ($\mathfrak{M}$), nous dirons que le système (M) est *complet*. Nous venons de démontrer que :

Lorsqu'un système de monomes (M) *est complet, tout multiple d'un* M *appartient à une classe* ($\mathfrak{M}$) *et à une seule* (propriété I).

Tous les monomes du *module défini par les* M se trouvent répartis en un *nombre fini* de classes *sans éléments communs*, les monomes de chaque classe s'obtenant en multipliant un monome déterminé par tous les monomes que l'on peut former avec certaines variables déterminées.

9. *Procédé régulier pour obtenir un système complet base d'un module donné.* — Soit $M^{(1)}$ un système quelconque de monomes donnés; si $M^{(1)}$ est incomplet, formons le produit d'un monome $\overline{M^{(1)}}$, par une quelconque de ses variables non multiplicatrices; adjoignons aux $M^{(1)}$ ceux de ces produits qui ne font pas partie des $\mathfrak{M}^{(1)}$. Soit $M^{(2)}$ le système ainsi formé; si ce système $M^{(2)}$ est incomplet, opérons sur lui comme nous avons opéré sur $M^{(1)}$, ... et ainsi de suite.

Je dis que cette série d'opérations ne pourra se prolonger indéfiniment : autrement dit, *au bout d'un nombre fini d'opérations* on obtiendra *un système complet.*

Nous démontrerons une proposition un peu plus générale. *Soient* $M^{(1)}$, P *deux systèmes quelconques de monomes donnés en nombre fini; formons le produit d'un monome* $M^{(1)}$ *par une quelconque de ses variables non multiplicatrices dans* $M^{(1)}$. *Adjoignons au système* $M^{(1)}$: 1° *tous ceux de ces produits qui ne font pas partie des* $\mathfrak{M}^{(1)}$ (*classes des* $M^{(1)}$ *dans le système* $M^{(1)}$); 2° *ceux des monomes* P *qui ne font pas partie des* $\mathfrak{M}^{(1)}$. Soient A(P) cette opération, et $M^{(2)}$ le système ainsi obtenu. Effectuons sur $M^{(2)}$ l'opération A(P); soit $M^{(3)}$ le système obtenu.... Cette série d'opérations « ne pourra se prolonger indéfiniment » (¹), ou, plus correctement :

Il existe un nombre entier K *tel que :* 1° $M^{(i)}$ *est différent de* $M^{(i-1)}$ *quand* $i \leq K$; 2° $M^{(i)}$ *est identique à* $M^{(K)}$ *lorsque* $i \geq K$.

La proposition est presque évidente pour les systèmes de monomes à une variable. Chaque système $M^{(i)}$, P est défini par le système des exposants de x_1 qui y entrent. Soit a l'exposant maximum dans $M^{(1)}$, c'est aussi l'exposant maximum dans $M^{(2)}$, $M^{(3)}$, ... Soit b l'exposant

---

(¹) Il peut se faire que tous les P fassent partie des $\mathfrak{M}^{(1)}$, mais qu'ils ne fassent plus tous partie des $\mathfrak{M}^{(2)}$. Prenons pour monomes $M^{(1)}$ les deux monomes $x_1^2 x_2 x_3$, $x_3^2 x_2^3$ et pour monome P $x_1 x_2 x_3$. P est le produit de $x_1^2 x_2 x_3$ par la variable multiplicatrice x_1.

Le système $M^{(2)}$ est ici constitué par $x_1^3 x_2^2$, $x_1^2 x_2 x_3$, $x_1^3 x_3^2$ dont les variables multiplicatrices sont respectivement (x_1, x_2, x_3), (x_2, x_3), (x_3, x_1) ; P ne fait partie d'aucune classe $\mathfrak{M}^{(2)}$.

Si tous les P font partie des $\mathfrak{M}^{(1)}$ *et si* $M^{(1)}$ *est un système complet*, $M^{(2)}$ est identique à $M^{(1)}$, tous les P font partie des $\mathfrak{M}^{(2)}$ qui ne sont autres que les $\mathfrak{M}^{(1)}$.

minimum dans $(M^{(1)}, P)$; c'est l'exposant minimum dans M^{2}, donc dans $(M^{(2)}, P)$ et, par suite, dans $M^{(3)}$, $M^{(4)}$, ... Si M^{2} est identique à M^{1}, M^{i} est identique à M^{1} quel que soit i. Supposons M^{2} différent de M^{1}; M^{2}, M^{3}, M^{4}, ... sont caractérisés chacun par un système d'entiers compris entre a, b (sens large), chacun de ces systèmes comprenant le précédent; il y a au plus $a-b$ systèmes M^{2}, M^{3}, ... différents.

Admettons la proposition dans le cas des systèmes à $n-1$ variables et démontrons-la pour des systèmes quelconques (M^{1}, P) à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Dans cette démonstration, nous appellerons, pour abréger, degré d'un monome, son degré en x_n.

Soit b le minimum des degrés des $M^{(1)}$, on peut supposer [1] qu'il n'y a pas de monome P dont le degré soit inférieur à b. Le minimum des degrés de $M^{(i)}$ est b quel que soit i.

Soit a le maximum des degrés des $(M^{(1)}, P)$.

L'opération $A(P)$ n'introduit aucun monome dont le degré soit supérieur à a. Le maximum des degrés des (M^{i}, P) est toujours a quel que soit i. Dans le système $M^{(i)}$ considérons les monomes M^{i} de degré $b+h$ $(h = 0, 1, 2, \ldots, a-b)$: soient Q^{i}_{b+h} les quotients par x_n^{b+h} des M^{i}_{b+h}.

Soient de même R_{b+h} les quotients des P de degré $b+h$ par x_n^{b+h} $(h = 0, 1, 2, \ldots, a-b)$. (Pour certaines valeurs de h, il peut se faire qu'il n'y ait pas de Q^{i}_{b+h} ou de R_{b+h}.)

Les monomes de degré b que l'opération $A(P)$ adjoint à $M^{(1)}$ sont : 1° ceux des produits des $x_n^{h}Q^{1}_{b}$ par leurs variables non multiplicatrices (prises parmi les $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$), qui ne font pas partie des classes des $x_n^{h}Q^{1}_{b}$; 2° ceux des $x_n^{h}R_b$ qui ne font pas partie de ces classes. Par suite, Q^{2}_{b} s'obtient en effectuant sur Q^{1}_{b} l'opération $A(R_b)$ ($n-1$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$). Au bout d'un nombre fini d'opérations $A(P)$, on pourra affirmer : 1° le système Q_b est complet; 2° tout R_b fait partie d'une classe $\mathfrak{Q}_b$. Soit $M^{(0)}$ le premier système obtenu qui jouisse de cette propriété.

---

[1] Car si, en général, b est le minimum des degrés des $(M^{(i)}, P)$, b est le minimum des degrés des M^{2}, et l'on opérera sur M^{2} comme on opère dans le texte pour $M^{(1)}$.

Envisageons maintenant parmi les systèmes $M^{(\mu)}$ et suivants un système $M^{(\lambda)}$ ayant les propriétés suivantes (I) :

$Q_b^{(\lambda)}$ est complet : tout monome R_b fait partie des $\mathfrak{Q}_b^{(\lambda)}$;

$Q_{b+1}^{(\lambda)}$ est complet : tout monome R_{b+1} et tout monome $Q_b^{(\lambda)}$ fait partie des $\mathfrak{Q}_{b+1}^{(\lambda)}$;

. . . . . ;

$Q_{b+\lambda}^{(\lambda)}$ est complet : tout monome $R_{b+\lambda}$ et tout monome $Q_{b+\lambda-1}^{(\lambda)}$ fait partie des $\mathfrak{Q}_{b+\lambda}^{(\lambda)}$.

(Remarquons que $Q_b^{(\lambda)}$ contient effectivement des monomes puisqu'il est identique au système $Q_b^{(0)}$; des propriétés que l'on vient d'énoncer, il résulte que $Q_{b+1}^{(\lambda)}$, $Q_{b+2}^{(\lambda)}$, ..., $Q_{b+\lambda}^{(\lambda)}$ contiennent effectivement des monomes.)

Nous supposerons de plus (II) que :

Ou bien (1re hypothèse) $M^{(\lambda)}$ ne contient pas de monome de degré supérieur à $b+\lambda$ et P contient au moins un monome n'appartenant pas aux $\mathfrak{M}^{(\lambda)}$;

Ou bien (2e hypothèse) $M^{(\lambda)}$ contient effectivement un monome au moins de degré supérieur à $b+\lambda$, et l'opération $A(R_{b+\lambda+1}, Q_{b+\lambda}^{(\lambda)})$ effectuée sur $Q_{b+\lambda+1}^{(\lambda)}$ lui adjoint effectivement un monome au moins.

Si l'on excluait l'une et l'autre de ces hypothèses, il faudrait supposer, ou bien que l'opération A(P) effectuée sur $M^{(\lambda)}$ reproduit ce système, et la propriété à démontrer se trouverait vérifiée d'elle-même, ou bien que le système $M^{(\lambda)}$ a les propriétés (I) *jusqu'à la valeur* $\lambda+1$ *de l'indice :* dans ce cas, on substituera $\lambda+1$ à λ dans l'énoncé de ces propriétés ; on raisonnera à nouveau de même sur le système M envisagé, appelé cette fois $M^{(\lambda+1)}$; λ ne pouvant en tout cas dépasser $a-b$, ce mode de raisonnement ne pourra s'employer qu'un nombre limité de fois et, ou bien la propriété à démontrer sera vérifiée d'elle-même, ou bien on aura l'une ou l'autre des propriétés supposées (II).

Dans la première hypothèse, d'après les propriétés de $M^{(\lambda)}$, les monomes introduits par l'opération A(P) sont de degrés supérieurs à $b+\lambda$.

Dans la seconde, l'opération A(P) effectuée une ou plusieurs fois sur $M^{(\lambda)}$ donne des systèmes M tels que Q_b, Q_{b+1}, ..., $Q_{b+\lambda}$ soient identiques à $Q_b^{(\lambda)}$, $Q_{b+1}^{(\lambda)}$, ..., $Q_{b+\lambda}^{(\lambda)}$; $Q_{b+\lambda+1}$ se déduira de $Q_{b+\lambda}$ en effec-

tuant sur ce système l'opération $A(R_{b+\lambda+1}, Q^{i}_{b+\lambda+1})$. Au bout d'un nombre fini d'opérations, $Q^{i+1}_{b+\lambda+1}$ sera identique à $Q^{i}_{b+\lambda+1}$; autrement dit, on obtiendra un système possédant les mêmes propriétés (I) que le système primitif, λ étant remplacé par $\lambda + 1$.

Dans l'une et l'autre hypothèse, on sera ramené à un système de la même forme que celui d'où l'on est parti (I), où soit λ, soit le degré maximum des M a augmenté d'une unité (au moins).

Mais on ne peut faire qu'un nombre fini de pas de l'une quelconque des deux sortes que nous venons de décrire, puisque le degré maximum des M ne peut dépasser a, et que λ ne peut dépasser $a - b$.

Autrement dit, au bout d'un nombre fini d'opérations, on obtiendra un système M identique au précédent.

Étant donné un système de monomes quelconque M, nous sommes en possession d'*un procédé régulier*, pour obtenir un système *complet* définissant le *même module;* et par suite pour répartir tous les monomes du module défini par les M en un nombre fini de classes sans éléments communs, les monomes de chaque classe s'obtenant en multipliant un monome déterminé par tous les monomes que l'on peut former avec certaines variables déterminées.

10. *Hauteur d'un monome. Théorème faisant intervenir cette notion.* — Revenons à un système de monomes M différents quelconques. Posons la définition suivante : $M = x_n^{\alpha_n} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots x_1^{\alpha_1}$ est dit plus *haut* ou plus *bas* que $M' = x_n^{\alpha'_n} x_{n-1}^{\alpha'_{n-1}} \ldots x_1^{\alpha'_1}$ suivant que la première des différences $\alpha_n - \alpha'_n, \alpha_{n-1} - \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1 - \alpha_1$ qui ne s'annule pas est positive ou négative [1]; la classe $(\overline{\mathfrak{M}})$ est plus haute ou plus basse que la classe $(\overline{\mathfrak{M}'})$ suivant que M est plus haut ou plus bas que M'.

Montrons que :

Le produit d'un monome d'une classe $\overline{\mathfrak{M}}$ *par une variable non multiplicatrice pour le monome* $\overline{M}$ *auquel correspond* $\overline{\mathfrak{M}}$ *(s'il appartient à une classe* $\overline{\mathfrak{M}}$*) ne peut appartenir qu'à une classe plus haute que* $\overline{\mathfrak{M}}$ (et non pas à la même ou à une classe plus basse).

---

[1] Il est bien connu que cette définition est *légitime* : si M est plus haut que M', et M' plus haut que M'', M est plus haut que M''.

La proposition est évidente dans le cas de monomes à une variable. Admettons-la pour les monomes à $n-1$ variables et démontrons-la pour les monomes à n variables.

Considérons le produit d'un monome $\mathfrak{M}$ de la classe de $\overline{M}$ par une variable x_i non multiplicatrice (dans le système M) pour le monome $\overline{M}$. Si $i=n$, la proposition est évidente puisque d'une part l'exposant de x_i dans le produit considéré est supérieur à l'exposant λ de x_n dans $\overline{M}$, et que d'autre part les $\overline{\mathfrak{M}}$ provenant de $\overline{M}$ et des monomes plus bas sont au plus de degré λ en x_n. Supposons $i \neq n$ et soit λ le degré en x_n du monome considéré $\overline{M}_i$; λ peut être ici inférieur ou *égal* à a exposant maximum de x_n dans les (M).

Si $\lambda \neq a$, M_i a mêmes variables multiplicatrices dans (M) que son quotient Q_λ par x_n^λ dans le système (Q_λ) (quotients par x_n^λ de tous les M qui contiennent x_n à l'exposant λ). Le produit $x_i\overline{\mathfrak{M}}$ considéré dont le degré en x_n est $\lambda < a$ ne peut provenir que d'une classe correspondant à un M de degré λ en x_n; il ne peut donc faire partie d'une classe $\mathfrak{M}$ qu'en étant le produit par x_n^λ d'un monome d'une classe $\mathfrak{Q}_\lambda$ du système Q_λ; il n'en est ainsi que si le produit $x_i\mathfrak{Q}$ fait partie d'une classe $\mathfrak{Q}_\lambda$; mais d'après le théorème admis dans le cas de $n-1$ variables, cette classe $\mathfrak{Q}_\lambda$ est alors plus haute que $\mathfrak{Q}$; la classe $\mathfrak{M}_\lambda$ correspondante est donc aussi plus haute que $\mathfrak{M}$.

Si $\lambda = a$, soit $a+a'$ le degré en x_n du monome $\overline{\mathfrak{M}}$ considéré ($a' \geq 0$). M_a monome dont il provient a pour variables multiplicatrices, outre x_n, celles qui sont multiplicatrices pour son quotient $\overline{Q}_a$ par x_n^a dans le système des (Q_a) (quotients par x_n^a de tous les M qui contiennent x_n à l'exposant a). Le produit $x_i\overline{\mathfrak{M}}$ considéré, dont le degré en x_n est $\geq a$, ne peut provenir que d'une classe correspondant à un M de degré a en x_n; il ne peut donc faire partie d'une classe $\mathfrak{M}$ qu'en étant le produit par $x_n^{a+a'}$ d'un monome d'une classe $\mathfrak{Q}_a$ du système Q_a; il n'en est ainsi que si le produit $x_i\mathfrak{Q}$ fait partie d'une classe $\mathfrak{Q}_a$; mais d'après le théorème admis dans le cas de $n-1$ variables, cette classe $\mathfrak{Q}_a$ est alors plus haute que $\mathfrak{Q}$, et la classe $\mathfrak{M}_a$ correspondante est plus haute que $\overline{\mathfrak{M}}$.

Si le système M est complet, on pourra affirmer :

Tout produit d'un monome d'une classe $\overline{\mathfrak{M}}$ *par une variable non multiplicatrice pour le monome* $\overline{\mathrm{M}}$ *auquel elle correspond fait partie d'une classe* $\mathfrak{M}$ *plus haute que* $\overline{\mathfrak{M}}$ (propriété II).

On démontrera d'une manière analogue la proposition suivante, que nous n'utiliserons pas :

Le produit d'un monome $\overline{\mathrm{M}}$ d'un système complet par une variable non multiplicatrice de $\overline{\mathrm{M}}$, x_i, est égal au produit d'un M par des variables multiplicatrices de cet M, *d'indices inférieurs à* i.

On peut d'ailleurs énoncer une réciproque qui permettrait de donner une nouvelle définition des systèmes complets :

Si le produit de tout monome $\overline{\mathrm{M}}$ d'un système par une variable non multiplicatrice pour ce monome, x_i, est égal au produit d'un M par des variables d'indices inférieurs à i, le système M est complet.

11. *Remarques diverses.* — Dans tout système de monomes M, il existe un monome, et un seul, dont les variables multiplicatrices sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$; le monome M *le plus haut*.

Un système de monomes peut être complet pour un classement déterminé des variables et ne pas l'être pour un autre classement.

Un système de monomes du premier ordre est toujours complet quel que soit le classement adopté; il suffit de montrer qu'un système composé d'un certain nombre des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ seules, est complet pour le classement particulier donné $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

En se reportant à la définition, on voit que :

Les variables multiplicatrices d'un monome x_i du système sont : 1° tous les x_k où $k \leqq i$; 2° parmi les x_k où $k > i$ ceux qui ne figurent pas dans le système donné.

La classe correspondant à chaque monome x_i a donc une définition très simple.

Montrons que tout multiple m d'un monome du système appartient à une de ces classes.

Parmi les variables que contient m figure au moins un des monomes donnés; soit h le plus grand des indices des variables de

cette espèce; x_h admet pour variables multiplicatrices toutes les variables qui figurent dans le monome donné, car ce monome ne contient pas de variables d'indice supérieur à h figurant dans le système.

Soit M un système de monomes; $M_b, M_{b+1}, \ldots, M_a$ les monomes M répartis d'après leur degré en x_n, b, $b+1, \ldots, a$; $Q_b, Q_{b+1}, \ldots, Q_a$ les quotients des $M_b, M_{b+1}, \ldots, M_a$ respectivement par $x_n, x_n^{-1}, \ldots, x_n^{-}$.

De la définition même d'un système complet, résulte l'énoncé suivant :

« Pour que le système M soit complet, il faut et il suffit que les systèmes $Q_b, Q_{b+1}, \ldots, Q_a$ (à $n-1$ variables) soient complets et que tout monome $Q_c (b \leq c < a)$ fasse partie d'une classe $\mathfrak{Q}_{c+1}$. »

Montrons que le système formé par tous les monomes d'ordre [1] p en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est complet. Admettons la proposition dans le cas de $n-1$ variables. Soient M les monomes d'ordre p aux n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

$Q_0, Q_1, \ldots, Q_p$ sont précisément tous les monomes d'ordre p, $p-1, \ldots, 0$ en $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$; ils sont complets et tout Q_i $(0 < i < p)$ fait partie du module Q_{i+1}, et est par suite contenu dans une classe $\mathfrak{Q}_{i+1}$.

Adoptons la définition des mots *plus haut* et *plus bas* donnée au n° **10**.

Le système constitué par tous les monomes d'ordre p étant complet possède la propriété II. En particulier :

Le produit d'un monome d'ordre p par une variable x non multiplicatrice pour lui est égal au produit d'un monome d'ordre p *plus haut* par une variable multiplicatrice pour ce dernier.

12. *Étude du système des monomes d'ordre p (p assez grand) qui font partie d'un module donné.* — Considérons un système de monomes complet M (n° **8**). Soit p un entier supérieur ou égal à l'ordre maximum des M.

Formons les monomes P d'ordre p de chacune des classes $\mathfrak{M}$. Ces monomes P s'obtiennent en multipliant un monome M déterminé

[1] Le mot *ordre* est équivalent aux mots *degré total*.

d'ordre $p_1 - p$ par tous les monomes μ d'ordre $p - p_1$, en $x_1, x_2, \ldots, x_{i_k}$ ($x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ étant les variables multiplicatrices de M_1).

Ces monomes μ forment un système complet, à condition que l'on y considère comme seules variables $x_1, x_2, \ldots, x_{i_k}$: chacun d'eux a, de ce point de vue, certaines variables multiplicatrices; on les considérera par définition comme les variables multiplicatrices du monome P correspondant. Les produits d'un P par tous les monomes que l'on peut former avec ses variables multiplicatrices constitueront la sous-classe de P. La définition des mots plus haut et plus bas (**10**) étant appliquée aux monomes μ, $P_1 = \mu_1 M$ sera dit plus haut ou plus bas que $P_2 = \mu_2 M$ suivant que μ_1 sera plus haut ou plus bas que μ_2. D'autre part, si deux monomes P, P′ proviennent de deux monomes différents M, M′, P sera dit plus haut ou plus bas que P′, suivant que M sera plus haut ou plus bas que M′.

I′. *Tout multiple d'ordre supérieur ou égal à p d'un monome* M *appartient à une sous-classe et à une seule.*

En effet, tout multiple d'un M appartient à une classe et à une seule; et tout monome d'ordre supérieur ou égal à p d'une classe $\mathfrak{M}$ appartient à une sous-classe et à une seule.

II′. *Le produit d'un monome* $\overline{P}$ *quelconque par une variable non multiplicatrice pour lui est égal au produit d'un monome* P *plus haut que* $\overline{P}$ *par une variable multiplicatrice pour* $\overline{P}$.

Si la variable non multiplicatrice pour $\overline{P}$ est une des variables x_1, $x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ multiplicatrices pour le $\overline{M}$ d'où provient $\overline{P}$, la proposition résulte immédiatement de la remarque faite à la fin du n° **11**.

Si c'est une variable non multiplicatrice pour le $\overline{M}$ d'où provient $\overline{P}$, le produit considéré sera, d'après la propriété II, égal à un $\mathfrak{M}$ provenant d'un M plus haut que $\overline{M}$; ce $\mathfrak{M}$, étant d'ordre $p - 1$, sera le produit par une variable multiplicatrice d'un P provenant de M.

Considérons maintenant le système S formé par tous les monomes ($\mathfrak{M}$) d'ordre inférieur ou égal à p; gardons la définition précédente pour les variables multiplicatrices des monomes d'ordre p. Par définition, un monome $\mathfrak{M}$ d'ordre inférieur à p n'aura *aucune*

variable multiplicatrice; il constituera à lui seul sa sous-classe. On pourra dire, pour l'ensemble des sous-classes correspondant aux monomes de S :

I'. *Tout multiple d'un monome* M *appartient à une sous-classe et à une seule.*

Considérons le produit d'un $\overline{\mathfrak{M}}$ d'ordre p_1 inférieur à p par une quelconque des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; c'est un $\mathfrak{M}$, car le système (M) est complet; il est d'ordre $p_1 + 1$, inférieur ou égal à p.

Étant donnés deux monomes de S, d'ordres différents, le monome du plus grand ordre sera dit le plus haut. Rapprochons cette définition de celles que nous avons posées pour les P. Nous obtenons la proposition :

II''. *Le produit d'un monome* $\mathfrak{M}$ *quelconque d'ordre inférieur ou égal à* p *par une variable non multiplicatrice de* $\mathfrak{M}$ *est égal à un monome* $\mathfrak{M}$ *plus haut que* $\overline{\mathfrak{M}}$, *ou au produit d'un monome* $\mathfrak{M}$ *plus haut que* $\overline{\mathfrak{M}}$ *par une variable multiplicatrice* (¹) *de* $\overline{\mathfrak{M}}$.

15. *Monomes complémentaires. Application aux modules.* — L'étude qui suit a pour objet final de classer les monomes *qui ne font pas partie d'un module donné.*

Considérons tout d'abord un système quelconque de monomes M (complet ou non). Soit x_{n-i} une des variables ($i = 0, 1, \ldots, n-1$). $Q^{(i)}$ le système des monomes obtenus en remplaçant $x_{n-i}, x_{n-i-1}, \ldots, x_1$ par l'unité dans les monomes M; $Q^{(n)}$ est l'unique monome 1 (²).

Chacun des monomes $x_n^{\alpha_n} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots x_{n-i+1}^{\alpha_{n-i+1}}$ de $Q^{(i)}$ a pour variables multiplicatrices dans $Q^{(i)}$ précisément celles des variables $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-i+1}$ qui sont multiplicatrices dans le système M pour un monome de ce système où $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-i+1}$ ont les exposants $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_{n-i+1}$ (d'après la définition des variables multiplicatrices, il est inutile de spécifier ce monome d'une manière plus complète).

(¹) Les mots « variable multiplicatrice » ont dans cet énoncé le sens qui a été précisé pour les monomes de S.

(²) On pourrait appeler $Q^{(n)}$ le système M lui-même.

Considérons un quelconque des monomes (Q) :

$$Q = x_n^{\alpha_n} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots x_{n-i+1}^{\alpha_{n-i+1}}.$$

Considérons l'ensemble des exposants de x_{n-i} dans ceux des monomes M où $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-i+1}$ ont les exposants $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_{n-i+1}$; soit β un entier positif ou nul n'appartenant pas à cet ensemble et inférieur au plus grand des nombres qui le composent.

Posons

$$N = x_n^{\alpha_n} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots x_{n-i+1}^{\alpha_{n-i+1}} x_{n-i}^{\beta}.$$

Nous appellerons *variables multiplicatrices de* N : 1° les variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-i-1}$; 2° celles des variables $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-i+1}$ qui sont multiplicatrices pour l'un des M où $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-i+1}$ entrent aux degrés $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_{n-i+1}$; et classe $(\mathfrak{N})$ correspondant à N l'ensemble de tous les monomes obtenus en faisant le produit de N par un monome quelconque formé avec ses variables multiplicatrices.

(Les N correspondant à $i = 0$ s'obtiennent en donnant à x_n les divers exposants qui ne figurent pas comme exposant de x_n dans les M et sont inférieurs au plus grand de ces exposants; les variables multiplicatrices d'un tel N sont $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.)

Les monomes N seront appelés *monomes complémentaires des monomes* M. On en verra plus loin la raison.

Pour former tous les N où x_n a un exposant donné α_n, considérons tous les M où x_n a cet exposant; appelons M′ les quotients de ces M par $x_n^{\alpha_n}$; soient N′ les monomes en $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ complémentaires des M′; les N cherchés sont les produits des N′ par $x_n^{\alpha_n}$. Les variables multiplicatrices d'un N sont celles du monome N′ correspondant, auxquelles on adjoint x_n dans le cas où α_n est le plus grand des exposants de x_n dans les M donnés.

Deux classes différentes $\mathfrak{N}$ n'ont aucun élément commun.

Soient j, j' les valeurs de l'indice i auxquelles correspondent les deux monomes N qui définissent les classes considérées (j, j').

Si ces deux monomes $N_j, N_{j'}$ correspondent à un même système de valeurs des exposants $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_{n-j+1}$, les exposants de x_{n-j} y sont différents, l'exposant de x_{n-j} dans tout $\mathfrak{N}$ provenant de N_j est le même.

β, que dans N_j : l'exposant de x_{n-j} dans un $\mathfrak{M}$ provenant de N_j ne peut être différent de l'exposant de x_{n-j} dans $N_{j'}$ que si $j' > j$ et s'il est supérieur au maximum des exposants de x_{n-j} dans ceux des monomes M où $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-j+1}$ ont les exposants

$$(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_{n-j+1}),$$

nombre lui-même *supérieur* à β.

Si les deux monomes N_j, $N_{j'}$ correspondent à des systèmes différents des exposants : $(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_{n-j+1})$; $(\alpha'_n, \alpha'_{n-1}, \ldots, \alpha'_{n-j'+1})$, les résultats obtenus en remplaçant $x_{n-j}, x_{n-j-1}, \ldots, x_1$ par l'unité dans deux monomes $\mathfrak{M}$ provenant respectivement de N_j, $N_{j'}$ peuvent être considérés comme deux monomes $\mathfrak{D}$ de deux classes différentes du système $Q^{(j)}$: ces résultats seront donc différents, et les deux monomes $\mathfrak{M}$ seront *a fortiori* différents.

On démontre de la même manière que :

Une classe $\mathfrak{M}$ et une classe $\mathfrak{M}$ n'ont aucun élément commun.

Cette proposition peut d'ailleurs être regardée comme une extension de la précédente en considérant le monome M comme un monome N_0.

Nous allons maintenant démontrer la proposition suivante :

Un monome quelconque appartient à une classe

$$\mathfrak{M}_{(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)}$$

ou à une classe $\mathfrak{M}$ (d'après ce qui précède, il n'appartient d'ailleurs qu'à une seule de ces classes). On pourra encore dire :

Un monome quelconque appartient à une classe $\mathfrak{D}_{(i)}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ et à une seule.

La proposition est évidente dans le cas d'un système M à une variable. Admettons-la pour $n - 1$ variables et démontrons-la pour n.

Soit $X = x_n^{\lambda_n} x_{n-1}^{\lambda_{n-1}} \ldots x_1^{\lambda_1}$ un monome quelconque. Si λ_n est inférieur au maximum a des exposants de x_n dans les M et ne figure pas parmi ces exposants, X est évidemment un $\mathfrak{M}_0$. Supposons que λ_n soit inférieur à a et figure parmi les exposants de x_n dans les M; soit M′ les quotients par $x_n^{\lambda_n}$ des monomes M où x_n a l'exposant λ_n, $\mathfrak{M}'$ les classes

à $n-1$ variables que définit le système des monomes M'; $x'_{n-1}\ldots x'_1$ fait partie d'une de ces classes $\overline{\mathfrak{M}'}$ ou $\overline{\mathfrak{N}'}$ provenant d'un M' ou N' particulier; $x''_n M'$ ou $x''_n \overline{N'}$ est un des monomes M ou N ayant mêmes variables multiplicatrices que $\overline{M}$, $\overline{N}$; N fait donc partie de la classe $\overline{\mathfrak{M}}$, ou $\overline{\mathfrak{N}}$ correspondante.

Supposons que λ_n soit supérieur ou égal à a; soient M' les quotients par x''_n des monomes M où x_n a l'exposant a: $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{N}'$ les classes à $n-1$ variables que définit le système des monomes M'; $x'_{n-1}\ldots x'_1$ fait partie d'une de ces classes $\overline{\mathfrak{M}'}$ ou $\overline{\mathfrak{N}'}$ provenant d'un $\overline{M'}$ ou $\overline{N'}$ particulier; $x''_n \overline{M'}$ ou $x''_n \overline{N'}$ est un des monomes M ou N ayant pour variables multiplicatrices : 1° celles de $\overline{M'}$ ou $\overline{N'}$; 2° x_n. N fait donc partie de la classe $\overline{\mathfrak{M}}$, ou $\overline{\mathfrak{N}}$ correspondante.

La proposition précédente justifie le nom de *monomes complémentaires* donné aux N.

Dans le cas où le système M est *complet*, les monomes $\mathfrak{N}$ ne sont autres que les monomes qui ne font pas partie du module défini par les M, puisque les $\mathfrak{M}$ sont précisément les monomes de ce module.

Puisque nous avons un procédé régulier pour obtenir une base *complète* du module défini par un système M quelconque, nous avons par là même un procédé régulier pour répartir les monomes *qui ne font pas partie d'un module* en un nombre fini de classes sans éléments communs, chaque classe étant toujours constituée par les produits d'un monome par tous les monomes formés avec certaines variables déterminées.

14. *Nombre des monomes d'ordre p qui font partie d'un module donné.* — Considérons un système quelconque de monomes M (complet ou non). Soit p_0 l'ordre maximum de ces monomes. Les monomes N sont au plus de l'ordre $p_0 - 1$. Soit p un entier quelconque supérieur ou égal à p_0; le nombre des monomes $\mathfrak{M}$ d'ordre p et le nombre des monomes $\mathfrak{N}$ d'ordre p sont des polynomes en p.

On sait en effet que le nombre des monomes, à α variables, d'ordre β, est égal au polynome en β :

$$\Gamma(\alpha, \beta) = \frac{(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+\alpha-1)}{1.2\ldots(\alpha-1)}.$$

Soit a l'ordre d'un des monomes M, le nombre des monomes $\overline{\mathfrak{M}}$

d'ordre p de sa classe est, en appelant α le nombre des variables multiplicatrices de $\overline{M}$,

$$\Gamma(\alpha, p-\alpha);$$

c'est donc un polynome en p; le nombre des monomes $\mathfrak{M}$ d'ordre p est la somme d'un nombre fini de polynomes en p; c'est aussi un polynome. Il en est de même pour le nombre des monomes $\mathfrak{N}$ d'ordre p.

D'ailleurs la somme des nombres des monomes $\mathfrak{M}$ et des monomes $\mathfrak{N}$ d'ordre p est le polynome en p

$$\Gamma(n, p).$$

Retenons de ce qui précède la conséquence suivante :

Le nombre des monomes d'ordre p qui ne font pas partie d'un *module donné* est un polynome en p dès que p est assez grand.

13. *Remarques sur le développement en série de Taylor.* — Considérons un développement complet en série de Taylor.

Supposons, pour simplifier l'écriture, que les valeurs initiales des variables soient toutes nulles.

Groupons ensemble tous les termes renfermant un monome déterminé : $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ et le produit de ce monome par tous ceux qu'on peut former avec certaines variables déterminées x_a, choisies parmi les x_i, variables que nous pouvons appeler *variables multiplicatrices du monome* $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, les autres variables x_b étant *non multiplicatrices*.

La portion de développement en série ainsi obtenue constitue une nouvelle fonction U.

Considérons, d'autre part, la fonction des x : $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qu'on obtient en annulant tous les x_b dans l'expression de la dérivée $\dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}}{dx_1^{\alpha_1}\, dx_2^{\alpha_2} \ldots dx_n^{\alpha_n}}$.

Je dis que $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est égal au résultat obtenu en intégrant V : α_1 fois par rapport à x_1; α_2 fois par rapport à x_2, ... ; α_n fois par rapport à x_n, en ayant soin, à chaque quadrature, de prendre zéro comme constante d'intégration (¹).

(¹) Intégrer une fois par rapport à x_i, en prenant zéro comme constante d'intégration, un monome M où x_i a l'exposant λ, c'est former le monome $\dfrac{M x_i}{\lambda+1}$.

Lorsqu'on effectue, sur un monome $x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_n^{\beta_n}$, la dérivation $\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$; si $x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_n^{\beta_n}$ n'est pas multiple de $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, le résultat est identiquement nul.

Si $x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_n^{\beta_n}$ est le produit de $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ par un monome qui contienne au moins une des variables x_b, le résultat contient cette variable en facteur. Il en résulte que, pour obtenir la fonction V, on peut se borner à opérer sur la portion U du développement de u.

Soit

$$\frac{A_{(\alpha_{a_1}+\rho_1),(\alpha_{a_2}+\rho_2),\ldots,(\alpha_{a_h}+\rho_h),\alpha_{b_1},\ldots,\alpha_{b_k}}}{(\alpha_{a_1}+\rho_1)!\,(\alpha_{a_2}+\rho_2)!\ldots(\alpha_{a_h}+\rho_h)!\,\alpha_{b_1}!\ldots\alpha_{b_k}!}\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} x_{a_1}^{\rho_1} x_{a_2}^{\rho_2} \ldots x_{a_h}^{\rho_h}$$

un terme quelconque du développement de U. On a identiquement

$$(1)\quad \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \left[\frac{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} x_{a_1}^{\rho_1} x_{a_2}^{\rho_2} \ldots x_{a_h}^{\rho_h}}{(\alpha_{a_1}+\rho_1)!\ldots(\alpha_{a_h}+\rho_h)!\,\alpha_{b_1}!\ldots\alpha_{b_k}!} \right] = \frac{x_{a_1}^{\rho_1} x_{a_2}^{\rho_2} \ldots x_{a_h}^{\rho_h}}{\rho_1!\,\rho_2!\ldots\rho_h!}.$$

Les x_b ne figurent plus dans ce terme. On peut écrire

$$V = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} U}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

On voit d'autre part comment on peut passer du développement de V au développement de U. Il suffit de faire exactement les opérations qui permettent de passer du deuxième membre de l'égalité (1) au terme entre crochets dans son premier membre. Ce qui justifie la règle énoncée plus haut ($U = I_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} V$). Les développements sont convergents en même temps. Ainsi, la connaissance de la fonction V est *équivalente* à celle de la fonction U.

Nous savons donc résoudre le problème suivant :

Supposons les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ réparties d'une manière quelconque en deux groupes

$$x_{a_1}, x_{a_2}, \ldots, x_{a_h}; \quad x_{b_1}, x_{b_2}, \ldots, x_{b_k} \quad (h + k = n);$$

donnons-nous un système d'entiers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (positifs ou nuls) et une fonction $f(x_{a_1}, x_{a_2}, \ldots, x_{a_h})$. Trouver toutes les fonctions u telles que l'on ait, sur la multiplicité $x_{b_1} = x_{b_2} = \ldots = x_{b_k} = 0$,

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = f(x_{a_1}, x_{a_2}, \ldots, x_{a_h}).$$

La portion U du développement de u sera entièrement connue :

$$U = U_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Les coefficients de tous les termes qui ne font pas partie de U seront arbitraires (assujettis seulement à rendre convergent le développement total).

Application. — Donnons-nous un système quelconque de monomes M en nombre fini.

Nous avons réparti tous les monomes en un nombre fini de classes $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, sans éléments communs; chacune de ces classes étant engendrée par tous les produits d'un monome déterminé par tous les monomes formés avec certaines variables déterminées. A une telle répartition correspond une répartition parfaitement définie des termes d'une série de Taylor en un nombre fini de fonctions dont les développements en série n'ont aucun élément commun, chacun de ces développements contenant tous les monomes d'une classe.

Soient $x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_n^{\beta_n}$ un quelconque des N : $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ses variables multiplicatrices; $x_{b_1}, x_{b_2}, \ldots, x_{b_k}$ les autres variables. Donnons-nous arbitrairement la valeur de $\frac{\partial^{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n} u}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \ldots \partial x_n^{\beta_n}}$ sur $x_{b_1} = x_{b_2} = \ldots = x_{b_k} = 0$. La donnée arbitraire de toutes ces fonctions que nous supposons développables en séries convergentes, et que pour abréger nous désignons par $N(x_a)$, entraîne la connaissance de toutes les portions de développement où entrent les monomes $(\mathfrak{M})$.

Resterait pour déterminer complètement la fonction u développable en série convergente à définir les coefficients correspondant aux $(\mathfrak{N})$ en ayant soin que le développement total obtenu soit convergent.

Soient $x_1^{\beta'_1} x_2^{\beta'_2} \ldots x_n^{\beta'_n}$ un quelconque des M : $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ses variables multiplicatrices; $x_{b'_1}, x_{b'_2}, \ldots, x_{b'_{k'}}$ les autres variables. Si l'on se donne la valeur de $\frac{\partial^{\beta'_1+\beta'_2+\ldots+\beta'_n} u}{\partial x_1^{\beta'_1} \partial x_2^{\beta'_2} \ldots \partial x_n^{\beta'_n}}$ pour $x_{b'_1} = x_{b'_2} = \ldots = x_{b'_{k'}} = 0$ (développable en série entière convergente), $M(x_a)$, la fonction u sera entièrement définie et développable en série entière convergente dans le domaine même où le sont l'ensemble des fonctions précédentes $N(x_a)$, $M(x_a)$.

16. *Calcul inverse de la dérivation. Position du problème.* — Proposons-nous de trouver les fonctions u de n variables dont certaines dérivées D (en nombre fini) d'ordres partiels donnés soient égales à des fonctions données des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Une dérivée quelconque d'une D sera une fonction connue des n variables. Considérons en particulier celles des dérivées des D que l'on doit adjoindre aux D pour obtenir un système complet : utilisons [1] pour leur calcul les dérivations mêmes qui ont été indiquées (n° **9**); les dérivées D_1 de ce système complet sont des fonctions connues bien déterminées des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Le problème proposé est donc équivalent à un problème de même énoncé, où l'on suppose de plus que les dérivées d'ordres partiels donnés forment un système complet.

C'est cette nouvelle forme d'énoncé que nous adopterons.

Nous poserons aussi le même problème sous une autre forme :

Soit p un entier supérieur ou égal à l'ordre maximum du système complet D_1. Considérons toutes les dérivées des D_1 dont l'ordre ne dépasse pas p : utilisons [1] pour leur calcul les variables « multiplicatrices » mêmes qui les définissent à partir des D_1, et adjoignons les nouvelles conditions obtenues aux conditions relatives aux D_1; on voit que le problème proposé est équivalent à un problème de même énoncé, où l'on suppose de plus que les dérivées d'ordres partiels donnés sont les dérivées d'ordre inférieur ou égal à p d'un système complet (p désignant un entier supérieur ou égal à l'ordre maximum des dérivées qui constituent ce système complet).

17. *Étude du problème précédent (première forme).* — Considérons un système formé d'un nombre fini de dérivées d'une même inconnue, le système des monomes correspondants étant *complet*.

Considérons maintenant le système d'équations aux dérivées partielles obtenu en égalant respectivement ces dérivées à des fonctions données $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $Du = f$.

---

[1] Nous indiquons ce mode de calcul uniquement pour avoir un procédé de formation bien déterminé : on pourra, en fait, opérer plus librement en s'astreignant seulement à calculer une seule expression pour chacune des dérivées D_1 que l'on veut faire figurer aux premiers membres.

Pour que ce système soit possible, il est nécessaire que les fonctions f satisfassent identiquement aux relations différentielles correspondant aux relations (II) (n° **10**).

Parmi les relations (II) considérons celles $(\mathrm{II})_1$ qui expriment que le produit d'un monome M par *une* variable qui n'est pas multiplicatrice pour lui appartient à une classe plus haute.

Nous allons montrer que les relations différentielles $(\mathrm{II})_1$, en nombre fini [1], suffisent pour que le problème soit possible, et nous indiquerons, lorsqu'elles sont vérifiées, le degré de généralité de la solution du système.

Dans chacun des deuxièmes membres des équations données, annulons toutes les variables qui ne sont pas multiplicatrices pour le monome correspondant au premier membre. Nous obtenons ainsi la valeur de chacune des fonctions $\mathrm{M}(x_{a'})$ (*voir* numéro précédent).

Choisissons arbitrairement les fonctions $\mathrm{N}(x_a)$ correspondant au système complémentaire des premiers membres.

Je dis que la fonction u bien déterminée, que l'on peut former à l'aide des fonctions M et N, satisfait au système des équations données.

Chaque expression $\mathrm{D}u - f$ est nulle lorsque les variables non multiplicatrices correspondant à D sont nulles; nous allons montrer que $\mathrm{D}u - f$ est nulle partout. La proposition est exacte d'elle-même pour la plus haute des expressions $\mathrm{D}u - f$ puisque, pour cette expression, toutes les variables sont multiplicatrices. Montrons que si elle est exacte pour les k plus hautes, elle l'est aussi pour les $k+1$ plus hautes.

Remarquons que les expressions $\mathrm{D}u - f$ satisfont aux mêmes relations $(\mathrm{II})_1$ que les fonctions correspondantes f. Ecrivons les relations où figure au premier membre la $(k+1)^{\text{ème}}$ (en comptant à partir du haut) des expressions $\mathrm{D}u - f$.

Les seconds membres sont nuls partout (propriété II, n° **10**), donc, les dérivées premières de la $(k+1)^{\text{ème}}$ expression $\mathrm{D}u - f$ par rapport à ses variables non multiplicatrices sont identiquement nulles. $\mathrm{D}u - f$ est donc indépendante de ses variables non multiplicatrices, et comme elle est nulle dès que ces variables le sont, elle est nulle partout.

---

[1] Réalisées en particulier si toutes les f sont nulles

Exemple :

$$p_{rqs} = \frac{\partial^{r+q+s} u}{\partial x_1^r \, \partial x_2^q \, \partial x_3^s} \left| \begin{array}{l} p_{000} = f, \\ p_{100} = g, \\ p_{010} = h, \\ p_{001} = k, \\ p_{011} = l, \\ p_{020} = m, \\ p_{021} = r, \\ p_{100} = s. \end{array} \right.$$

Pour que ce système soit possible, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\partial s}{\partial x_3} = r, \qquad \frac{\partial r}{\partial x_3} = m, \qquad \frac{\partial m}{\partial x_3} = \frac{\partial^3 h}{\partial x_1^3}, \qquad \frac{\partial l}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}, \qquad \frac{\partial k}{\partial x_3} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3},$$

$$\frac{\partial m}{\partial x_2} = l, \qquad \frac{\partial l}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 k}{\partial x_1^2}, \qquad \frac{\partial h}{\partial x_2} = g, \qquad \frac{\partial g}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}.$$

Une solution est parfaitement déterminée par la donnée des fonctions suivantes :

$$\left| \begin{array}{llll} u, & \dfrac{\partial u}{\partial x_1}, & \ldots & \dfrac{\partial^6 u}{\partial x_1^6} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, & \ldots, & \ldots, & \ldots \end{array} \right| \text{ pour } x_1 = x_2 = 0$$

$$\left| \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}, \quad \ldots \quad \ldots, \quad \ldots \right| \text{ pour } x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

. . . . . .

Voir le Tableau (N), (**6**).

18. *Étude du même problème (deuxième forme).* — Considérons maintenant le système obtenu en égalant à certaines fonctions données f toutes les dérivées d'ordre inférieur ou égal à p d'un système complet (p désignant un entier supérieur ou égal à l'ordre maximum des dérivées de ce système complet).

Pour que ce système soit possible, il est nécessaire que les fonctions f satisfassent identiquement aux relations différentielles correspondant aux relations (II)'' (*voir* n° **12**). Ces relations en nombre fini suffisent pour que le problème soit possible.

La démonstration est entièrement analogue à la précédente.

Les fonctions arbitraires sont précisément les mêmes que pour le système complet dont le système actuel est dérivé.

Les relations auxquelles doivent satisfaire les f sont ici toutes du premier ordre.

CHAPITRE II.

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES. — ÉTUDE FORMELLE. SYSTÈMES COMPLÈTEMENT INTÉGRABLES.

1. Nous aurons à envisager dans ce qui suit des équations au sens algébrique du mot et des équations aux dérivées partielles.

Afin de simplifier le langage, nous les supposerons linéaires; mais tout ce que nous dirons pourra s'étendre à des équations quelconques, sous réserve des conditions de régularité habituelles.

Les « combinaisons » d'équations que nous considérerons seront toujours des combinaisons linéaires homogènes (résultats obtenus en additionnant ces équations membre à membre après les avoir éventuellement multipliées par des fonctions des variables indépendantes).

Nous étudierons certaines formes canoniques de « systèmes d'équations aux dérivées partielles » pour lesquelles nous pourrons préciser les « conditions initiales », que l'on peut se donner arbitrairement pour déterminer une solution et une seule. Il ne s'agira dans cette étude, comme l'exige la généralité du problème, que de fonctions développables en série de Taylor.

Nous montrons d'ailleurs que l'on peut ramener un système quelconque à une forme canonique.

Les « conditions initiales » détermineront certaines portions de développements en série des fonctions inconnues, et par suite certains coefficients de ces développements. Le système donné et les équations que l'on peut en déduire par dérivations permettent de déduire des « conditions initiales » par résolutions successives d'équations ordinaires, tous les autres coefficients des développements cherchés.

On conçoit donc qu'il soit utile de *classer* les divers coefficients des deux sortes, qui ne sont autres, à des facteurs numériques près, que les valeurs en un point des dérivées des fonctions inconnues; pour sim-

plifier le langage, nous supposerons souvent que ce point est l'origine des coordonnées (o, o, ..., o).

2. *Quelques résultats simples relatifs aux systèmes d'équations ordinaires.* — Au sujet des équations ordinaires, rappelons les propriétés suivantes :

Imaginons une infinité dénombrable d'inconnues (y); et supposons que l'on ait défini une répartition de ces inconnues en une suite linéaire de classes $C_1, C_2, \ldots, C_k, \ldots$, chacune des C ne contenant qu'un nombre fini des inconnues y. Si y, y' appartiennent à deux classes différentes, C_k, $C_{k'}$, y sera dit antérieur ou postérieur à y' suivant que k est inférieur ou supérieur à k'.

Considérons une équation en (y), résolue par rapport à l'une des y, et telle que l'inconnue qui figure au premier membre soit postérieure à toutes les inconnues qui figurent au deuxième.

Considérons maintenant un système fini (E) d'équations dont chacune possède les propriétés précédentes, les premiers membres étant tous différents.

α. Un tel système (E) est formé d'équations indépendantes (son rang est égal au nombre des équations qui y figurent). Il est équivalent à un système (E′) dont les premiers membres sont respectivement les mêmes que ceux de E, sont postérieurs à toutes les inconnues du second membre correspondant, et *de plus ne figurent dans aucun des seconds membres*. Les (E′) sont des combinaisons des (E) (¹).

β. Soit maintenant une équation quelconque e; on peut ajouter à e une combinaison des équations (E) de manière que l'équation obtenue e_1 ne renferme plus aucun des premiers membres de (E) (²).

En particulier, e_1 peut ne renfermer aucune des inconnues y et se

(¹) On pourra par exemple montrer que si la proposition est exacte, lorsque les premiers membres appartiennent à des classes d'indice inférieur ou égal à k, elle l'est encore lorsque les premiers membres appartiennent à des classes d'indice inférieur ou égal à $k - 1$. Étant vraie pour $k = 1$, elle est générale.

(²) On voit immédiatement que l'on peut faire disparaître dans e chacun des premiers membres de E en ajoutant l'équation E′ correspondant à ce premier membre, multipliée préalablement par un facteur convenable; or les E′ sont des combinaisons des E.

réduire à la forme $a = 0$, a étant une constante. Si cette constante est différente de zéro, le système (E, e) est impossible. Si elle est nulle, le système (E, e) est équivalent au système (E).

5. *Application.* — Les inconnues (y) seront les valeurs en un point d'une fonction u de n variables et de toutes ses dérivées. Si y, y' sont deux dérivées d'ordres différents p, p', y sera dite *antérieure* ou *postérieure* à y' suivant que p est inférieur ou supérieur à p'. Si y, y' sont de même ordre, désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n$ les ordres de dérivation par rapport aux diverses variables, y sera dite postérieure ou antérieure à y' suivant que la première des différences $\alpha_n - \alpha'_n, \alpha_{n-1} - \alpha'_{n-1}, \ldots, \alpha_1 - \alpha'_1$ qui n'est pas nulle est positive ou négative; chaque classe C ne contient ici qu'une seule variable.

Considérons maintenant une équation aux dérivées partielles en u, (A), résolue par rapport à une dérivée Du et ne contenant dans son second membre que des dérivées antérieures à celle qui figure au premier membre; il en est de même de l'équation qu'on obtient en dérivant une fois l'équation donnée, par rapport à une quelconque des variables x_i; ce fait devient évident dès que l'on a fait la remarque suivante : soient y, y' deux dérivées de même ordre; pour reconnaître si y est antérieur ou postérieur à y' d'une part, ou si $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ est antérieur ou postérieur à $\frac{\partial y'}{\partial x_i}$ d'autre part, on a à former les mêmes différences (*voir* d'ailleurs plus loin n° 16). La propriété est encore vraie pour une dérivée d'ordre quelconque de l'équation donnée.

Adjoignons à l'équation donnée toutes les équations dérivées jusqu'à un certain ordre.

On peut appliquer à ce système (E) (où l'on considère les dérivées de u comme autant d'« inconnues ») les propositions α, β que nous avons indiquées plus haut :

1° On pourra le remplacer par un système équivalent ayant respectivement pour premiers membres Du et ses dérivées, et où les seconds membres ne comprendront ni Du ni *aucune de ses dérivées*.

Prenons pour conditions initiales les conditions initiales mêmes que nous avons prises dans l'étude de l'équation D$u = 0$; nous nous

donnons arbitrairement un certain nombre fini de fonctions (développables), d'où résulte la connaissance en un point de toutes les dérivées autres que Du ou ses dérivées. Elles permettent, d'après ce qui précède, de déterminer entièrement la valeur en ce point de Du et de ses dérivées et par suite de construire un développement en série parfaitement déterminé pour la fonction u.

L'équation a au plus *une* solution développable satisfaisant aux conditions initiales spécifiées. Nous ne pourrons affirmer qu'elle en a effectivement une que si nous pouvons démontrer la convergence du développement en série obtenu. Admettons provisoirement que cette convergence soit établie.

2° Donnons-nous d'autre part une équation aux dérivées partielles quelconque (a); soit p son ordre. Formons le système des équations (E) déduites de (A) que nous venons de considérer au présent paragraphe (1°) en ayant soin de conduire les dérivations de manière à obtenir dans les premiers membres toutes les dérivées de Du d'ordre total inférieur ou égal à p; et appliquons la remarque 3 au système (E, e) où (e) est l'équation (a), considérée comme une équation ordinaire par rapport aux diverses dérivées qui y entrent.

L'équation e_1 obtenue peut être considérée comme une équation aux dérivées partielles d'ordre $\leqq p$, conséquence du système (E, e) [et par suite du système A, a], où ne figurent plus ni D ni ses dérivées. Seules peuvent figurer les autres dérivées de u d'ordre $\leqq p$; si quelqu'une y figure effectivement, les « conditions initiales relatives à D » ne pourront plus être prises arbitrairement (1); si e_1 ne contient aucune dérivée de u, le système (E, e) sera impossible ou équivalent (algébriquement) au système E; dans ce dernier cas, e sera une combinaison des E.

Nous pourrons donc dire :

« Pour que la solution du système (A, a) dépende des mêmes fonctions arbitraires (2), que la solution de l'équation A, il faut et il suffit que a soit une combinaison homogène des dérivées de A dont l'ordre (en u) est inférieur ou égal à celui de a. »

(1) *Voir* plus loin (**7**).

(2) Cette expression se trouve précisée par le texte.

Remarque. — Remarquons le rôle essentiel joué dans ce qui précède par la propriété suivante du classement adopté : suivant que y est antérieur ou postérieur à y', $\frac{\partial y}{\partial x}$ est antérieur ou postérieur à $\frac{\partial y}{\partial x_i}$. Cette propriété appartient à tout classement où la question de savoir si y est antérieure ou postérieure à y' peut être tranchée par la seule connaissance des différences $\alpha_n - \alpha_n, \alpha_{n-1} - \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1 - \alpha_1$.

D'après cela, on pourrait être tenté de modifier légèrement la convention que nous venons de faire pour classer les dérivées.

Soient y, y' deux dérivées d'*ordres quelconques;* convenons de dire que y est postérieur ou antérieur à y', suivant que y est plus haut ou plus bas que y' (*voir* I, n° **10**). Tout ce qui précède subsiste. Mais nous verrons qu'avec la première convention faite, la convergence de nos développements est assurée; *elle ne l'est plus avec la nouvelle.*

Un exemple bien connu de ce fait est donné par l'équation $\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$; il n'existe pas toujours une solution (développable en série entière) de cette équation prenant pour $x_2 = 0$ une valeur (développable en série entière) donnée.

C'est pour cette raison que, dans tous les classements que nous allons définir, si deux dérivées y, y' d'une même fonction sont d'ordres différents p, p', y sera dite *antérieure* ou *postérieure* à y suivant que p est inférieur ou supérieur à p'. On verra au numéro suivant la convention générale que nous adopterons lorsqu'il s'agira de plusieurs fonctions inconnues, convention qui comprendra la précédente comme cas particulier.

4. *Cotes. Classement des dérivées.* — Attachons à chacune des variables indépendantes et des fonctions inconnues, s nombres entiers [1] qui seront appelés cote première, seconde, ..., $\lambda^{\text{ième}}$, ..., $s^{\text{ième}}$ de la variable ou de la fonction inconnue considérée. Appelons cote $\lambda^{\text{ième}}$ d'une dérivée d'une fonction inconnue, d'ordre total r, la somme des cotes $\lambda^{\text{ièmes}}$ de la fonction et des r variables de dérivation.

[1] Positifs, négatifs ou nuls. On pourrait d'ailleurs se borner à considérer des nombres positifs ou nuls; la généralité des classements obtenus serait la même (*voir* III, 3e lemme) (*cf.* Riquier, *Systèmes*, p. 195).

Nous supposerons toujours *que les cotes premières des variables indépendantes sont toutes égales à* 1. Les autres cotes des variables indépendantes et toutes celles des fonctions inconnues seront arbitraires. Ces nombres étant choisis, nous allons montrer comment ils permettent de définir un classement des fonctions inconnues et de toutes leurs dérivées.

1° Soient y, y' deux dérivées (ou fonctions) quelconques; $c_1, c_2, \ldots, c_s$, $c'_1, c'_2, \ldots, c'_s$ leurs cotes; y sera dite *postérieure* ou *antérieure* à y' suivant que la première des quantités $c_1 - c'_1$, $c_2 - c'_2$, $\ldots$, $c_s - c'_s$ qui n'est pas nulle est positive ou négative; si toutes ces quantités sont nulles, y sera dite de même *classe* (¹) que y'. Il apparaît immédiatement que si y est postérieure à y' et y' postérieure à y'', y est postérieure à y'' (si le premier des entiers $c_i - c'_i$, $c'_i - c''_i$ qui n'est pas nul est positif, le premier des entiers $c_i - c''_i$ qui n'est pas nul est aussi positif). La définition est donc *légitime*.

2° Groupons ensemble toutes les dérivées qui ont même cote première; les dérivées qui figurent dans un tel groupe peuvent être d'ordres différents; mais, parmi elles, celles qui sont relatives à une fonction donnée sont d'un ordre déterminé; par suite, les dérivées qui ont une cote première déterminée sont en nombre fini. Il en résulte *a fortiori* que chaque classe *ne renferme qu'un nombre fini d'éléments*.

3° La cote première d'un élément quelconque ne peut être inférieure à la cote première minima a des fonctions inconnues.

Les éléments en nombre fini, qui ont pour cote première a, sont antérieurs à tous les autres. Il y a donc *une classe* qui précède toutes les autres (à savoir celle qui précède toutes les autres lorsqu'on se borne à envisager les éléments en nombre fini de cote première a).

En résumé, les dérivées des fonctions inconnues se trouvent réparties en classes $C_1, C_2, \ldots, C_k, \ldots$ dont chacune ne contient qu'un nombre fini d'éléments. Les dérivées appartenant à la classe C_k seront appelées, pour abréger, dérivées de la classe k.

(¹) Le sens du mot classe est donc tout différent de celui qu'il avait dans le Chapitre I (7 en particulier).

Un tel classement possède en outre les propriétés fondamentales suivantes :

a. Quelle que soit la dérivée y, $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ est postérieur à y; en effet, la cote première de $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ est supérieure d'une unité à celle de y.

b. $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ est antérieur ou postérieur à $\frac{\partial y'}{\partial x_i}$ suivant que y est antérieur ou postérieur à y'. Il suffit d'observer que l'on a, en désignant par c, c', γ les cotes de y, y', x_i :

$$c_i - c_i = (c_i - \gamma_i) - (c_i + \gamma_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Considérons alors une équation aux dérivées partielles (A) *résolue* par rapport à une dérivée y d'une fonction inconnue et ne contenant dans son second membre que des dérivées antérieures à celle qui figure au premier; il en est de même de l'équation qu'on obtient en dérivant une fois l'équation donnée par rapport à une quelconque des variables x_i; les éléments susceptibles de figurer au deuxième membre de l'équation dérivée sont : 1° les éléments du deuxième membre de l'équation primitive; 2° leurs dérivées par rapport à x_i. Les éléments 1° sont antérieurs à y, donc à $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ (remarque *a*). Les éléments 2° sont antérieurs à $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ (remarque *b*).

Toute équation obtenue en dérivant l'équation donnée un nombre quelconque de fois jouit encore de la même propriété : toutes les quantités qui figurent au deuxième membre sont antérieures au premier.

Supposons que (A) ne renferme qu'une inconnue; on pourra répéter pour cette équation toutes les remarques qui ont été faites au sujet de l'équation (A) du n° 5.

Le classement indiqué au n° 5 est d'ailleurs un cas particulier des classements généraux que l'on vient de définir. Considérons une seule fonction inconnue; attribuons-lui $n+1$ cotes nulles; attribuons à x_1, x_2, ..., x_n des cotes 2e, 3e, ..., $(n+1)^{\text{ième}}$ nulles, sauf la dernière pour x_1, sauf l'avant-dernière pour x_2, ..., sauf la deuxième pour x_n, les cotes non nulles étant égales à 1; le classement obtenu est précisément celui qui a été utilisé au n° 5.

5. *Forme canonique d'un système d'équations aux dérivées partielles.* — Nous avons rencontré jusqu'ici *deux* formes, particulièrement simples, de « systèmes d'équations aux dérivées partielles ».

L'une de ces formes, considérée au Chapitre précédent, est obtenue quand, les premiers membres étant constitués par des dérivées quelconques différentes d'une ou de plusieurs fonctions inconnues, les deuxièmes membres sont des fonctions complètement connues.

L'autre de ces formes, considérée au paragraphe précédent, est constituée par *une* équation résolue par rapport à une dérivée, et ne renfermant au deuxième membre que des dérivées antérieures au premier (classement quelconque répondant aux définitions du n° 4).

Pour la *première forme*, si après un certain nombre (fini) de dérivations (dont nous avons indiqué la formation régulière), il n'apparaît aucune incompatibilité, *le système est réellement possible*, et nous avons spécifié la nature des *conditions initiales* susceptibles d'être prises arbitrairement pour déterminer une solution et une seule.

Pour la *deuxième forme*, nous avons spécifié la nature des conditions initiales susceptibles d'être prises arbitrairement pour déterminer une solution et une seule, mais au point de vue *formel seulement;* une question de convergence reste à trancher. Nous verrons plus loin que le problème est alors réellement possible.

Nous allons considérer maintenant un système d'équations (C) tel que:

a. Les *premiers membres* sont des dérivées quelconques, toutes *différentes*, d'une ou de plusieurs fonctions inconnues.

b. Chacune des équations ne contient [1] dans son second membre que des quantités *antérieures* à son premier membre.

6. *Unicité de la solution (supposée).* — Nous avons vu comment on peut trouver la forme des « conditions initiales » qui, prises arbitrairement, déterminent, d'une manière unique, une solution du système obtenu en égalant à zéro les premiers membres des équations données. Montrons qu'un système (C) a *au plus une* solution (développable en série entière) qui satisfasse au système des « conditions initiales » précédentes.

---

[1] « Outre les variables $x_1, x_2, \ldots, x_q$ ». Ces mots seront sous-entendus dans la suite.

Parmi les dérivées des fonctions inconnues, distinguons celles qui sont dérivées de l'un des premiers membres au moins (y compris les premiers membres eux-mêmes), nous les appellerons dérivées *principales;* toutes les autres dérivées des inconnues seront appelées dérivées *paramétriques*. Autrement dit, les dérivées principales sont celles qui font partie des modules définis par les premiers membres relatifs à chacune des inconnues; les dérivées paramétriques sont toutes les autres. Les « conditions initiales » font connaître les valeurs des dérivées paramétriques en un point P_0.

En dérivant convenablement une des équations données, convenablement choisie, on peut obtenir une équation ayant pour premier membre une dérivée principale quelconque; le second membre ne contient que des dérivées antérieures au premier.

Soient k_0 la classe maxima des premiers membres de (C) et k un entier quelconque supérieur ou égal à k_0. On pourra adjoindre aux équations (C) un certain nombre de leurs dérivées, de manière que les équations du système total obtenu aient des premiers membres tous distincts, qui soient respectivement toutes les dérivées principales de classe inférieure ou égale à k.

L'application à ce système de la remarque α conduit évidemment à la conclusion suivante :

« On peut, par dérivations et combinaisons, déduire du système (C) une expression (au moins) d'une dérivée principale quelconque en fonction des dérivées *paramétriques* de classe inférieure. » Mais les conditions initiales font connaître les valeurs en P_0 des dérivées paramétriques; par suite les valeurs en P_0 de toutes les dérivées principales ne peuvent être choisies que d'une manière, au plus. *Le système* (C) *a au plus une solution* (holomorphe) *qui satisfasse aux conditions initiales indiquées.*

7. *Systèmes complètement intégrables.* — Nous nous proposons de trouver dans quel cas le système *a effectivement une solution* pour des valeurs *arbitraires* des « conditions initiales » [1] (la *forme*, ou, si l'on veut, l' « *économie* » de ces conditions initiales est toujours supposée

[1] P_0 étant lui-même *arbitraire* dans un petit domaine *à n dimensions;* nous avons le droit de supposer que ce domaine contient l'origine.

être celle même qui correspond au système obtenu en égalant à zéro les premiers membres de (C).

Si, par dérivations et combinaisons, on ne peut tirer de (C) aucune relation entre les seules dérivées paramétriques (et variables indépendantes), on dira que le système est *complètement* intégrable. Nous verrons d'ailleurs au Chapitre suivant qu'un système complètement intégrable a effectivement une solution répondant à des conditions initiales arbitraires. Nous allons nous occuper de reconnaître au moyen d'un nombre fini d'opérations si un système est complètement intégrable, et, lorsqu'il n'en sera pas ainsi, d'en déduire un système équivalent complètement intégrable.

Considérons les diverses dérivées d'une même inconnue qui figurent aux premiers membres de (C); on sait qu'on peut leur adjoindre un certain nombre de leurs dérivées de manière que le système total soit complet (Chap. I, n° **9**). Adjoignons aux équations données les équations obtenues par les dérivations (¹) mêmes qui nous ont permis d'obtenir dans les premiers membres un système complet M.

Opérons de même pour chacune des inconnues. Nous obtenons un nouveau système C_1 qui est équivalent au système primitif, et que nous pouvons lui substituer dans l'étude du problème proposé. (La forme des « conditions initiales » relatives aux premiers membres n'a pas changé.)

Dérivons chacune des équations, A, du *nouveau système* par rapport aux seules « variables multiplicatrices » correspondant au premier membre; les premiers membres $\mathfrak{M}$ des équations $\mathfrak{A}$ ainsi obtenues (²) reproduisent sans omission ni répétition toutes les dérivées principales (propriété I) (I, n° **8**).

Les équations dérivées des équations données sont de deux espèces : 1° les $\mathfrak{A}$; 2° toutes les autres, que nous nommerons $\mathfrak{A}'$. Il sera commode d'appeler classe d'une équation $\mathfrak{A}$ ou $\mathfrak{A}'$ la classe même de son premier membre.

(¹) Cela simplement pour avoir un procédé régulier; on pourra en fait dériver librement en s'astreignant simplement à faire apparaître aux premiers membres le système complet en question.

(²) Nous comprenons dans les $\mathfrak{A}$ les équations du système C_1 elles-mêmes (et par suite celles du système C).

Considérons une équation $\mathcal{A}'$ quelconque, soit k sa classe; appliquons la remarque β au système (E) constitué par toutes les équations $\mathcal{A}$ de classe inférieure ou égale à k et à l'équation e constituée par l'équation $\mathcal{A}'$ considérée, les (y) étant ici les premiers membres $\mathfrak{M}$ de classe inférieure ou égale à k. On peut ajouter à $\mathcal{A}'$ une combinaison homogène des $\mathcal{A}$ (de classes inférieures ou égales à la classe de $\mathcal{A}'$) de manière que l'équation obtenue $\mathcal{A}''$ ne contienne aucun $\mathfrak{M}$. Si l'équation $\mathcal{A}''$ contient effectivement une dérivée [1] (au moins), $\mathcal{A}''$ constitue une relation que doivent vérifier les dérivées [1] paramétriques des inconnues; mais alors le système ne serait pas complètement intégrable.

Si l'équation se réduit à $f = 0$, f étant une fonction des variables indépendantes seules, le système est certainement impossible, à moins que la fonction f soit identiquement nulle, auquel cas $\mathcal{A}'$ sera une combinaison homogène des $\mathcal{A}$ de classes inférieures ou égales à k.

Ainsi, pour que le système soit complètement intégrable, *il est nécessaire que tout $\mathcal{A}'$ soit une combinaison homogène des $\mathcal{A}$ dont la classe ne dépasse pas celle de $\mathcal{A}'$*. Si, d'ailleurs, cette condition est vérifiée, choisissons arbitrairement les conditions initiales autour de l'origine, et déterminons les valeurs à l'origine des dérivées principales à l'aide des équations $\mathcal{A}$; les développements construits à l'aide des conditions initiales et de ces valeurs *satisfont formellement au système proposé;* en effet, une équation dérivée quelconque d'une des équations données, étant une combinaison des équations $\mathcal{A}$, est vérifiée à l'origine par les valeurs données ou calculées des divers coefficients qui y entrent : dérivées paramétriques et dérivées principales.

Nous démontrerons plus loin que les développements (u) sont convergents.

Pour que *le système soit complètement intégrable, il faut et il suffit que tout $\mathcal{A}'$ soit combinaison homogène des $\mathcal{A}$ dont la classe ne dépasse pas la classe de $\mathcal{A}'$.*

Nous allons voir au n° **8** qu'il suffit de faire cette hypothèse pour

---

[1] « Dérivée » est pris ici au sens large; les fonctions inconnues qui ne figurent pas par elles-mêmes dans les premiers membres sont des « dérivées paramétriques d'ordre zéro ».

certains $\mathcal{A}'$ (en nombre fini) que nous préciserons. Faisons auparavant une remarque sur la forme des relations en question. Retranchons de $\mathcal{A}'$ celle des équations $\mathcal{A}$ qui a même premier membre; l'équation obtenue $\mathcal{A}'''$ ne contient que des quantités de classes *inférieures* à k. Supposons maintenant que $\mathcal{A}'$ soit combinaison homogène des $\mathcal{A}$; il en est de même de $\mathcal{A}'''$; mais ce qui précède permet de préciser : $\mathcal{A}'''$ est combinaison homogène des $\mathcal{A}$ de classes *inférieures* à k. Ainsi, pour que *le système* (S) *soit complètement intégrable, il faut et il suffit que la différence d'une équation* $\mathcal{A}'$ *quelconque et de celle des équations* $\mathcal{A}$ *qui a même premier membre soit combinaison homogène des équations* $\mathcal{A}$ *de classes inférieures à la classe de* $\mathcal{A}'$.

8. *Conditions, en nombre fini, pour qu'un système soit complètement intégrable.* — Considérons les $\mathcal{A}'$ que l'on obtient en dérivant *une* seule fois une équation du système C_1. Ces équations $\mathcal{A}'_1$ sont en nombre fini; leurs premiers membres sont les dérivées qui correspondent respectivement aux produits d'un « monome » M par chacune de ses variables non multiplicatrices. Je dis que si *les* $\mathcal{A}'_1$ *sont combinaisons homogènes d'équations* $\mathcal{A}$, *il en est de même de tous les* $\mathcal{A}'$.

Si dans une équation $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}'_1$ ... quelconque, on retranche le deuxième membre du premier, on obtient une expression différentielle qu'il sera commode de désigner par la lettre $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}'_1$, ..., qui désigne l'équation elle-même. Ce langage n'entraînera pas de confusion à condition de convenir, une fois pour toutes, que lorsqu'on parlera du *premier membre* ou du *second* membre d'une équation $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}'_1$, ..., on la supposera écrite sous la forme primitive (définitions a, b, et n^{os} **6**, **7**).

Il résulte de notre hypothèse que toute expression $\mathcal{A}'_1$ de classe h est égale à l'expression $\mathcal{A}$ qui a même « premier membre » augmentée d'une combinaison homogène des expressions $\mathcal{A}$ de classes *inférieures à* k. Les expressions A satisfont ainsi identiquement (c'est-à-dire quelles que soient les fonctions u) à un certain système d'équations aux dérivées partielles (C_2) que nous nous proposons d'étudier. Ce système (où l'on considère les A comme les « fonctions inconnues ») satisfait évidemment à la condition a du n° **5** (les premiers

membres sont tous ici du *premier* ordre); je dis qu'il satisfait à la condition b à condition d'adopter un *classement* convenable pour les fonctions A et leurs dérivées.

Adoptons pour les premiers membres M relatifs à une inconnue déterminée, et pour les équations et expressions A correspondantes, la définition des mots *plus haut* et *plus bas* (Chap. I, n° **10**) et numérotons les équations A : $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(q)}$ en allant *de haut en bas*.

Attachons à chacune des variables indépendantes et des fonctions A $s+1$ cotes dont les s premières seront précisément les cotes des variables indépendantes et des premiers membres des A (considérés comme dérivées des fonctions u) dans le système primitif (C). La $(s+1)^{\text{ième}}$ cote sera o pour toutes les variables indépendantes; pour toute fonction A, la $(s+1)^{\text{ième}}$ cote sera égale à *l'indice de* A. Grâce à ce choix, si une dérivée y quelconque d'un A est antérieure à une dérivée y' d'un A dans *l'ancien* classement, y est aussi antérieur à y' dans le nouveau. Si deux dérivées (y, y') de deux A, A′ différents sont dans la même classe (ancien classement), y est antérieure ou postérieure à y' (nouveau classement) suivant que A est plus haut ou plus bas que A′.

Considérons une équation quelconque du système (C_2). *Au sens de l'ancien classement* elle contient, outre *des y de classe inférieure, un y*, que nous désignerons par y_2, *de classe égale à celle de l'y premier membre*, que nous désignerons par y_1, mais on peut affirmer : y_2 est une dérivée d'un A *plus haut que le* A *d'où dérive* y_1 (propriété II, *voir* I, **10**).

Par suite, au sens du nouveau classement, chacune des équations de (C_2) ne renferme au second membre que des *quantités antérieures* à celle qui figure au premier. Ces expressions sont d'ailleurs homogènes ; en se reportant au n° **6**, on voit que toute dérivée d'un A où la dérivation est faite au moins une fois par rapport à une variable non multiplicatrice pour le M correspondant s'exprime en fonction homogène des dérivées des A où la dérivation ne fait intervenir que des variables multiplicatrices pour le M correspondant. Ce qui revient à dire : tout $\mathcal{A}'$ est combinaison homogène des $\mathcal{A}$.

Réserve faite de la démonstration de convergence, nous avons donc démontré la proposition suivante :

Pour que le système C_1 formé par les équations A soit *complètement intégrable*, il faut et *il suffit* que les *dérivées premières* $\frac{\partial A}{\partial x}$ *des expressions* A *par rapport à leurs variables non multiplicatrices* soient *identiquement*, c'est-à-dire quelles que soient les fonctions u, *des combinaisons homogènes des dérivées* $\mathcal{A}$ *des* A *par rapport à leurs variables multiplicatrices:* les seules dérivées $\mathcal{A}$ qui peuvent intervenir sont d'ailleurs de classe au plus égale à la classe de la dérivée $\frac{\partial A}{\partial x}$ considérée ([1]).

9. *Autre forme de la démonstration précédente.* — Nous allons étendre ce qui précède au cas des systèmes C_1 non linéaires, et nous en profiterons pour présenter les résultats sous une forme légèrement différente. Soit $\overline{A}$ une équation A particulière pour laquelle les x ne soient pas toutes variables multiplicatrices ([2]). Dérivons-la une fois par rapport à une variable x_i qui ne soit pas multiplicatrice pour elle; le premier membre obtenu $\frac{\partial \overline{M}}{\partial x_i}$ est égal au premier membre DM d'une équation $\mathcal{A}$ déterminée $D\overline{A}$; l'expression $\frac{\partial \overline{A}}{\partial x_i} - D\overline{A}$ ne contient que les variables indépendantes et des dérivées de classes inférieures à la classe commune k de $\frac{\partial \overline{M}}{\partial x_i}$ et de DM. Cette expression peut donc être considérée comme une fonction des variables indépendantes, des dérivées paramétriques de classes inférieures à k, et des $\mathcal{A}$ de classes inférieures à k; pour que le système soit complètement intégrable, il est nécessaire que cette fonction s'annule quand on y annule tous les $\mathcal{A}$; car sans cela on obtiendrait une relation entre les dérivées paramétriques. Supposons donc que les expressions $\frac{\partial \overline{A}}{\partial x_i} - D\overline{A}$ soient des fonctions des variables indé-

([1]) Observons de plus que si les premiers membres de C_1 sont d'ordre 1, et si ses seconds membres sont d'ordre au plus égal à 1, les seules $\mathcal{A}$ qui peuvent intervenir sont des dérivées des A d'ordre (en A) ≤ 1. On verra plus loin une application de cette remarque.

([2]) Une variable est dite « multiplicatrice pour une équation A » si elle est multiplicatrice pour son premier membre.

pendantes, des dérivées paramétriques et des $\mathcal{A}$, *ces fonctions possédant la propriété de s'annuler dès qu'on y annule tous les* $\mathcal{A}$. Appelons C_2 le système de relations ainsi obtenu. Donnons-nous un système de conditions initiales arbitraires pour les u (système de conditions dont la forme est fixée par les premiers membres des A); déterminons les dérivées principales (à l'origine) des inconnues u par les équations $\mathcal{A}$; et admettons la convergence des développements qui en résulteraient; autrement dit, considérons un système de fonctions u holomorphes répondant aux conditions initiales proposées et satisfaisant (à l'origine) à toutes les équations $\mathcal{A}$. Remplaçons les dérivées paramétriques des u par leurs expressions en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans le système C_2; les A peuvent être considérées comme des fonctions holomorphes des $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui satisfont au système C_2 quelles que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

D'autre part, appelons $x_{a_1}, x_{a_2}, \ldots, x_{a_h}$ les variables multiplicatrices, $x_{b_1}, x_{b_2}, \ldots, x_{b_k}$ les variables non multiplicatrices d'une équation A (dans le système C_1). L'expression A s'annule par hypothèse sur $x_{a_1} = x_{a_2} = \ldots = x_{a_h} = 0$, puisque tous les $\mathcal{A}$ sont nuls à l'origine.

Or : 1° le système C_2 considéré comme système par rapport aux A admet *au plus* une solution holomorphe telle que les différentes fonctions A qui la constituent s'annulent respectivement sur les multiplicités $x_{b_1} = x_{b_2} = \ldots = x_{b_k} = 0$ correspondantes; 2° ce système admet la solution 0.

Donc tous les A sont nuls quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

10. *Chaîne de systèmes.* — Revenons au cas d'un système C_1 linéaire. *Si le système* C_1 *est complètement intégrable*, le système C_2 relatif aux expressions A (expressions que nous appellerons désormais A_1) ne contient plus explicitement que les x et les A_1, et non plus les u et leurs dérivées paramétriques; il est *linéaire par rapport aux* A_1. Chaque relation C_2 peut s'écrire en plaçant dans le premier membre la quantité $\frac{\partial A_1}{\partial x}$ seule (notation du paragraphe précédent) et nous avons vu (**8**) que lorsque l'on considère les A_1 comme les inconnues, on obtient un système C_2 satisfaisant aux deux conditions a et b.

a'. Les premiers membres sont des dérivées *premières* toutes différentes des inconnues.

b. Chaque second membre ne contient que des dérivées antérieures au premier membre correspondant.

Ce système (C_2) possède ainsi les propriétés fondamentales du système (C_1), ses premiers membres relatifs à une inconnue déterminée forment un système de monomes complet puisqu'il en est ainsi de tout système de monomes du premier ordre (I, **11**).

(C_2) est *complètement intégrable*. En effet, si par dérivations et combinaisons on pouvait en tirer une relation entre les dérivées « paramétriques » des A_1 (relativement au système C_2), on aurait par là même une relation entre des expressions $\mathcal{A}$, ce qui est impossible, puisque le « rang » de tout système d'expressions $\mathcal{A}$ est égal à leur nombre.

Au système C_2 aux inconnues A_1, on pourra appliquer la méthode même que nous avons appliquée à C_1; le système des conditions d'intégrabilité complète formera un système C_3 aux inconnues A_2, que l'on formera à l'aide des équations A_2, comme on avait formé C_2 à l'aide des équations A_1, etc.

La suite des systèmes que l'on forme ainsi est nécessairement limitée et a au plus $n+1$ éléments.

En effet, dans le système C_2, les premiers membres dérivés d'une même fonction inconnue A_1 sont au plus au nombre de n; dans le système C_3, les premiers membres dérivés d'une même fonction inconnue A_2 sont au plus au nombre de $n-1, \ldots$; dans le système C_{n+1} (s'il existe), chaque inconnue intervient dans un premier membre au plus. La chaîne des systèmes s'arrête donc au plus tard au système C_{n+1}: elle peut effectivement ne s'arrêter qu'au système C_{n+1} (*par exemple* **2**).

11. *Nouvelle forme des conditions pour qu'un système soit complètement intégrable.* — La méthode précédente (**8** et **9**) permet de reconnaître si un système est complètement intégrable.

Il pourra y avoir avantage à opérer d'une manière un peu différente.

Soit p_0 la cote première maxima des premiers membres de C_1. Considérons celles des équations $\mathcal{A}$ dont la cote première ne dépasse pas un nombre $p > p_0$. Les premiers membres qui sont relatifs à une

même inconnue forment un système de la nature de ceux pour lesquels nous avons défini des variables multiplicatrices (I, n° **12**).

Désignons par B les équations considérées, par $\mathfrak{B}$ les équations obtenues en les dérivant par rapport à leurs variables multiplicatrices seules, $\mathfrak{B}'$ les autres équations que l'on peut en déduire par dérivations; affectons $\mathfrak{B}$ ou $\mathfrak{B}'$ de l'indice 1 lorsque cette équation a été déduite d'une équation B par *une* seule dérivation.

On voit, comme précédemment, que :

Pour que le système donné soit complètement intégrable, il faut que tout $\mathfrak{B}'_1$ soit combinaison homogène des $\mathfrak{B}_1$ et des B, et d'une manière plus précise ;

Pour que le système donné soit complètement intégrable, il faut :

1° Que la différence de tout $\mathfrak{B}'_1$ provenant d'une équation B de cote première p et de l'équation $\overline{\mathfrak{B}}_1$ qui a même premier membre soit combinaison homogène des $\mathfrak{B}_1$ (de classes inférieures à la classe commune de $\mathfrak{B}'_1, \overline{\mathfrak{B}}_1$) et des B ;

2° Que la différence de tout $\mathfrak{B}'_1$ provenant d'une équation B de cote première $p_1 < p$ et de l'équation B qui a même premier membre soit combinaison homogène des B de classes inférieures à la classe commune de $\mathfrak{B}'_1$, B (et par suite de cotes premières $\leqq p_1 + 1$).

On voit comme précédemment que ces conditions sont *suffisantes*.

Dire que ces conditions sont réalisées, c'est dire que les *expressions* [1] B satisfont identiquement (quels que soient les u) à un certain système d'équations aux dérivées partielles *du premier ordre*, dont les premiers membres sont tous différents. *Ce système possède la propriété b.* Il suffit pour le voir d'attacher à chacune des variables indépendantes et des B $s + 1$ cotes choisies de la manière suivante : les s premières seront celles des variables et des premiers membres des B (considérés comme dérivées des u) dans le système primitif C; la $(s - 1)^{\text{ième}}$ sera 0 pour chaque variable, elle sera égale au numéro d'ordre du premier membre de B lorsqu'on numérote tous les premiers membres relatifs à une même inconnue u en allant de haut en

[1] Comme précédemment, nous désignons par *expression* B l'expression obtenue en retranchant le second membre du premier dans *l'équation* B.

bas (I, n° **12**). On voit alors immédiatement, en se reportant à la démonstration du n° **8** (II) et à la propriété II (I, **12**) que chaque second membre du système en B considéré, C_2, ne contient que des quantités antérieures au premier membre. Toute équation $\mathfrak{B}'$ est alors une combinaison homogène des $\mathfrak{B}$ et le système primitif est complètement intégrable.

Supposons que le système donné B soit linéaire et complètement intégrable. Les B satisfont au système C_2.

On voit, comme au n° **10**, que ce système C_2 est complètement intégrable. *Il est, de plus, du premier ordre.* Mais alors le nouveau système C_3 que l'on en déduira comme précédemment (n° **10**) sera aussi du premier ordre [1]. Tous les systèmes de la chaîne C_2, C_3, ... seront du premier ordre.

12. *Réduction d'un système quelconque à une forme canonique complètement intégrable.* — Tout système d'équations aux dérivées partielles peut se ramener, par résolutions et dérivations, à un système équivalent, *possédant les propriétés a, b et, de plus, complètement intégrable.*

Adoptons pour les fonctions et les variables un système de cotes tel que chacune des classes qui en résultent ne contienne qu'un élément; c'est ce qui aura lieu, par exemple, pour le système de cotes suivant :

u	v	w		x_1	x_2	.	.	.	x_n
0	0	0		1	1	.	.	.	1
0	1	2		0	0	.	.	.	0
0	0	0		0	0	.	.	.	1
.	.	.		.	.	.	.	.	.
0	0	0		0	1	.	.		0
0	0	0		1	0	.	.	.	0

Les cotes 3e, 4e, ..., $(n+2)^{ième}$ de u, v, w, ..., x_i, ... étant nulles, sauf la cote $(n+3-i)^{ième}$ de x_i qui est égale à 1. Autrement dit, les

[1] *Voir* note de la fin du n° **8**.

dérivées sont rangées d'après leur ordre, puis dans chaque ordre d'après la fonction d'où elles proviennent ; puis pour les dérivées d'un ordre déterminé d'une fonction déterminée dans l'ordre adopté plus haut (n° 5).

Étant donné un système quelconque de p équations, on pourra toujours par simples combinaisons en déduire un système équivalent de p équations possédant les deux propriétés a et b : soit d la dérivée de la classe la plus élevée qui entre dans le système des p équations données ; résolvons par rapport à d l'une des équations qui la contient, substituons l'expression obtenue dans le système restant : nous obtenons un système de $p-1$ équations ne contenant que des équations de classes inférieures à d ; si donc la proposition est vraie pour $p-1$ équations, elle l'est aussi pour p ; étant vraie pour une équation, elle est générale.

D'un système mis sous la forme (C) jouissant des propriétés a, b, on pourra tirer une forme (C_1) où les premiers membres constituent le système complet déduit des premiers membres de C ; de cette forme (C_1) on déduit les « conditions d'intégrabilité » qui ne *contiennent pas de dérivées des premiers membres de* C : ces « conditions », considérées seules, seront résolues [1] de manière à satisfaire aux conditions a, b, puis seront adjointes au système (C). On obtiendra ainsi un système (C′), formé au total des équations (C) et des « conditions d'intégrabilité » ; ce système satisfait aussi aux conditions a, b.

Soit D l'opération qui permet de passer de (C) à (C′). Je dis que cette opération ne peut s'effectuer qu'un nombre limité de fois. En effet, les systèmes des premiers membres S, S′,... des systèmes C, C′,... sont tels que chacun d'eux contient : 1° tous les monomes du système précédent ; 2° d'autres monomes dont aucun n'est multiple des monomes du système précédent.

Une telle suite est nécessairement finie (I, 2).

La démonstration précédente fournit un procédé régulier pour

---

[1] Dans ce genre de raisonnements, il est sous-entendu que l'on se place au voisinage d'un système de valeurs (des variables indépendantes et des dérivées des premières classes) pour lequel toutes les résolutions successives supposées dans le texte sont possibles conformément à la théorie générale des fonctions implicites.

déduire [1] d'un système quelconque donné un système équivalent possédant les propriétés a, b, et complètement intégrable.

Une modification évidente de cette démonstration fournit immédiatement le théorème de M. Tresse :

« Des équations aux dérivées partielles (à un nombre fini d'inconnues) peuvent toujours être considérées comme des combinaisons (algébriques et différentielles) d'un nombre fini d'entre elles. »

13. *Résultats relatifs aux systèmes de formes algébriques.* — Les remarques qui ont été faites dans les paragraphes précédents conduisent à des conséquences algébriques intéressantes sur lesquelles nous allons donner quelques indications.

Pour abréger le langage, nous appellerons « forme différentielle » (en u) correspondant à une forme algébrique en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ donnée, le résultat que l'on obtient lorsque, dans cette dernière, on substitue à chaque monome $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ la dérivée correspondante de u, $p_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}$: lorsqu'on dérive une forme différentielle, on en obtient une nouvelle, qui n'est autre que la forme différentielle correspondant au produit de la forme algébrique primitive par le monome correspondant à la dérivation considérée.

Nous obtiendrons des résultats relatifs à un système de formes algébriques en appliquant nos méthodes générales au système obtenu en égalant à zéro les formes différentielles (en u) correspondantes. Traitons un tel système (où la seule inconnue est u) ; et tout d'abord, cherchons à le ramener à une forme canonique complètement intégrable (n° **12**) : nous adjoignons pour cela au système donné, résolu convenablement, certaines formes, résolues convenablement, et nous supposons que les premiers membres du système total formé (A) constituent un système complet ; les équations A dérivées par rapport à leurs variables multiplicatrices ont été appelées $\mathcal{A}$; le rang de tout système d'équations $\mathcal{A}$ est égal à leur nombre. Or, lorsqu'on forme les « conditions d'intégrabilité », on est amené à rechercher si certaines formes différentielles (déduites du système par des procédés indiqués)

[1] Sauf rencontre d'incompatibilité (relation non identique entre les seules variables x) mettant en évidence *l'impossibilité* du système.

sont ou non combinaisons d'équations $\mathcal{A}$: il suffira ici, d'après les remarques qui viennent d'être faites, de reconnaître si une telle forme est combinaison à coefficients constants d'équations $\mathcal{A}$ *de son ordre ;* lorsqu'il n'en est pas ainsi, on est amené à adjoindre au système primitif une combinaison à coefficients constants de cette forme et d'équations A *de son ordre*, c'est-à-dire une nouvelle *forme différentielle.*

Le système canonique complètement intégrable A_1, que l'on obtient, est composé uniquement de *formes différentielles* en u.

Soit p_0 l'ordre maximum de ces formes ; et $p \geqq p_0$. Considérons, comme au n° **11**, les équations $\mathcal{A}_1$ d'ordre inférieur ou égal à p, équations que nous appelons B ; les expressions B sont ici des formes différentielles. En utilisant toujours les mêmes remarques, nous obtenons les résultats suivants :

1° Toute dérivée d'une expression B d'ordre p_1 inférieur à p est une combinaison linéaire à coefficients constants des B d'ordre $p_1 + 1$.

2° Les expressions B d'ordre p satisfont identiquement (c'est-à-dire quel que soit u) à un système C_2 d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, linéaires, *à coefficients constants*, et *sans autres termes que les termes du premier ordre par rapport aux* B.

Ce système est d'ailleurs complètement intégrable.

Écrivons les identités qui expriment ce fait ; il apparaît immédiatement qu'elles se présentent sous la forme d'un système linéaire du premier ordre, *à coefficients constants* et *sans autres termes que les termes du premier ordre.*

Les systèmes C_3, C_4, ... dont nous avons expliqué la formation au n° **11** ont tous les propriétés qui viennent d'être spécifiées pour C_2 (2°).

Revenons aux formes *algébriques* (¹) B d'ordre p : $B_1, B_2, \ldots, B_{m^{(1)}}$. Comment peut-on obtenir tous les systèmes de formes algébriques $X_1, X_2, \ldots, X_{m^{(1)}}$ tels que l'on ait (quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$)

$$X_1 B_1 + X_2 B_2 + \ldots + X_{m^{(1)}} B_{m^{(1)}} = 0. \tag{1}$$

(¹) Il est commode, dans les cas où aucune confusion n'est à craindre, de désigner la forme algébrique et la forme différentielle correspondante par la même lettre. Nous adoptons cette convention.

Chaque équation du système C_2 peut s'écrire symboliquement comme l'équation (1); chacune de ces équations fournit, en somme, un système de solutions *du premier ordre* de l'équation précédente : il suffit d'y remplacer chaque symbole de dérivation $\frac{\partial}{\partial x_i}$ par la variable correspondante x_i. Soit

$$F_{1s}^1, \quad F_{2s}^1, \quad \ldots, \quad F_{m^{(1)}s}^1, \qquad [s = 1, 2, \ldots, m^{(1)}]$$

une telle solution (1). Aucune de ces solutions n'est « combinaison » des autres. Le système C_2 étant complètement intégrable, toute autre solution du premier ordre est combinaison linéaire à coefficients constants des solutions précédentes; toute « solution du 2e, 3e, ... ordre » se déduit régulièrement des solutions

$$F_{1s}^1, \quad F_{2s}^1, \quad \ldots, \quad F_{m^{(1)}s}^1, \qquad [s = 1, 2, \ldots, m^{(1)}]$$

grâce à la définition des variables multiplicatrices.

Cherchons maintenant à obtenir tous les systèmes de formes

$$X_1^1, \quad X_2^1, \quad \ldots, \quad X_m^1$$

tels que l'on ait, quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et quels que soient les paramètres β,

$$\begin{aligned}(2) \qquad & X_1^1 \left[F_{11}^1 \beta_1 + F_{21}^1 \beta_2 + \ldots + F_{m^{(1)}1}^1 \beta_{m^{(1)}} \right] \\ & + X_2^1 \left[F_{12}^1 \beta_1 + F_{22}^1 \beta_2 + \ldots + F_{m^{(1)}2}^1 \beta_{m^{(1)}} \right] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + X_m^1 \left[F_{1m}^1 \beta_1 + F_{2m}^1 \beta_2 + \ldots + F_{m^{(1)}m}^1 \beta_{m^{(1)}} \right] = 0\end{aligned}$$

[ce qui pourrait encore s'écrire sous forme de $m^{(1)}$ équations, en égalant à zéro les coefficients de $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m^{(1)}}$].

Chaque équation du système C_2 peut s'écrire symboliquement comme l'équation (2); chacune de ces équations fournit une solution du premier ordre de l'équation précédente, il suffit, comme précédemment, de remplacer chaque symbole de dérivation par la variable correspondante. Soit

$$F_{1s}^2, \quad F_{2s}^2, \quad \ldots, \quad F_{m^{(2)}s}^2, \qquad [s = 1, 2, \ldots, m^{(2)}]$$

une telle solution. Aucune de ces solutions n'est combinaison des

(1) *Cf.* HILBERT, *Math. Annalen*, t. XXXVI, 1890, p. 190.

autres. Le système C_3 étant complètement intégrable, toute autre solution du premier ordre est combinaison linéaire à coefficients constants des solutions précédentes; toute solution de 2e, 3e, ... ordre se déduit régulièrement des solutions

$$F_1^2, \quad F_2^2, \quad \ldots, \quad F_m^2 \qquad [s = 1, 2, \ldots, m^2]$$

grâce à la définition des variables multiplicatrices.

On pourra poser, relativement aux formes $F^{(2)}$, un problème analogue à celui que l'on a posé pour les $F^{(1)}$ [équation (2)].... La chaîne de systèmes ainsi formée s'arrête nécessairement (et comprend n chaînons au plus).

Le problème que nous venons de traiter pour *le système des formes* B *d'ordre* p est le problème que s'est posé M. Hilbert pour un système de formes quelconques. Mais nous arrivons ici à un résultat plus précis que le résultat général.

Pour le système des formes B *d'ordre* p, *les solutions fondamentales des systèmes successifs de Hilbert sont toutes constituées par des formes linéaires.*

Il est d'ailleurs à remarquer qu'un module [1] *quelconque* de formes peut toujours être considéré comme constitué par l'adjonction d'un nombre fini de formes (de degré $< p$) à un module défini par un système B.

On pourra énoncer la proposition suivante :

« Soit un module quelconque de formes algébriques; on sait que toutes les formes d'ordre p du module sont des combinaisons linéaires à coefficients constants d'un nombre fini d'entre elles linéairement indépendantes $F_1, F_2, \ldots, F_m$ ».

---

[1] On dit qu'un système de formes constitue un module si toute combinaison linéaire des formes de ce système fait partie du système, en entendant ici, par combinaison linéaire des formes $F_1, F_2, \ldots, F_m$ toute forme du type $\gamma_1 F_1 + \gamma_2 F_2 + \ldots + \gamma_m F_m$ où les γ sont des formes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Les théories développées dans les paragraphes précédents donnent un procédé régulier pour obtenir une fois et une seule fois toutes les formes d'un module donné.

» *Si p est assez grand :*

» 1° Tout système de formes $X_1, X_2, \ldots, X_m$ solution de l'équation

$$X_1 F_1 + X_2 F_2 + \ldots + X_m F_m = 0$$

est combinaison de $m^{(2)}$ solutions indépendantes, dont chacune est constituée par *des formes linéaires*

$$F_{1s}^{(1)}, \quad F_{2s}^{(1)}, \quad \ldots, \quad F_{m^{(1)}s}^{(1)} \qquad [s = 1, 2, \ldots, m^{(2)}].$$

» 2° Tout système de formes $X_1^{(1)}, X_2^{1}, \ldots, X_m^{1}$ solution du système

$$X_1^1 F_{t1}^1 + X_2^1 F_{t2}^1 + \ldots + X_m^1 F_{tm}^1 = 0 \qquad [t = 1, 2, \ldots, m^{(2)}]$$

est combinaison de $m^{(3)}$ solutions indépendantes, dont chacune est constituée par *des formes linéaires*

$$F_{1s}^2, \quad F_{2s}^2, \quad \ldots, \quad F_{m^{(2)}s}^2 \qquad [s = 1, 2, \ldots, m^{(3)}].$$

» 3° Tout système $X_1^2, X_2^2, \ldots, X_m^2$ solution du système

$$X_1^2 F_{t1}^2 + X_2^2 F_{t2}^2 + \ldots + X_m^2 F_{tm}^2 = 0,$$

est combinaison, etc. »

14. *Nombre* $\chi(p)$. — On a vu au n° **14** (I) que le nombre des monomes d'ordre p qui n'appartiennent pas à un module donné est un polynome en p, $\chi(p)$, dès que p est assez grand. Soit M un système complet définissant ce module; soit λ le nombre maximum des variables multiplicatrices des monomes N(I, **13**); μ le nombre des N qui ont λ variables multiplicatrices; on voit immédiatement que le terme de plus haut degré de $\chi(p)$ est

$$\mu \frac{p^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}.$$

Si les dérivées de u correspondant aux monomes M sont les premiers membres d'un système canonique complètement intégrable à la seule inconnue u, $\chi(p)$ représente le nombre maximum des variables des « fonctions initiales » de la solution, μ le nombre des fonctions initiales à λ variables. Or lorsqu'on fait un changement quelconque

de variables indépendantes, le polynome $\chi(p)$ ne change pas [1]; le nombre maximum λ des variables des fonctions initiales et le nombre μ de ces fonctions qui contiennent λ variables sont donc invariants par tout changement de variables.

Plaçons-nous dans le cas considéré au n° **13** et parlons seulement de formes algébriques : $\chi(p)$ est le nombre des conditions indépendantes auxquelles on doit assujettir une forme d'ordre p (p assez grand) pour que cette forme fasse partie du module envisagé. Le polynome $\chi(p)$ est en relation étroite avec la multiplicité algébrique dont les équations s'obtiennent en égalant à zéro les formes de ce module. Nous nous bornerons à la remarque suivante.

Hilbert énonce sans démonstration la règle suivante : « Le nombre μ est le degré de la multiplicité algébrique à $\lambda - 1$ dimensions définie par le système précédent. »

Pour que cet énoncé soit général, il y aurait lieu de définir les degrés de multiplicité des solutions de certains systèmes singuliers.

A ce point de vue, il y aurait lieu de dire, par exemple, que, dans l'espace à deux dimensions (coordonnées homogènes x_1, x_2, x_3), le système d'équations

[illegible]

définit une multiplicité de dimension 0 et d'ordre 3 : *trois* points confondus en

[illegible] $= 0$, [illegible] $= 0$.

CHAPITRE III.

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES. — GÉNÉRALISATION DES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS. — DÉMONSTRATION DE CONVERGENCE.

1. *Forme canonique étudiée.* — Avant de passer à la démonstration de la convergence des développements en série obtenus pour les

[1] Nous laissons de côté dans le présent exposé la démonstration détaillée de ce point.

intégrales, nous indiquerons quelques généralisations de ce qui précède.

Considérons un système d'un nombre fini d'équations telles que :

a. Les premiers membres sont des dérivées quelconques toutes différentes d'une ou plusieurs inconnues.

b_1. Chacune des équations ne contient dans son second membre que des quantités de cote première au plus égale à celle du premier.

Autrement dit, le nouveau système donné diffère du système donné que l'on envisageait précédemment en ceci que chaque second membre peut contenir des dérivées qui ne sont ni antérieures ni postérieures au premier membre, ou même des dérivées postérieures à celui-ci; mais la cote première de ces dérivées (plus simplement leur ordre s'il n'y a qu'une inconnue) doit ne pas dépasser la cote première du premier membre.

La définition ne suppose même pas qu'il ait été fait de convention particulière pour le classement des dérivées; elle suppose seulement l'attribution d'une cote première à chacune des fonctions inconnues (si les cotes premières des inconnues sont égales, le mot cote première dans b_1 peut être remplacé par le mot *ordre*).

De plus, nous ne supposerons plus, même dans le langage, que les équations sont linéaires. Il est commode, pour éviter les redites, de faire dès maintenant cette autre généralisation.

Si l'on dérive une fois, par rapport à une quelconque des variables, une quelconque des équations données, l'équation obtenue ne contient dans son second membre que des quantités de cote première au plus égale à celle du premier.

Formons comme précédemment le système (A) obtenu en adjoignant aux équations données celles qu'on en déduit par les dérivations mêmes qui nous permettent de déduire des premiers membres un système complet de dérivées [1] (pour chacune des fonctions inconnues).

Celles des dérivées, d'ordre quelconque, de A que l'on peut former en utilisant comme variables de dérivations les seules « variables mul-

[1] Nous nous assujettissons à ne former qu'une équation ayant un premier membre déterminé.

tiplicatrices » du premier membre de A constitueront un ensemble d'équations $\mathcal{A}$ correspondant à A.

Les équations $\mathcal{A}$ ainsi obtenues (en y comprenant toujours les A) ont encore ici des premiers membres tous distincts.

Groupons ici toutes les équations $\mathcal{A}$ de cote première [1] déterminée : il n'y en a qu'un nombre fini. Soient δ la cote première minima des premiers membres *du système donné ;* Δ la cote première maxima *des* A.

Considérons les systèmes formés par les équations $\mathcal{A}$ de cote première δ, $\delta + 1$, ..., Δ, $\Delta + 1$; le dernier système est formé d'équations linéaires par rapport aux dérivées de cote première $\Delta + 1$ qui y entrent.

Le système total ainsi obtenu satisfait encore aux deux propriétés a et b_1. C'est sur lui que nous raisonnerons dans la suite.

2. *Position du problème.* — Les conditions initiales que nous nous imposerons seront encore les conditions initiales « relatives aux premiers membres ». Au sujet de ces conditions et des équations proposées elles-mêmes, nous aurons à faire, outre certaines réserves de régularité, certaines réserves d'inégalité que nous préciserons dans la suite. D'ailleurs, dans le cas où les conditions a et b seront réalisées [2], les réserves d'inégalité disparaîtront, et la proposition que nous avions en vue dans les paragraphes précédents apparaîtra comme un cas particulier de celle que nous obtiendrons.

Donnons-nous un « système de conditions initiales relatives aux premiers membres » et considérons les valeurs à l'origine qui en résultent pour les dérivées paramétriques de cote première δ, $\delta + 1$, ..., Δ (dérivées en nombre fini). Substituons ces valeurs dans les équations $\mathcal{A}$ de cote première δ, $\delta + 1$, ..., Δ et supposons que les équations obtenues (où l'on fait $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$) soient alors vérifiées pour un certain système de valeurs numériques attribuées aux

---

(1) Nous appellerons pour abréger cote première d'une équation la cote première de son « premier membre » ou, ce qui revient au même, la cote première maxima des termes qui y entrent.

(2) Et non pas seulement a et b_1.

dérivées principales de cote première δ, $\delta+1$, ..., Δ (dérivées qui sont en nombre fini), de sorte que tous les seconds membres soient réguliers au voisinage des valeurs que nous venons de considérer pour les variables qui y figurent.

Soient maintenant $x_{a_1}, x_{a_2}, \ldots, x_{a_k}$; $x_{b_1}, x_{b_2}, \ldots, x_{b_k}$ les variables multiplicatrices et non multiplicatrices d'une équation de cote première $\Delta+1$.

Il est naturel de se poser le problème suivant : Y a-t-il un système de fonctions u régulier au voisinage de l'origine satisfaisant : 1° aux conditions initiales précédentes; 2° aux équations $\mathcal{E}_\delta, \mathcal{E}_{\delta+1}, \ldots, \mathcal{E}_\Delta$ à l'origine; 3° à chacune des équations $\mathcal{E}_{\Delta+1}$ sur la multiplicité correspondante $x_{b_1} = x_{b_2} = \ldots = x_{b_k} = 0$ (¹).

Nous substituerons au problème proposé un problème analogue où les données initiales seront identiquement nulles ainsi que les valeurs à l'origine des dérivées principales de cote première au plus égale à Δ. Soit U la portion de développement de l'inconnue u dont la connaissance résulte des conditions initiales données (autrement dit, la portion de développement où apparaissent dans les coefficients les dérivées paramétriques de u). Soit $a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ la valeur numérique (à l'origine) de la dérivée principale de u (de cote première au plus égale à Δ) $p_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$. Nous poserons

$$u = u' = U + \sum \frac{a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_n!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n},$$

le signe Σ étant étendu à toutes les dérivées principales de cote première $\leqq \Delta$. Il est évident que pour que u satisfasse : 1° aux conditions initiales proposées; 2° aux conditions

$$(p_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n})_0 = a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$$

il faut et il suffit que u' satisfasse : 1° aux conditions initiales de même forme où toutes les fonctions données sont identiquement nulles; 2° aux conditions

$$(p'_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n})_0 = 0 \quad \left(p'_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right) = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} u'}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\Big|_0$$

(¹) Celles des fonctions inconnues du système primitif qui ne figuraient dans aucun premier membre doivent, d'après cela, être considérées comme des données dans le nouveau problème posé.

Dans les équations (4b) de cote première $\Delta + 1$, substituons aux u leurs expressions en fonction des u'. Faisons passer aux deuxièmes membres les termes connus; nous obtenons un nouveau système de même forme $\mathfrak{M}_{\Delta+1}$. A tout système de fonctions (u) satisfaisant aux conditions imposées correspond un système de fonctions u', satisfaisant aux conditions analogues *relativement au système* $\mathfrak{M}_{\Delta+1}$, les « conditions initiales » étant toutes identiquement nulles : les dérivées paramétriques de u', *relatives au système* $\mathfrak{M}_{\Delta+1}$, sont en effet de deux sortes : elles s'obtiennent à partir de u' par les dérivations qui, appliquées aux u, donneraient relativement au premier système, soit des dérivées paramétriques, soit les dérivées principales de cote première inférieure ou égale à Δ ; en se reportant à ce qui précède, on voit que les « dérivées paramétriques » de u', relatives au système $\mathfrak{M}_{\Delta+1}$, sont toutes nulles.

La question posée est équivalente à celle-ci (en appelant u les nouvelles inconnues) : *Y a-t-il un système de fonctions u, régulières au voisinage de l'origine, dont les conditions initiales (prises relativement au système $\mathfrak{M}_{\Delta+1}$) soient identiquement nulles et qui satisfassent à chacune des équations $\mathfrak{M}_{\Delta+1}$ sur la multiplicité correspondante $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$?*

Nous indiquerons des cas très généraux où l'on peut affirmer que ce problème a une solution et une seule.

5. Nous sommes amené à poser le problème suivant :

« Soit un système (S) d'équations ayant les propriétés suivantes :

» a_2. Les premiers membres sont des dérivées d'une ou plusieurs inconnues; les premiers membres dérivées d'une même inconnue sont tous différents, tous *de même ordre* p_i et forment un système *dérivé d'un système complet*.

» b_2. Les seconds membres sont *linéaires* par rapport à l'ensemble des dérivées *d'ordre* p_1 *de* u_1, p_2 *de* u_2, ...; les coefficients L de ces dérivées et le terme R qui en est indépendant ne contiennent, outre les variables indépendantes, que des dérivées de u_1 d'ordre inférieur à p_1, de u_2 d'ordre inférieur à p_2, ..., et sont holomorphes au voisinage du système de valeurs *zéro* attribuées à ces diverses quantités.

» La propriété a_2 permet de définir pour chaque équation un système de variables multiplicatrices; cherchons à satisfaire à cette équation sur la multiplicité dont l'équation s'obtient en égalant à zéro *toutes les variables non multiplicatrices* (*multiplicité associée à l'équation*). C'est le système de conditions ainsi obtenues que nous appellerons dorénavant $\mathfrak{B}$.

» Le système des premiers membres définit la forme des *conditions initiales* prises pour les u; égalons à zéro les diverses fonctions initiales.

» Indiquer des cas où le problème ainsi posé a *une solution et une seule*. »

Considérons un système (S′) ne différant du système (S) précédent que par les « coefficients » des seconds membres : supposons que chacun des L′ ou R′ soit majorant [1] pour le L ou R correspondant; et de plus que, dans tout R′, les coefficients des termes où n'interviennent que les variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soient *tous positifs* au *sens strict*.

Nous dirons alors, pour abréger, que (S′) est majorant pour (S).

Soit $\mathfrak{B}'$ le système de conditions correspondant à (S′) comme $\mathfrak{B}$ correspond à S.

Supposons que l'on puisse satisfaire à $\mathfrak{B}'$ par un système de fonctions u dont les développements aient leurs coefficients tous positifs.

Je dis que le système $\mathfrak{B}$ a une solution et une seule dont les « valeurs initiales » sont nulles.

La démonstration repose essentiellement sur le lemme d'algèbre [2] que voici :

Soient :

$$(1)\qquad X_i = \sum_{k=1}^{k=N} A_k X_k + Y \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

$$(1)'\qquad X_i = \sum_{k=1}^{k=N} A_k X_k + Y$$

---

[1] Dans un L′ (ou R′) tout coefficient d'une quantité quelconque (x ou dérivée de cote première $\leq P$) est supérieur (ou égal) à la valeur absolue du coefficient correspondant dans le L (ou R) correspondant.

[2] *Voir* en annexe la démonstration de ce lemme.

deux systèmes de N équations linéaires à N inconnues X, X'. Si le système (1)' est vérifié pour un système de valeurs positives pour les A', X', Y' (le mot positif étant pris *au sens strict pour tous les* Y', et par suite pour tous les X'), et si l'on a

$$|A'| \leq A, \quad |Y'| \leq Y,$$

le système (1), où les X sont considérées comme les inconnues, a une solution et une seule, et cette solution satisfait aux inégalités

$$|X| \leq X.$$

Il est commode, pour abréger le langage, d'attribuer de nouveau aux fonctions inconnues des « cotes premières » $c_1, c_2, \ldots$ telles que

$$P_1 = c_1, \quad P_2 = c_2, \quad \ldots \quad P_n = P,$$

P étant un entier arbitraire, choisi une fois pour toutes.

Admettons l'existence d'une solution du système $\mathfrak{W}$.

Le système (S) donné où l'on fait $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ constitue un système d'équations ordinaires $\mathfrak{W}_P$ auquel doivent satisfaire les valeurs numériques, à l'origine des coordonnées, des dérivées de cote première inférieure ou égale à P des fonctions inconnues.

Le système obtenu en dérivant chaque équation (S) par rapport à ses variables multiplicatrices, l'ordre total de dérivation λ étant donné, puis en faisant $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ dans le résultat, constitue un système d'équations ordinaires $\mathfrak{W}_{P+\lambda}$ auquel doivent satisfaire les valeurs numériques à l'origine des dérivées, de cote première inférieure ou égale à $P + \lambda$, des fonctions inconnues solution de $\mathfrak{W}$.

Tout ce que l'on vient de dire sur le système $\mathfrak{W}$ se répète mot pour mot pour le système $\mathfrak{W}'$ à condition de remplacer dans ce qui précède S, $\mathfrak{W}_P$, $\mathfrak{W}_{P+\lambda}$ par S', $\mathfrak{W}'_P$, $\mathfrak{W}'_{P+\lambda}$.

$\mathfrak{W}'$ étant effectivement vérifié par un système de fonctions u, les systèmes ordinaires $\mathfrak{W}'_{P+\lambda}$ ($\lambda = 0, 1, 2, \ldots$) sont effectivement vérifiés par certains systèmes de nombres, les valeurs numériques initiales des dérivées de cote première inférieure ou égale à $P + \lambda$ ($\lambda = 0, 1, 2, \ldots$). Chacun des systèmes ainsi obtenus ($\mathfrak{W}'_{P+\lambda}$) ($\lambda = 0, 1, 2, \ldots$) peut tenir successivement le rôle du système (1)' du lemme ci-dessus : les X' seront les dérivées principales d'ordre $P + \lambda$; les A' seront des fonctions des dérivées de cote première inférieure à P ; dans les Y' pour-

ront figurer, outre des dérivées de cote première inférieure à $P+\lambda$, les dérivées paramétriques d'ordre $P+\lambda$; un Y *ne peut se réduire à zéro* puisqu'il contient, outre des termes positifs (sens large), le terme constant d'un R' ou la valeur à l'origine d'une dérivée d'un R', nombres positifs (sens strict).

Comparons au système $(\mathfrak{W}_P)$ (*coefficients* A, Y : dérivées principales de cote première P : X'_0) le système $(\overline{\mathfrak{W}_P})$ obtenu en annulant dans $\mathfrak{W}_P$ toutes les dérivées paramétriques qui y entrent.

Les coefficients A_0, Y_0 de ce système sont tels que $A_0 \leq A'_0$, $Y_0 \leq Y'_0$.

Le système $(\overline{\mathfrak{W}_P})$ aura une solution (X_0) et une seule et l'on aura $|X_0| \leqq X'_0$. Ainsi le système $\mathfrak{W}_P$ où l'on remplace les dérivées paramétriques par o a une solution et une seule ; toutes les dérivées de cote première au plus égale à P des inconnues ont des valeurs absolues inférieures aux dérivées correspondantes de la solution de $\mathfrak{W}'$.

Admettons que les systèmes $(\overline{\mathfrak{W}_P})$, $(\overline{\mathfrak{W}_{P+1}})$, ..., $(\overline{\mathfrak{W}_{P+\lambda}})$ obtenus en remplaçant respectivement dans $(\mathfrak{W}_P)$, $(\mathfrak{W}_{P+1})$, ..., $(\mathfrak{W}_{P+\lambda})$ les variables et les dérivées paramétriques par o, les dérivées principales autres que les premiers membres par leurs valeurs tirées des systèmes précédents aient chacun une solution et une seule, et que les nombres qui constituent cette solution soient respectivement inférieurs en valeur absolue aux dérivées principales correspondantes de la solution de $\mathfrak{W}'$ dont nous supposons l'existence.

Soit $(\overline{\mathfrak{W}_{P+\lambda+1}})$ le système obtenu en remplaçant dans $(\mathfrak{W}_{P+\lambda+1})$ les variables et les dérivées paramétriques par o, et les dérivées principales de cote première inférieure ou égale à $P+\lambda$ par leurs valeurs tirées des $(\overline{\mathfrak{W}_P})$, $(\overline{\mathfrak{W}_{P+1}})$, ..., $(\overline{\mathfrak{W}_{P+\lambda}})$.

Soient $A_{\lambda+1}$, $Y_{\lambda+1}$ les coefficients de ce système où les inconnues $X_{\lambda+1}$ sont les dérivées principales de cote première $P+\lambda+1$: $A'_{\lambda+1}$, $Y'_{\lambda+1}$ les coefficients du système $(\mathfrak{W}'_{P+\lambda+1})$ aux inconnues $X'_{\lambda+1}$. Les $Y'_{\lambda+1}$ sont positifs au sens strict. D'autre part, chaque $|A_{\lambda+1}|$, $|Y_{\lambda+1}|$ est inférieur au $A'_{\lambda+1}$, $Y'_{\lambda+1}$ correspondant. Donc $(\mathfrak{W}_{P+\lambda+1})$ a une solution et une seule $(X_{\lambda+1})$ et les $X_{\lambda+1}$ satisfont aux inégalités $|X_{\lambda+1}| \leqq X'_{\lambda+1}$.

La démonstration précédente suffit à prouver que le système $\mathfrak{W}$ a effectivement une solution et une seule dont les valeurs initiales sont nulles : 1° les coefficients des développements des inconnues sont

déterminés d'une manière unique; 2° les développements sont convergents puisque les valeurs absolues de ces coefficients sont respectivement inférieures aux coefficients de certaines séries convergentes (constituant la solution supposée du système [illegible]). Ces développements satisfont d'ailleurs évidemment au système [illegible].

4. La question posée au début du n° 3 est ramenée à la suivante :

Étant donné un système (S) ayant les propriétés a_2, b_2, indiquer des cas *où l'on peut former un système (S) majorant tel que* [illegible] *soit vérifié par un système de fonctions u dont les développements aient leurs coefficients tous positifs.*

Nous supposerons que des cotes aient été attribuées aux fonctions et aux variables (II, 4) ; il en résulte, comme il a été expliqué, un certain classement des dérivées des inconnues.

Les coefficients (L et R) du système S admettent une majorante commune de la forme $\frac{M}{1-t}$, où M représente un nombre positif et t le quotient par le nombre positif r de la somme de toutes les variables indépendantes et de toutes les dérivées de cote première inférieure à P. Soit s l'expression obtenue en remplaçant, dans l'expression algébrique de t, $x_1 + x_2 + \ldots + x_r$ par $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \ldots + \xi_r x_r$; si les ξ sont des nombres supérieurs à 1, $\frac{M}{1-s}$ est encore une majorante pour les L et R. $\frac{M_1}{1-s}$ où M_1 *est un nombre quelconque* supérieur à M est encore une majorante pour tous les L, R ; supposons que l'on sache de plus que la valeur absolue du terme constant d'une fonction L particulière est inférieure à $M_2 < M_1$, on pourra prendre pour majorante de cette fonction L :

$$\frac{M}{1-s} = M + M_2 = \frac{M_1}{1-s} + (M - M_1).$$

Telle est la forme des majorantes que l'on utilisera : les ξ seront choisis d'une manière unique pour tous les termes de toutes les équations ; les M_1, M_2 pourront varier d'un terme à l'autre.

Sans nous préoccuper des conditions d'inégalité auxquelles doivent satisfaire les M, nous allons tout d'abord choisir leurs expressions en

fonction d'un certain nombre de paramètres (les ξ; $\zeta, \ldots$; $\lambda, \ldots$; $\mu, \ldots$; $\rho, \ldots$) de manière que (S′) et par suite $\mathfrak{M}'$ aient certainement une solution à coefficients tous positifs.

Puis nous nous proposerons de choisir les paramètres $\xi, \zeta, \lambda, \mu, \rho$, de manière que (S′) soit majorant pour le système (S) donné; nous verrons que ce choix est possible moyennant quelques réserves « d'inégalité » : les termes constants des coefficients relatifs aux dérivées « non antérieures » au premier membre correspondant doivent être assez petits en valeur absolue. La proposition générale que nous avons en vue sera dès lors démontrée.

3. Soit N le nombre des fonctions inconnues $(u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(N)})$ ou, ce qui revient au même, le nombre des fonctions dont quelque dérivée figure dans un premier membre (*voir* note du n° **2**); $\lambda_{ik}, \mu_{ik}, \rho_{ik}, \zeta_{ik}$ $(N^2 + N)$ nombres positifs provisoirement arbitraires $(i, k = 1, 2, \ldots, N)$.

Soit H_i le nombre des dérivées de cote première P (ou, ce qui revient au même, d'ordre p) de la fonction $u^{(i)}$. Soit $u^{(k)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}$ un des premiers membres. Le coefficient R′ de l'équation correspondante sera

$$\frac{1}{(1-\xi)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p}}\,\rho_{ik}\,\zeta_{\alpha_1}\zeta_{\alpha_2}\ldots\zeta_{\alpha_p}.$$

Dans la même équation, le coefficient L′ de $u^{(k)}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_q}$ sera

$$\frac{1}{(1-\xi)^{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_q}}\left(\frac{\lambda_{ik}}{H_i}\,\zeta_{\beta_1}\zeta_{\beta_2}\ldots\zeta_{\beta_q} + \frac{\mu_{ik}}{H_i}\,\zeta_{\beta_1}\zeta_{\beta_2}\ldots\zeta_{\beta_q}\right).$$

Nous obtenons un système aux dérivées partielles (S′) bien défini, à la valeur numérique près des constantes $\xi, \zeta, \lambda, \mu, \rho$.

Cherchons à satisfaire à ce système par un système de fonctions

$$u^{(i)} = U^{(i)}(\xi, \zeta, \ldots, \lambda, \ldots, \mu, \ldots, \rho, \ldots),$$

où les U désignent des fonctions d'une seule variable

$$N = \xi + \zeta + \ldots + \lambda + \ldots + \mu + \ldots + \rho + \ldots.$$

On voit immédiatement que l'on a

$$\ldots = \ldots \frac{1}{\ldots}$$

en désignant par $U^{(\lambda_1 \ldots \lambda_n)}$ la dérivée d'ordre $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$ de la fonction U_i.

s devient une certaine expression en $X, U, U', \ldots$

$$s_i = X + \xi_1 U_1 + \xi_2 U_2 + \ldots + \xi_N U_N$$
$$+ (\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_N)(\xi_1 U_1 + \xi_2 U_2 + \ldots + \xi_N U_N) + \ldots$$

Les équations dont les premiers membres sont des dérivées d'une fonction déterminée $u^{(i)}$ conduisent toutes *à la même équation*

$$(1) \qquad (U_i)^{(p)} = \sum_{j=1}^{j=N} \left(\frac{\lambda_{ij} + \mu_{ij}}{1 - s_i} - \mu_{ij} \right) (U_j)^{(p)} - \frac{\mu_{ij}}{1 - s_i}.$$

Les N fonctions U doivent satisfaire au système des N équations différentielles ordinaires obtenues en faisant dans la précédente $i = 1, 2, \ldots, N$.

Si le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 1 - \lambda_{11} & -\lambda_{12} & \ldots & -\lambda_{1N} \\ -\lambda_{21} & 1 - \lambda_{22} & \ldots & -\lambda_{2N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda_{N1} & \ldots & \ldots & 1 - \lambda_{NN} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, le système précédent définit les $U_i^{(p)}$ comme fonctions holomorphes de X et des dérivées d'ordre inférieur à p_1, $p_2, \ldots, p_N$ (ou de cote première inférieure à P) des $U_1, U_2, \ldots, U_N$ (au voisinage du système de valeurs $0, 0, \ldots, 0$); il a une solution et une seule s'annulant ainsi que ces dérivées pour $X = 0$. Connaissant les valeurs pour $X = 0$ des dérivées de cote première P, $P + 1, \ldots, P' - 1$ des U, ce système dérivé $P' - P$ fois permet d'avoir la valeur pour $X = 0$ des dérivées de cote première P'.

Les équations (1) s'écrivent encore

$$(2) \qquad U_i^{(p)} = U_i^{(p)} s_i + \sum_{j=1}^{j=N} \left(\lambda_{ij} + \mu_{ij} s_i \right) (U_j)^{(p)} + \varepsilon.$$

Supposons que les N inégalités suivantes soient vérifiées (au sens strict) :

$$\sum_{j=1}^{j=N} \lambda_{ij} \leqq 1$$

Le déterminant D est alors certainement différent de o (*voir* lemme II).

Les valeurs initiales des $U_i^{(P)}$ satisfont au système

$$(U_i^{(P)})_0 = \sum_{i=1}^{i=N} \lambda_{ik} (U_k^{(P-1)})_0.$$

La solution de ce système est donnée par des formules

$$(U_i^{(P)})_0 = \sum_{i=1}^{i=N} \lambda'_{ik} \rho_k,$$

où les λ'_{ik} sont *positifs* (lemme II). Les ρ étant positifs, on en conclut que les valeurs initiales des dérivées de cote première P des U sont positives (sens large).

Je dis qu'il en est de même des valeurs initiales des dérivées de cote première P′ (P′ quelconque > P). Admettons qu'il en soit ainsi pour les dérivées de cote première inférieure ou égale à P′ − 1. Dérivons les équations (2) P′ − P fois ; les deuxièmes membres obtenus sont des polynomes relativement à X, aux U et à leurs dérivées ; les coefficients de ces polynomes sont tous positifs ; d'autre part, les coefficients des dérivées de cote première P′ sont précisément les coefficients des dérivées de cote première P dans l'équation (2). Les valeurs initiales des dérivées de cote première P′ sont donc données par un système de la forme

$$(U_i^{(P'-P)})_0 = \sum_{i=1}^{i=N} \lambda_{ik} (U_i^{(P'-P-1)})_0 + \rho'_i,$$

où les ρ'_i désignent des quantités positives (résultats de la substitution de quantités positives dans des polynomes à coefficients positifs). Ces valeurs sont donc toutes positives.

Si donc les λ_{ik} satisfont aux inégalités

$$\sum_{i=1}^{i=N} \lambda_{ik} < 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, N),$$

on pourra affirmer que le système S′ a une solution à coefficients tous

positifs (sens large), la solution

$$[illegible] \quad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

6. 1° Fixons les valeurs positives (sens strict) des λ de manière que les N inégalités

$$\sum_{i}^{N} \lambda [illegible] 1$$

soient vérifiées (au sens strict).

2° Parmi les L′ distinguons les coefficients des dérivées antérieures au premier membre correspondant. Pour les systèmes d'indices $i, k; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ qui leur correspondent, fixons les quantités $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n; \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ de manière que l'on ait

$$\text{(I)} \qquad [illegible] \quad 1,$$

$$\text{(II)} \qquad [illegible] \quad \text{M}$$

ou encore

$$[illegible] \quad \text{MH}.$$

Ce choix est possible d'après le lemme (III) (*voir* ce lemme en annexe).

3° Soit $i, k'; \alpha, \alpha, \ldots, \alpha; \beta, \beta, \ldots, \beta$ le système d'indices correspondant à un autre L′; nous fixerons $\mu_{ik'}$ (positif sens large) de manière que l'on ait

$$\lambda [illegible] \quad \text{M}.$$

4° Fixons encore les ρ_i de manière que l'on ait

$$[illegible] \quad \text{M}.$$

Ces choix étant faits, les R′ sont majorants pour les R correspondants; les L′ de première espèce (2°) sont majorants pour les (L) correspondants; car dès que

$$[illegible]$$

est majorant pour une fonction, il en est de même de

$$\frac{1}{1-s}\,\frac{\lambda_{ik}+\mu_{ik}}{H_k}\,\frac{\zeta_i\,\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\cdots\xi_n^{\alpha_n}}{\zeta_k\,\xi_1^{\beta_1}\xi_2^{\beta_2}\cdots\xi_n^{\beta_n}} - \frac{\lambda_{ik}}{H_k}\,\frac{\zeta_i\,\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\cdots\xi_n^{\alpha_n}}{\zeta_k\,\xi_1^{\beta_1}\xi_2^{\beta_2}\cdots\xi_n^{\beta_n}}.$$

Il en est de même pour les L′ de deuxième espèce (3°), *à condition* que le terme constant du L qui correspond au système d'indices i', k'; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ *soit inférieur, en valeur absolue*, à

$$\frac{\lambda_{ik}}{H_k}\,\frac{\zeta_i\,\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\cdots\xi_n^{\alpha_n}}{\zeta_k\,\xi_1^{\beta_1}\xi_2^{\beta_2}\cdots\xi_n^{\beta_n}}.$$

7. *Conclusion.* — Nous venons de démontrer aux n°s **5** et **6** les divers points annoncés au n° **4**.

Nous en retiendrons particulièrement la conséquence suivante :

« Soit un système (C) satisfaisant aux conditions a, b (*voir* II, **5**). Donnons-nous *arbitrairement* un système de fonctions (*holomorphes* autour de $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$) pour les « fonctions initiales » (dont la forme est définie par les premiers membres) (I, **16** et **17**). Supposons que les valeurs à l'origine qui en résultent pour les dérivées *susceptibles* de figurer dans les deuxièmes membres forment des systèmes de valeurs *ordinaires* pour ces deuxièmes membres. Supposons enfin que le système soit *complètement intégrable* (ce dont on s'assurera par le procédé indiqué au n° **9**, II). Il existe un système de fonctions holomorphes autour de $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, et un seul, qui satisfait au système (C) et aux conditions initiales choisies. »

Trois lemmes d'Algèbre.

I. (¹) *Soient* A, B, ..., C″ *des quantités positives ou nulles. Supposons qu'il existe un système de nombres positifs (sens strict)* X, Y, Z, U, V, W *tels que l'on ait*

$$(1)\qquad \begin{cases} X = AX + BY + CZ + U, \\ Y = AX + BY + CZ + V, \\ Z = AX + BY + CZ + W. \end{cases}$$

(¹) *Cf.* RIQUIER, *Systèmes*, p. 369.

Soient $a, b, \ldots, c'', u, v, w$, des quantités dont les valeurs absolues sont respectivement inférieures (ou égales) à A, B, ..., C'', U, V, W.

1° *Le système d'équations en x, y, z :*

$$(1)\quad \begin{cases} x = a\,x + b\,y + c\,z + u, \\ y = a'\,x + b'\,y + c'\,z + v, \\ z = a''\,x + b''\,y + c''\,z + w, \end{cases}$$

a une solution ;

2° *Il n'en a qu'une : x, y, z ;*

3° *On a, pour cette solution, les inégalités*

$$|x| \leqq X, \quad |y| \leqq Y, \quad |z| \leqq Z.$$

Remarquons tout d'abord que, si l'on prouve la première des propositions précédentes, on aura prouvé par là même que le système (1), où les $a, b, \ldots, c''$ conservent la même signification et où u, v, w désignent des nombres *quelconques*, a *une solution et une seule*, autrement dit que « son déterminant » sera différent de zéro. Si, en effet, le déterminant des coefficients des inconnues est nul, on sait, d'après la théorie des systèmes linéaires, que le système (1) (où $a, b, \ldots, c''$ gardent des valeurs déterminées) *n'est possible* que si u, v, w sont assujettis à des *conditions d'égalité* : or l'énoncé n'assujettit u, v, w qu'à des *conditions d'inégalité* : ces quantités peuvent être choisies indépendamment l'une de l'autre, de manière seulement que $|u|, |v|, |w|$ soient inférieurs à U, V, W, quantités toutes trois essentiellement positives.

Il nous suffira donc de prouver les propositions 1° et 3°.

Posons :

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} X_1 = U, \\ Y_1 = V, \\ Z_1 = W; \end{cases}$$

$$(\mathrm{III})\quad \begin{cases} X_n = A\,X_{n-1} + B\,Y_{n-1} + C\,Z_{n-1} + U, \\ Y_n = A'\,X_{n-1} + B'\,Y_{n-1} + C'\,Z_{n-1} + V, \\ Z_n = A''\,X_{n-1} + B''\,Y_{n-1} + C''\,Z_{n-1} + W. \end{cases}$$

Montrons que lorsque n tend vers l'infini, X_n, Y_n, Z_n tendent en croissant (sens large) vers des limites ξ, η, ζ; il résultera d'ailleurs de là et des formules (III) que (ξ, η, ζ) satisfait au système (I).

1° $X_n - X_{n-1}$, $Y_n - Y_{n-1}$, $Z_n - Z_{n-1}$ sont positifs ou nuls. Le fait est exact pour $n = 2$, car ces quantités sont alors

$$AU + BV + CW, \qquad A'U + B'V + C'W, \qquad A''U + B''V + C''W.$$

D'autre part, les égalités (IV) déduites des équations (III) écrites pour les valeurs n et $n-1$,

$$(\mathrm{IV})\quad \begin{cases} X_n - X_{n-1} = A(X_{n-1} - X_{n-2}) + B(Y_{n-1} - Y_{n-2}) + C(Z_{n-1} - Z_{n-2}), \\ Y_n - Y_{n-1} = A'(X_{n-1} - X_{n-2}) + B'(Y_{n-1} - Y_{n-2}) + C'(Z_{n-1} - Z_{n-2}), \\ Z_n - Z_{n-1} = A''(X_{n-1} - X_{n-2}) + B''(Y_{n-1} - Y_{n-2}) + C''(Z_{n-1} - Z_{n-2}) \end{cases}$$

montrent que, s'il est vrai pour la valeur $n-1$ de l'indice, il est encore vrai pour la valeur n. Le fait est général : X_n, Y_n, Z_n ne décroissent jamais, quand n augmente.

2° $X - X_n$, $Y - Y_n$, $Z - Z_n$ sont positifs ou nuls.

Le fait est exact pour $n = 1$, les quantités considérées sont alors

$$AX + BY + CZ, \qquad A'X + B'Y + C'Z, \qquad A''X + B''Y + C''Z.$$

D'autre part, les égalités, déduites de (I) et (III),

$$\begin{aligned} X - X_n &= A(X - X_{n-1}) + B(Y - Y_{n-1}) + C(Z - Z_{n-1}), \\ Y - Y_n &= A'(X - X_{n-1}) + B'(Y - Y_{n-1}) + C'(Z - Z_{n-1}), \\ Z - Z_n &= A''(X - X_{n-1}) + B''(Y - Y_{n-1}) + C''(Z - Z_{n-1}) \end{aligned}$$

prouvent que s'il est vrai pour la valeur $n-1$ de l'indice, il est vrai pour la valeur n. Le fait est général : X_n, Y_n, Z_n ne dépassent pas X, Y, Z.

Des remarques précédentes résulte immédiatement la conclusion : X_n, Y_n, Z_n tendent (en croissant) vers des limites ξ, η, ζ qui sont au plus égales respectivement à X, Y, Z, et qui, comme X, Y, Z, forment un système de solutions de (I).

Posons maintenant

$$(2)\quad \begin{cases} x_1 = u, \\ y_1 = v, \\ z_1 = w; \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} x_n = a\,x_{n-1} + b\,y_{n-1} + c\,z_{n-1} = u, \\ y_n = a'\,x_{n-1} + b'\,y_{n-1} + c'\,z_{n-1} = v, \\ z_n = a''\,x_{n-1} + b''\,y_{n-1} + c''\,z_{n-1} = w. \end{cases}$$

Montrons que l'on a

$$|x_n - x_{n-1}| \leq X_n - X_{n-1}, \quad |y_n - y_{n-1}| \leq Y_n - Y_{n-1}, \quad |z_n - z_{n-1}| \leq Z_n - Z_{n-1}.$$

Le fait est exact pour $n = 2$; il se réduit au suivant :

$$|a'u + b'v + c'w| \leq A'U + B'V + C'W,$$
$$|a''u + b''v + c''w| \leq A''U + B''V + C''W,$$
$$|a'''u + b'''v + c'''w| \leq A'''U + B'''V + C'''W.$$

Mais on a

$$x_n - x_{n-1} = a'(x_{n-1} - x_{n-2}) + b'(y_{n-1} - y_{n-2}) + c'(z_{n-1} - z_{n-2}),$$
$$y_n - y_{n-1} = a''(x_{n-1} - x_{n-2}) + b''(y_{n-1} - y_{n-2}) + c''(z_{n-1} - z_{n-2}),$$
$$z_n - z_{n-1} = a'''(x_{n-1} - x_{n-2}) + b'''(y_{n-1} - y_{n-2}) + c'''(z_{n-1} - z_{n-2}).$$

Si donc le fait est exact pour la valeur $n - 1$ de l'indice on a

$$|x_n - x_{n-1}| \leq A'(X_{n-1} - X_{n-2}) + B'(Y_{n-1} - Y_{n-2}) + C'(Z_{n-1} - Z_{n-2}),$$
$$|y_n - y_{n-1}| \leq A''(X_{n-1} - X_{n-2}) + B''(Y_{n-1} - Y_{n-2}) + C''(Z_{n-1} - Z_{n-2}),$$
$$|z_n - z_{n-1}| \leq A'''(X_{n-1} - X_{n-2}) + B'''(Y_{n-1} - Y_{n-2}) + C'''(Z_{n-1} - Z_{n-2}).$$

Mais ces deuxièmes membres de ces inégalités sont égaux, d'après (IV), à $X_n - X_{n-1}$, $Y_n - Y_{n-1}$, $Z_n - Z_{n-1}$. Le fait est donc général.

La série $x_1 + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) + \ldots$ est convergente : la valeur absolue de sa somme est au plus égale à ξ.

Ainsi x_n, y_n, z_n tendent vers des limites x, y, z telles que $|x| \leq \xi$, $|y| \leq \eta$, $|z| \leq \zeta$. D'après (3), ces limites forment un système solution de (1).

La proposition 1° est donc démontrée.

Comme nous l'avons remarqué au début, il résulte de là que le déterminant des coefficients des inconnues dans (1) est *différent de zéro*, on voit qu'il en est de même du déterminant correspondant de (I), en donnant aux a, b, ... les valeurs A, B, ...; (I) *n'a qu'une solution ;* ξ, η, ζ n'est autre que X, Y, Z.

La proposition est donc entièrement démontrée.

Nous avons obtenu en même temps un théorème plus général que l'on peut énoncer de la manière suivante :

Soient A_{ik} des nombres positifs (ou nuls) ; a_{ik} des nombres quelconques tels que $|a_{ik}| \leq A_{ik}$:

1° *Si le système d'inégalités*

$$(1) \qquad X_i - \sum_{k=1}^{k=N} A_{ik} X_k > 0,$$

prises au sens strict, est résoluble en nombres X positifs (¹), *le déterminant du système de formes linéaires*

$$x_i - \sum_{k=1}^{k=N} a_{ik} x_k$$

est différent de zéro.

2° *Les X désignant un système particulier de solutions positives du système* (1), *appelons* Y_i *la quantité positive*

$$Y_i = \sum_{k=1}^{k=N} A_{ik} X_k;$$

y_i *des nombres quelconques tels que* $|y_i| < Y_i$, *la solution du système d'équations*

$$x_i - \sum_{k=1}^{k=N} a_{ik} x_k = y_i$$

satisfait aux inégalités

$$|x_i| < X_i.$$

II. Nous avons utilisé la proposition suivante :

Soient A_{ik} n^2 *nombres positifs (ou nuls) tels que l'on ait*

$$\sum_{k=1}^{k=n} A_{ik} < 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Le système d'équations en x

$$x_i - \sum_{k=1}^{k=n} A_{ik} x_k = y_i$$

(¹) On voit immédiatement qu'il n'est pas nécessaire d'ajouter ici « au sens strict ».

(où les y sont arbitraires) *admet une solution et une seule; cette solution est donnée par les formules*

$$x_i = \sum_{k=1}^{k=n} B_{ik} y_k,$$

où les B *sont positifs (ou nuls).*

Cette proposition apparaîtra comme un cas particulier d'une proposition plus générale.

Considérons le système d'équations en x, y, z :

$$(1) \qquad \begin{cases} x = a\,x + b\,y + c\,z + u, \\ y = a'\,x + b'\,y + c'\,z + v, \\ z = a''\,x + b''\,y + c''\,z + w, \end{cases}$$

où $a, b, \ldots, c'', u, v, w$ sont des nombres quelconques tels que

$$|a| + |b| + |c|, \quad |a'| + |b'| + |c'|, \quad |a''| + |b''| + |c''|$$

soient < 1 ; soit k le plus grand de ces trois nombres.

Soit x_1, y_1, z_1 un système de valeurs initiales quelconque pour x, y, z. Posons

$$(2) \qquad \begin{cases} x_n = a\,x_{n-1} + b\,y_{n-1} + c\,z_{n-1} + u, \\ y_n = a'\,x_{n-1} + b'\,y_{n-1} + c'\,z_{n-1} + v, \\ z_n = a''\,x_{n-1} + b''\,y_{n-1} + c''\,z_{n-1} + w \end{cases} \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

On tire de là

$$\begin{aligned} x_n - x_{n-1} &= a\,(x_{n-1} - x_{n-2}) + b\,(y_{n-1} - y_{n-2}) + c\,(z_{n-1} - z_{n-2}), \\ y_n - y_{n-1} &= a'\,(x_{n-1} - x_{n-2}) + b'\,(y_{n-1} - y_{n-2}) + c'\,(z_{n-1} - z_{n-2}), \\ z_n - z_{n-1} &= a''\,(x_{n-1} - x_{n-2}) + b''\,(y_{n-1} - y_{n-2}) + c''\,(z_{n-1} - z_{n-2}). \end{aligned}$$

Soit δ_n le plus grand des trois nombres

$$|x_n - x_{n-1}|, \quad |y_n - y_{n-1}|, \quad |z_n - z_{n-1}|.$$

Des égalités précédentes, on tire :

$$|x_n - x_{n-1}| \leq |a| + |b| + |c|\,\delta_{n-1} \leq k\,\delta_{n-1}$$

et deux inégalités analogues pour

$$|y_n - y_{n-1}|, \quad |z_n - z_{n-1}|.$$

d'où

$$\sigma_n < k\sigma_{n-1}.$$

Les séries

$$x_1 + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) + \ldots$$
$$y_1 + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_n - y_{n-1}) + \ldots$$
$$z_1 + (z_2 - z_1) + \ldots + (z_n - z_{n-1}) + \ldots$$

sont donc absolument convergentes; soient x, y, z leurs sommes. D'après (2), x, y, z est solution du système (1). Le système (1) n'a d'ailleurs qu'une solution puisque u, v, w ne sont assujetties à aucune restriction. Nous avons obtenu *la* solution du système.

Supposons a, b, ..., c'' positifs et fixes. Partons du système de valeurs $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$; quels que soient u, v, w positifs, les valeurs x_n, y_n, z_n sont positives; les équations (2) montrent en effet que ce fait est vrai pour $n = 2$ et que s'il est vrai pour la valeur $n - 1$ de l'indice, il l'est aussi pour la valeur n. Les valeurs x, y, z sont donc positives. En particulier, en faisant $u = 1$, $v = w = 0$, on voit que les coefficients de u dans les expressions de x, y, z sont tous trois positifs; il en est de même des coefficients de v, w.

Nous avons donc obtenu la proposition générale :

Soient a_{ik} n^2 nombres quelconques tels que

$$\sum_{k=1}^{k=n} |a_{ik}| < 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

le déterminant Δ du système de formes linéaires

$$x_i - \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} x_k$$

est différent de zéro; supposons les a_{ik} *réels;* le déterminant Δ étant une fonction continue des a_{ik} et le domaine où varient les a_{ik} étant d'un seul tenant, on peut affirmer que Δ garde *un signe constant;* ce signe est d'ailleurs *le signe* $+$, qu'il a lorsque les a_{ik} s'annulent.

Si tous les a_{ik} sont de plus positifs, les mineurs à $n - 1$ lignes et $n - 1$ colonnes du déterminant Δ sont eux aussi positifs (dans cette dernière phrase, *positif* doit être pris au sens large).

III. *Étant donnés un système de monomes quelconques en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en nombre fini et un nombre positif quelconque* Λ, *on peut trouver un nombre f_0 et des fonctions de $1, 2, \ldots, n-1$ variables $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$, tels que si l'on a à la fois*

$$x_1 > f_0, \quad x_2 > f_1(x_1), \quad x_3 > f_2(x_1, x_2), \quad \ldots,$$
$$x_n > f_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

le rapport de chacun des monomes à tout monome du système plus bas que lui est supérieur à Λ.

La proposition est évidente lorsque $n = 1$. Admettons-la lorsque le nombre des variables est égal à $n - 1$, et démontrons-la pour n.

Considérons le système partiel formé par tous ceux des monomes donnés où l'exposant de x_n est λ ; soient $f^{\lambda}_0, f^{\lambda}_1, \ldots, f^{\lambda}_{n-2}$ le nombre et les fonctions telles que les inégalités

$$x_1 > f^{\lambda}_0, \quad x_2 > f^{\lambda}_1(x_1), \quad x_3 > f^{\lambda}_2(x_1, x_2), \quad \ldots, \quad x_n > 0$$

entraînent la conséquence que le rapport de chacun des monomes à tout monome du système partiel plus bas que lui soit supérieur à Λ. Cela étant fait pour chacune des valeurs de λ, appelons f_0 le plus grand des f^{λ}_0 ; $f_1(x_1)$ une fonction plus grande que tous les $f^{\lambda}_1(x_1)$; $f_2(x_1, x_2)$ une fonction plus grande que tous les $f^{\lambda}_2(x_1, x_2)$, ... ; $f_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ une fonction plus grande que tous les $f^{\lambda}_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$; les inégalités

$$x_1 > f_0, \quad x_2 > f_1(x_1), \quad x_3 > f_2(x_1, x_2), \quad \ldots, \quad x_n > 0$$

entraînent cette conséquence : le rapport de chacun des monomes du système à chacun de ceux, plus bas que lui, *où x_n a le même exposant*, est supérieur à Λ. Exprimons maintenant que le rapport de chaque monome du système à tout monome contenant x_n à un exposant inférieur est supérieur à Λ ; nous obtenons un certain nombre fini d'inégalités de la forme $x_n > \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$; on appellera $f_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ une fonction plus grande que tous les φ ; $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ satisfont à toutes les conditions de l'énoncé.

Corollaire. — Étant donnés un système quelconque de monomes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en nombre fini et un nombre positif Λ, on peut choisir pour les x un système de valeurs, toutes plus grandes que 1, tel que

le rapport de chacun des monomes à chacun des monomes plus bas soit supérieur à A.

Il suffit de choisir pour x_1 un nombre supérieur à 1 et f_1, pour x_2 un nombre supérieur à 1 et $f_1(x_1)$, pour x_3 un nombre supérieur à 1 et $f_2(x_1, x_2)$, etc.

Le théorème précédent s'applique encore lorsqu'on entend par monome une expression de la forme $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ où les α sont des entiers positifs, négatifs ou nuls.

Application. — Considérons un système de variables et de fonctions auxquelles des cotes ont été attribuées suivant les indications données au Chapitre II (n° 4). On peut (¹) sans changer le classement substituer aux cotes données des cotes toutes positives; il nous suffira de supposer que les cotes des *variables indépendantes* sont positives.

Faisons correspondre aux variables et aux fonctions des nombres positifs $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n; \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_N$; à la dérivée $u^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}_{\lambda}$ le monome $\zeta_\lambda \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$; adoptons pour ces monomes les termes mêmes (cotes, classes, etc.) qui ont été adoptés pour les dérivées correspondantes; considérons, pour fixer les idées, le système Σ des monomes de cote

(¹) Soient $D_{11}, D_{12}, \ldots, D_{1N}$ les cotes premières des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_N$.

Ajoutons à chacune des cotes $\lambda^{\text{èmes}}$ des variables ($\lambda = 1, 2, \ldots, n$) un même nombre entier a_λ tel que les sommes obtenues soient toutes positives; ajoutons à la cote $\lambda^{\text{ème}}$ de u_k le nombre $D_{1k} a_\lambda$.

Les résultats obtenus forment un système de cotes qui définit le même classement que le classement primitif. Les cotes premières n'ont pas changé; considérons donc deux quantités qui aient mêmes cotes premières :

$$u^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}_{\alpha} \quad u^{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n}_{\beta}.$$

On a

$$D_{1\alpha} + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = D_{1\beta} + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n.$$

Les cotes $\lambda^{\text{èmes}}$ de ces deux quantités ont augmenté respectivement de

$$D_{1\alpha} a_\lambda + (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) a_\lambda, \quad D_{1\beta} a_\lambda + (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n) a_\lambda,$$

c'est-à-dire de valeurs égales.

Il est d'ailleurs évident qu'en ajoutant un même nombre à toutes les cotes de toutes les fonctions, on ne change pas le classement. On pourrait donc sans changer le classement rendre *toutes les cotes* positives.

première P et donnons-nous un nombre positif A : *on peut trouver* (¹) *un système de nombres* $\xi, \zeta, (\xi > 1)$ *tel que le rapport de chacun des monomes de* Σ *à chacun des monomes antérieurs du même système* Σ *soit supérieur à* A.

Soient $C_{2i}, C_{3i}, \ldots, C_{si}$ les cotes $2^e, 3^e, \ldots, s^{\text{ième}}$ de $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$; $D_{2k}, D_{3k}, \ldots, D_{sk}$ les cotes $2^e, 3^e, \ldots, s^{\text{ième}}$ de $u_k (k = 1, 2, \ldots, N)$ et soient $\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_s$ $s - 1$ nouvelles variables.

Posons

$$\xi = \theta_2^{C_2} \theta_3^{C_3} \ldots \theta_s^{C_s}, \qquad \zeta_k = \theta_2^{D_{2k}} \theta_3^{D_{3k}} \ldots \theta_s^{D_{sk}}.$$

On aura

$$\begin{aligned} \zeta_k \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \ldots \xi_n^{\alpha_n} &= \theta_2^{D_{2k} + \alpha_1 C_{2i} + \alpha_2 C_{3i} + \ldots + \alpha_n C_{si}} \theta_3^{D_{3k} + \alpha_1 C_{2i} + \alpha_2 C_{3i} + \ldots + \alpha_n C_{si}} \ldots \theta_s^{D_{sk} + \alpha_1 C_{2i} + \alpha_2 C_{3i} + \ldots + \alpha_n C_{si}} \\ &= \theta_2^{C_2} \theta_3^{C_3} \ldots \theta_s^{C_s} \end{aligned}$$

en appelant $C_2, C_3, \ldots, C_s$ les cotes $2^e, 3^e, \ldots, s^{\text{ième}}$ de $\zeta_k \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$.

Les monomes du système Σ se répartissent comme on l'a vu en classes. Nous voyons ici que tous les monomes μ d'une même classe sont égaux au même monome μ en $\theta_2, \ldots, \theta_s$, et que de plus un monome μ est postérieur ou antérieur à μ' suivant que le monome en θ correspondant à μ est plus haut ou plus bas que le monome en θ correspondant à μ' (à condition toutefois de ranger les θ dans l'ordre inverse (²) des indices $\theta_s, \theta_{s-1}, \ldots, \theta_2$).

On choisira successivement $\theta_s, \theta_{s-1}, \ldots, \theta_2$ d'après les indications du *corollaire* précédent. Le rapport de chacun des monomes de Σ à chacun des monomes antérieurs du même système sera supérieur à A; les θ étant supérieurs à 1 et les cotes des variables indépendantes étant positives, les ξ sont aussi supérieurs à 1 puisque l'on a

$$\xi = \theta_2^{C_2} \theta_3^{C_3} \ldots \theta_s^{C_s}.$$

(¹) *Cf.* Riquier, *Systèmes*, p. 255.

(²) *Voir* la définition (Chapitre I, n° 10).

CHAPITRE IV.

EXEMPLES.

Exemple I. — Soit le système aux dérivées partielles à *une* fonction inconnue u de cinq variables indépendantes x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 obtenu en égalant à zéro les expressions

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} A &= p_{13} - p_{22} \\ B &= p_{14} - p_{23} \\ C &= p_{15} - p_{24} \\ D &= p_{35} - p_{15} \\ E &= p_{34} - p_{23} \\ F &= p_{44} - p_{33} \end{aligned}\right. \qquad \left(p_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j}\right);$$

nous considérons $p_{13}, p_{14}, p_{15}, p_{33}, p_{34}, p_{44}$ comme tenant le rôle de premiers membres (*voir* II, **5** et **8**).

1° Adoptons pour les variables l'ordre x_2, x_5, x_4, x_3, x_1.

Les variables multiplicatrices sont respectivement :

Pour $x_1 x_3$	x_2, x_5, x_4, x_3, x_1
» $x_1 x_4$	x_2, x_5, x_4, x_3
» $x_1 x_5$	x_2, x_5, x_1
» x_3^2	x_2, x_5, x_4, x_3
» $x_3 x_4$	x_2, x_5, x_4
» x_4^2	x_2, x_5, x_4

Les monomes correspondant aux premiers membres forment un système de monomes complet (I, **8**) (relativement au classement x_2, x_5, x_4, x_3, x_1). On vérifie, en effet, que les produits de $x_2^2, x_2 x_5, x_5^2$ par x_1 sont égaux aux produits de $x_1 x_3$ par x_2, $x_1 x_4$ par x_5, $x_1 x_5$ par x_4. Les identités

$$x_3 x_4 \times x_3 = x_3^2 \times x_4, \qquad x_4^2 \times x_3 = x_3 x_4 \times x_4,$$

puis

$$x_1 x_4 \times x_2 = x_1 x_5 \times x_5, \qquad x_1 x_4 \times x_5 = \text{[illegible]}$$

enfin

$$x_1 x_2 \times x_3 = x_1 x_4 \times x_5$$

achèvent de prouver que l'on a bien là un système de monomes complet.

2° Les équations données satisfont à la condition b (II, **5**) si l'on adopte les cotes suivantes pour les variables x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Cotes premières.....	1	1	1	1	1
» secondes.....	2	1	1	1	0
» troisièmes.....	1	0	1	0	0

qui donnent le classement suivant pour les dérivées du deuxième ordre :

$$p_{55} \quad \boxed{\begin{matrix} p_{25} \\ p_{45} \end{matrix}} \quad p_{35} \quad \boxed{\begin{matrix} p_{22} \\ p_{24} \\ p_{44} \end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix} p_{33} \\ p_{23} \\ p_{34} \end{matrix}} \quad p_{33} \quad \boxed{\begin{matrix} p_{12} \\ p_{14} \end{matrix}} \quad p_{13} \quad p_{11}$$

(la classe croissant lorsqu'on lit la ligne précédente de gauche à droite). C'est ainsi que p_{13} est postérieure à p_{22}, p_{14} à p_{23}, etc.

3° Le système donné est donc un système C_1 (II, **7**).

Ce système C_1 *est complètement intégrable*. Pour le reconnaître, nous sommes amené (II, **8**) à former les expressions

$$\begin{array}{ll} D_1 - A_3, & F_3 - F_2, \\ E_1 - A_4, & B_3 - A_5, \\ E_2 - B_4, & C_3 - A_5, \\ E_3 - D_4, & C_4 - B_5, \end{array}$$

où l'indice i désigne la dérivation par rapport à x_i.

On constate que ces expressions sont égales identiquement (c'est-à-dire quelle que soit la fonction u) aux expressions suivantes :

$$\begin{array}{ll} -B_2 - C_1, & -D_1 - C_3, \\ -C_2, & -D_2 - C_4, \\ -A_5 + F_1, & -E_3, \\ B_3, & -F_2, \end{array}$$

ce qui suffit, comme nous l'avons vu (n° **8**), à prouver que le système

proposé a une solution répondant à un système de conditions initiales *arbitraires* du type même de celles qui conviennent au système obtenu en égalant à zéro les premiers membres seuls

$$(p_{13} = p_{14} = p_{15} = p_{23} = p_{24} = p_{34} = 0).$$

Nous précisons ces conditions dans le paragraphe suivant (4°).

4° Les monomes *qui ne font pas partie du module défini par* les M se répartissent en un nombre fini de classes ($\mathfrak{N}$) (*voir* I, n° **9**); chacune de ces classes est engendrée par les produits d'un monome N par tous les monomes formés avec certaines variables (variables multiplicatrices pour ce monome N); en appliquant la méthode générale indiquée au n° **9** (I), on ne trouve dans le cas présent aucun $\mathfrak{N}_0$, ni $\mathfrak{N}_1$. Les $\mathfrak{N}$ sont les produits de :

$$\begin{array}{llll}
x_1^0 x_3^0 x_4^0 = 1 & \text{par les monomes en} & x_2, x_3 \\
x_1^0 x_3^0 x_4 = x_4 & \quad\text{»} & x_2, x_3 \\
x_1^0 x_3 x_4^0 = x_3 & \quad\text{»} & x_2, x_4 \\
x_1 x_3^0 x_4^0 x_5^0 = x_1 & \quad\text{»} & x_1, x_2
\end{array}$$

On pourra se donner arbitrairement (*voir* I, n° **15**) les valeurs de

$$u, \quad \frac{\partial u}{\partial x_4}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_5} \qquad \text{sur} \qquad x_1 = x_2 = x_3 = 0,$$

et la valeur de

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \qquad \text{sur} \qquad x_3 = x_4 = x_5 = 0.$$

Le système proposé aura une solution et une seule répondant à ces conditions (démonstration de convergence : III).

5° Considérons maintenant A, B, C, D, E, F *comme six fonctions quelconques* de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 et posons

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l}
a = D_1 - (A_3 - B_2 - C_1), \\
b = E_1 - (A_4 - C_2), \\
c = F_1 - (B_4 + A_5 - F_2), \\
d = E_3 - (D_4 + B_5), \\
e = F_3 - (F_4 - D_5 - C_3), \\
f = B_5 - (A_4 - D_5 - C_5), \\
g = C_4 - (A_5 - F_3), \\
h = C_5 - (B_5 - F_4).
\end{array}\right.$$

(Lorsque A, B, C, D, E, F représentent les expressions (1), a, b, c, d, e, f, g, h sont nulles.)

Considérons le système aux dérivées partielles obtenu en égalant à zéro les expressions a, b, c, d, e, f, g, h; $H_1, E_1, F_1, E_2, F_2, B_1, C_1, C_2$ tenant le rôle de « premiers membres » (II, **5** et **8**).

1° Ces premiers membres forment pour chacune des inconnues un système de monomes complet; 2° chaque second membre ne contient que des quantités *antérieures* au premier membre correspondant si l'on choisit convenablement les cotes des variables et des inconnues (*voir* II, **8**); 3° ce système est complètement intégrable (II, **10**). On le vérifie, d'ailleurs, par le procédé même qui a montré qu'il en était ainsi pour le système primitif obtenu en égalant les (1) à zéro : a, b, c, d, e, f, g, h étant définies par (2), on a, quelles que soient les fonctions A, B, C, D, E, F, les identités suivantes :

$$\begin{aligned} d_1 &= b_1 - a_2 - a_1 - a_2 - a_1 + a_1, \\ e_1 &= \ldots - F_2 = dF = a_1 - b_1, \\ h_1 &= g_1 - c_1 - f_1 \end{aligned}$$

Si maintenant, on égale à zéro les expressions

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} a &= -b_1 - a_1 b_2 + d_2 - a_1 - a_1 - \ldots \\ b &= a_1 - a_1 - a_1 + f_1 + d_2 + a_1 - b_1 \\ c &= a_2 - a_1 + a_2 - \ldots - f_1 + \ldots \end{aligned} \right.$$

où a, b, c, d, e, f, g, h représentent non plus les expressions (2), mais huit fonctions inconnues quelconques, on obtient un système dont les « premiers membres » $d_1, e_1, \ldots, h_1$ sont relatifs à *des inconnues toutes différentes*, chaque équation ne contenant dans son « second membre » que des dérivées antérieures à son « premier membre » : le système est complètement intégrable; mais on ne peut plus écrire d'identité comme dans les deux systèmes envisagés précédemment; la chaîne (II, **12**) est interrompue — on peut dire encore : les trois expressions (3) sont indépendantes.

Remarque. — En remplaçant dans (1) p_{ik} par le produit $x_i x_k$, on obtient un système de formes algébriques; on retrouve par la présente étude les résultats donnés par M. Hilbert au sujet de ce même

système de formes (*Math. Ann.*, t. XXXVI, p. 504). On a, de plus, ici : 1° un moyen régulier pour former les systèmes successifs; 2° une explication du fait que ces divers systèmes sont tous du premier ordre.

Exemple II. — Soit le système à une fonction inconnue u de n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ obtenu en égalant à zéro les n expressions

$$(1) \qquad A_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} - u\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

où f est une fonction connue des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

1° Les premiers membres $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$ correspondent à un système de monomes complet $x_1, x_2, \ldots, x_n$. — 2° Les « seconds membres » ne contiennent nécessairement que des quantités antérieures aux « premiers ». — 3° Le système est complètement intégrable. Les « variables multiplicatrices » de A_n seront $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $A_{n-1}, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, etc.

Nous supposerons, pour fixer les idées, $n = 4$. Les identités qui expriment que le système est complètement intégrable s'obtiennent sous la forme $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 0, a_5 = 0, a_6 = 0$, en désignant par $a_1, a_2, \ldots, a_6$ les expressions suivantes :

$$a_1 = \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} A_1\right) - \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1} A_2\right),$$

$$a_2 = \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_3} A_1\right) - \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1} A_3\right),$$

$$a_3 = \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_4} - \frac{\partial f}{\partial x_4} A_1\right) - \left(\frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1} A_4\right),$$

$$a_4 = \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_3} A_2\right) - \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} A_3\right),$$

$$a_5 = \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_4} - \frac{\partial f}{\partial x_4} A_2\right) - \left(\frac{\partial A_4}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} A_4\right),$$

$$a_6 = \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_4} - \frac{\partial f}{\partial x_4} A_3\right) - \left(\frac{\partial A_4}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_3} A_4\right).$$

(Nous gardons à dessein cette forme dissymétrique.)

Considérons maintenant le système aux dérivées partielles obtenu

en égalant les a à zéro, les A étant non plus les expressions (1), mais des fonctions inconnues quelconques. Les identités qui expriment que le système ainsi obtenu est complètement intégrable s'obtiennent sous la forme $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 0$, en désignant par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ les expressions suivantes :

$$\alpha_1 = \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_3} a_1\right) - \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} a_2\right) + \left(\frac{\partial a_4}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1} a_4\right),$$

$$\alpha_2 = \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_4} - \frac{\partial f}{\partial x_4} a_1\right) - \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} a_3\right) + \left(\frac{\partial a_5}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1} a_5\right),$$

$$\alpha_3 = \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_4} - \frac{\partial f}{\partial x_4} a_2\right) - \left(\frac{\partial a_5}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_3} a_5\right) + \left(\frac{\partial a_6}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1} a_6\right),$$

$$\alpha_4 = \left(\frac{\partial a_4}{\partial x_4} - \frac{\partial f}{\partial x_4} a_4\right) - \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_3} a_3\right) + \left(\frac{\partial a_6}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} a_6\right).$$

Le système aux dérivées partielles obtenu en *regardant maintenant les a comme six fonctions inconnues quelconques dans les équations* $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 0$ est encore complètement intégrable. L'identité unique qui exprime ce fait est

$$\mathcal{A} = \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_4} - \frac{\partial f}{\partial x_4} \alpha_1\right) - \left(\frac{\partial \alpha_4}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \alpha_4\right) + \left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \alpha_3\right) - \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_3} \alpha_2\right) = 0.$$

Remarques. — 1° On traiterait exactement de la même manière le cas de n variables $n > 4$.

2° On voit que, dans le présent exemple, il y a effectivement *n systèmes successifs*. (*Cf.* Hilbert, *Math. Ann.*, t. XXXVI, p. 505.)

D'ailleurs le système d'équations obtenu en égalant à zéro les dérivées *premières* et *secondes* d'une fonction inconnue répond à toutes les conditions posées; en le traitant de la même manière, on aura $n + 1$ systèmes successifs.

Exemple III. — Posons :

$$A = p_{11} + (a + a')p_{12} + aa'p_{13},$$
$$B = p_{12} + ap_{13} + bp_{23} + abp_{23},$$
$$C = p_{22} + (b + b')p_{23} + bb'p_{23},$$

où a, b, a', b' sont des fonctions données de x_1, x_2, x_3 et où p_{ik} représente la dérivée $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$ d'une fonction inconnue u.

Le système (p_{11}, p_{12}, p_{22}) est *complet* si l'on range les variables dans l'ordre x_3, x_2, x_1.

Les dérivées p_{11}, p_{12}, p_{22} sont *postérieures* aux autres dérivées du second ordre de u si l'on attribue à x_1, x_2, x_3 les cotes secondes 1, 1, 0.

Supposons que l'on ait

$$\frac{\partial a}{\partial x_2} + b\,\frac{\partial a}{\partial x_3} = 0, \qquad \frac{\partial b}{\partial x_1} + a\,\frac{\partial b}{\partial x_3} = 0,$$

$$\frac{\partial a}{\partial x_1} + a'\,\frac{\partial a}{\partial x_3} = 0, \qquad \frac{\partial b}{\partial x_2} + b'\,\frac{\partial b}{\partial x_3} = 0.$$

On a, quelle que soit $u(x_1, x_2, x_3)$, en se bornant aux cas où 1° ni a ni b n'est une constante, 2° a, b, a', b', sont des constantes,

$$\frac{\partial A}{\partial x_2} + b\,\frac{\partial A}{\partial x_3} - \left(\frac{\partial B}{\partial x_1} + a'\,\frac{\partial B}{\partial x_3}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial B}{\partial x_2} + b'\,\frac{\partial B}{\partial x_3} - \left(\frac{\partial C}{\partial x_1} + a\,\frac{\partial C}{\partial x_3}\right) = 0.$$

Le système $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ est « complètement intégrable »; donnons-nous *arbitrairement* sur $x_1 = x_2 = 0$ des valeurs (holomorphes) pour u, $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, $\frac{\partial u}{\partial x_2}$; le système a une solution (holomorphe) et une seule satisfaisant à ces conditions.

Les conditions d'intégrabilité complète sont réalisées en particulier quand $a = b = a' = b' = 0$; dans ce cas le système ne peut par aucun changement de variables indépendantes être ramené à la « forme canonique » donnée comme générale par M. Delassus. Les méthodes présentes n'offrent pas de cas exceptionnels de ce genre.

Sur un cas de diffraction des images des astres circulaires;

PAR MAURICE HAMY.

J'ai abordé, dans un Mémoire antérieur [1], l'étude d'un problème de diffraction astronomique qui s'énonce de la façon suivante :

« Un astre circulaire uniformément éclairé, de diamètre angulaire 2ε, de l'ordre de grandeur de celui du Soleil, étant observé au foyer d'une lunette diaphragmée par une fente rectiligne de largeur a et de longueur h, trouver la valeur de l'intensité lumineuse, le long de l'axe de symétrie de l'image parallèle au grand côté de la fente, dans une direction faisant l'angle φ, avec la droite allant de l'observateur au centre de l'astre. »

Mes recherches, sur ce sujet, poursuivies en supposant la largeur a très faible, en raison des simplifications que cette hypothèse introduit dans les raisonnements et les calculs, demandaient à être étendues au cas où la fente possède une largeur finie. Le présent Mémoire a pour objet d'indiquer les premiers résultats auxquels je suis parvenu, en considérant la question dans toute sa généralité.

L'Introduction est consacrée à des remarques concernant l'application de diverses formules résultant de théories générales, exposées dans mon Mémoire sur l'approximation des fonctions de grands nombres.

Dans le paragraphe I, je donne l'expression, sous forme d'intégrale double, de l'intensité lumineuse, le long de l'axe de symétrie

[1] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1907.

défini ci-dessus, dans la direction φ. Cette intégrale se décompose en trois autres, successivement étudiées, en vue de leur calcul numérique, aux paragraphes II, III, IV. On est conduit à introduire les paramètres

$$m = \frac{\pi h \sin\varphi}{\lambda}, \qquad n = \frac{\pi a \sin\varphi}{\lambda},$$

qui jouent un rôle capital dans la théorie, λ étant la longueur d'onde des radiations admises dans l'œil, après leur passage à travers un écran monochromatique convenable.

Les formules, résumées au paragraphe V, conviennent pour déterminer la valeur de l'intensité, extérieurement ou intérieurement au bord géométrique de l'image de l'astre (bord que l'on observerait au foyer de la lunette s'il n'y avait pas de diffraction), sauf dans le voisinage immédiat de ce bord ou sur le bord lui-même. Des expressions analytiques, applicables à cette dernière hypothèse et qui se raccordent aux premières, à distance convenable du bord géométrique, sont obtenues au paragraphe VI.

La question de beaucoup la plus importante à élucider, comme application des théories développées dans la première Partie du Mémoire, est celle de la répartition de la lumière au voisinage du bord géométrique, le long de l'axe de symétrie dont il a été question ci-dessus. On y parvient en étudiant l'intensité relative

$$y = \frac{I}{I_B},$$

I désignant l'intensité absolue, en un point voisin du bord géométrique, et I_B l'intensité absolue au bord géométrique lui-même. On est amené à prendre comme variable indépendante, pour effectuer les calculs numériques, le produit $x = 2m\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha} - 1\right)$. Il arrive (§ VII) que la variation de y, dans le voisinage immédiat du bord géométrique et quand on se déplace le long de l'axe de symétrie déjà défini, est maximum lorsque $\frac{n}{m} = \frac{1}{2}$. La courbe représentative de y possède alors, au point correspondant au bord géométrique, une tangente inclinée au maximum sur la direction

négative de l'axe des abscisses. Si donc, par suite de l'existence de la diffraction, la lumière ne peut en aucun cas être nettement limitée au bord géométrique de l'image, par contre quand on passe d'un point intérieur au disque à un point extérieur, très voisins l'un de l'autre et à distance fixe de ce bord, la chute de l'intensité relative y est aussi élevée que possible lorsque $\frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$. Le bord géométrique de l'image est, en conséquence, le mieux défini possible, lorsque cette condition est satisfaite.

En raison de cette circonstance, l'étude de la fonction y, pour $\frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$, a reçu, au paragraphe VIII, des développements très étendus, qui ont nécessité des calculs numériques considérables. Les résultats ont été représentés graphiquement par une courbe en prenant comme abscisse le rapport $\xi = \frac{x}{2\pi}$. La variable ξ, positive pour les points de l'image extérieurs au bord géométrique, nulle sur ce bord et négative pour les points intérieurs, prend la valeur 1, lorsqu'on s'éloigne de ce bord à une distance angulaire égale au pouvoir séparateur $\frac{\lambda}{h}$ d'une lunette d'ouverture circulaire, de diamètre égal à la longueur de la fente. Une courbe unique convient pratiquement à toutes les longueurs de fente, en prenant ce pouvoir séparateur comme unité d'abscisse.

La condition $\frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$ assujettit la largeur de la fente à ne pas dépasser quelques millimètres, en sorte que sa longueur peut atteindre le diamètre même de l'objectif. En conséquence, il était naturel de comparer l'aspect du contour de l'image, considérée aux extrémités de l'axe de symétrie dirigé dans le sens de la longueur de la fente, à l'aspect du contour de l'image fournie par l'objectif utilisé avec sa surface totale. Or il arrive que cet aspect est plus favorable aux mesures, dans la première hypothèse que dans la seconde. Voici ce qu'il faut entendre par là. Le calcul montre que l'intensité ne subit aucune discontinuité, pas plus dans un cas que dans l'autre, quand on traverse le bord géométrique de l'image. Seulement, comme cette intensité varie avec une rapidité extrême, dans le voisinage immédiat de ce bord, l'observateur a l'illusion que l'image de l'astre est terminée par un contour définitif auquel il convient

d'appliquer la dénomination de bord optique. Il n'y a là qu'une impression purement physiologique tenant à l'imperfection de la vision. Cependant, bien qu'il ne soit pas susceptible de définition physique, c'est néanmoins le bord optique qui fait l'objet des pointés exécutés par l'observateur, dans toutes les recherches nécessitant des mesures de position à effectuer sur l'astre. On conçoit que la concordance des pointés est liée à la netteté d'aspect du bord optique. Eh bien ! il arrive que ce bord illusoire est plus tranché, lorsque l'objectif est diaphragmé par la fente que lorsqu'il est utilisé avec sa surface entière.

Les théories développées dans le présent Mémoire ont été poursuivies en regardant l'éclat intrinsèque de la surface de l'astre comme uniforme. Elles ne s'appliquent pas, par suite, exactement au Soleil dont l'éclat décroît nettement du centre au bord. Mais les moyens analytiques mis en œuvre possèdent la souplesse voulue pour permettre d'aborder directement et traiter à fond la question de la diffraction solaire par une fente rectangulaire, en tenant compte des variations d'éclat du centre au bord. Au surplus, si la lunette d'observation est d'ouverture suffisamment grande, des considérations physiques permettent de prévoir que les conclusions énoncées ci-dessus, au sujet de l'aspect du bord optique, ne peuvent être sensiblement altérées. Comme pour un astre dont le disque présente un aspect uniforme, on a intérêt, dans le cas du Soleil, à faire emploi d'une lunette de large ouverture, diaphragmée par une fente afin d'accroître la netteté du bord optique. L'intercalation de la fente, dans le trajet des rayons, a d'ailleurs pour effet d'éliminer, presque en totalité, l'introduction de la chaleur, dans l'instrument d'observation, chaleur dont l'admission serait intolérable, en faisant intervenir la surface entière d'un grand objectif dans la formation de l'image. En raison de son importance, l'étude détaillée de la question fera l'objet d'un Mémoire spécial.

Le paragraphe IX et dernier est consacré à l'étude des propriétés générales des courbes d'intensité, correspondant au cas où le rapport $\frac{n^2}{m}$ est différent de $\frac{1}{2}$, sans dépasser la valeur 10. On pourrait étendre sans grand peine les résultats jusqu'à la

valeur $\frac{n^2}{m} = 15$; mais, passé ce nombre, les calculs deviendraient rapidement inabordables. Il faut alors attaquer le problème par d'autres voies, sur le détail desquelles je n'ai pas cru devoir insister pour le moment.

INTRODUCTION.

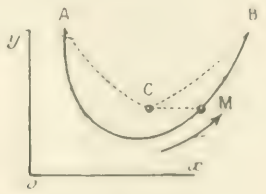
Le présent travail repose sur des formules résultant de théories générales, exposées dans mon Mémoire sur l'approximation des fonctions de grands nombres [1]. Ces formules ayant été établies antérieurement [2], je me bornerai à les rappeler ici en y joignant les explications indispensables à leur application.

E désignant la base des logarithmes népériens et n un nombre positif élevé, considérons l'intégrale

$$J_1 = \int f(u) E^{[illegible]} du,$$

prise le long d'un chemin AMB (*fig.* 1), que l'on ne peut défor-

Fig. 1.



mer, jusqu'à le faire coïncider avec le segment de droite AB joignant ses extrémités, sans rencontrer un point singulier $u = c$ de $f(u)$, d'ordonnée inférieure à celles de A et de B, et dans le voisinage duquel

$$(1) \qquad f(u) = [illegible]$$

β n'étant pas un entier positif. Supposons que la variable, en cheminant le long du contour AMB, tourne dans le sens direct, autour

[1] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, [illegible]

[2] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, [illegible]

du point c et que l'on puisse tracer un contour tel que AcB, passant par le point c, dont tous les points ont des ordonnées supérieures à celle de c, et qui serait équivalent au contour AMB, si $u = c$ n'était pas un point singulier de $f(u)$. Dans ces conditions on peut écrire

$$(2) \qquad J_1 = \frac{2\pi}{\Gamma(-\beta)} E^{-\beta\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} \frac{E^{n\sqrt{-1}}}{n^{\beta+1}} \left[B_1 - \sqrt{-1}\,\frac{\beta}{n}\,B_2 - \ldots \right],$$

le produit par n^2 des termes négligés entre crochets restant fini lorsque n augmente indéfiniment. Dans cette formule, le symbole Γ représente la fonction eulérienne de seconde espèce.

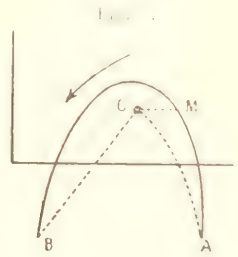
Elle suppose essentiellement que la détermination du binome $(u-c)^\beta$ qui figure dans le développement de $f(u)$ est réelle et positive, au point M du contour donné où $u = c$ est réel et positif.

En second lieu, considérons l'intégrale

$$J_2 = \int f(u)\, E^{-n\sqrt{-1}}\, du,$$

prise le long du contour AMB (*fig.* 2), parcouru dans le sens direct,

Fig. 2.



autour du point singulier $u = c$ de $f(u)$, dans le voisinage duquel cette fonction est supposée développable sous la forme (1). Admettons que l'ordonnée de c soit supérieure à celle des extrémités A et B du contour, et qu'en le déformant, pour le faire coïncider avec le segment de droite AB, on rencontre nécessairement le point $u = c$. Quand on peut tracer un chemin AcB passant par c, dont tous les points possèdent des ordonnées inférieures à celle de c, et qui serait équivalent au contour AMB, si la valeur $u = c$ n'était pas

un point singulier de $f(u)$, on a

$$(3)\qquad J_2 = -\frac{2\pi}{\Gamma(-\beta)} E^{\beta\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} \frac{E^{n\sqrt{-1}}}{n^{\beta+1}} \left| B_1 - \sqrt{-1}\,\frac{\beta+1}{n} B_2 - \ldots \right|,$$

le produit par n^2 des termes négligés entre crochets restant fini lorsque n augmente indéfiniment.

Cette formule suppose essentiellement que les coefficients du développement (1) ont été calculés de façon que la détermination du binome $(u-c)^\beta$ qui y figure soit réelle et positive au point M du contour, où $u-c$ est réel et positif.

Les formules (2) et (3) sont toujours valables lorsque, β étant fixe, n croît indéfiniment. Mais elles ne sont applicables, pour le calcul approché des intégrales correspondant à des valeurs de n élevées mais finies, que si β est petit par rapport à n.

Nous aurons, dans la suite, à faire usage des propriétés principales de la fonction eulérienne de seconde espèce $\Gamma(a)$ qui a pour valeur le produit des $a-1$ premiers nombres, lorsque a est un entier positif :

$$a\Gamma(a) = \Gamma(a+1),$$

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a},$$

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\, 2^{1-2a}\Gamma(2a),$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

I.

L'image d'un astre circulaire, au foyer d'une lunette dont l'objectif est diaphragmé par une ouverture rectangulaire, possède nécessairement deux axes de symétrie, orientés parallèlement à ses côtés. Dans un précédent Mémoire [1], j'ai obtenu l'expression générale de l'intensité lumineuse I, le long de l'axe

[1] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1897, p. 18.

parallèle à la longueur de la fente. Cette expression dont j'ai calculé la valeur, dans le cas particulier où la largeur de la fente est de dimension évanouissante, nous servira de point de départ dans les présentes recherches, pour compléter les résultats obtenus antérieurement.

Appelons h la longueur de la fente, a sa largeur, ε le demi-diamètre angulaire de l'astre, λ la longueur d'onde des radiations admises dans l'œil de l'observateur. Désignons enfin par φ la distance angulaire, au centre, d'un point de l'image choisi sur l'axe de symétrie parallèle au grand côté de la fente et par A^2 une constante proportionnelle à l'éclat intrinsèque de la surface de l'astre. Posant

$$(4)\qquad m = \frac{\pi h \sin\varepsilon}{\lambda}, \qquad n = \frac{\pi a \sin\varepsilon}{\lambda}, \qquad \alpha = \frac{\sin\varphi}{\sin\varepsilon},$$

on a

$$I = A^2 a^2 h^2 K$$

ou

$$(5)\qquad I = \Omega m^2 n^2 K,$$

en faisant

$$\Omega = \frac{A^2 \lambda^4}{\pi^4 \sin^4\varepsilon}$$

et

$$K = \int_{-1}^{+1} \left[\frac{\sin m(u-\alpha)}{m(u-\alpha)}\right]^2 \sqrt{1-u^2}\,du \int_{-1}^{+1} \left[\frac{\sin nz\sqrt{1-u^2}}{nz\sqrt{1-u^2}}\right]^2 dz.$$

Cette expression étant une fonction paire de α, nous l'étudierons en supposant $\alpha > 0$, dans la suite de ce Mémoire.

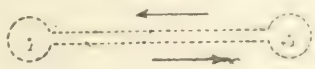
On peut mettre K sous la forme suivante :

$$(6)\qquad 2K = \int_C \left[\frac{\sin m(u-\alpha)}{m(u-\alpha)}\right] du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{+\sqrt{1-u^2}} \left[\frac{\sin nz}{nz}\right]^2 dz,$$

l'intégrale $\int_C$ étant prise, dans le sens direct, le long d'un contour fermé C contenant le segment de l'axe des abscisses, limité par les points $u = +1$, $u = -1$: le sens du radical $\sqrt{1-u^2}$ étant défini, d'autre part, par la condition d'être purement imaginaire positif, au point où le contour C rencontre la partie positive de l'axe des abscisses.

La légitimité de cette transformation s'aperçoit aisément : 1° en considérant le double lacet (*fig.* 3), embrassant le segment indiqué

Fig. 3.



de l'axe des abscisses, et remarquant que l'élément différentiel de l'intégrale $\int_C$ reprend sa valeur quand la variable u, après avoir décrit ce lacet en entier, revient au point de départ; 2° en observant que les parties de l'intégrale, prises le long des circonférences infiniment petites, décrites autour des points $u = +1$ et $u = -1$, sont nulles; 3° en s'appuyant sur ce que $\sqrt{1-u^2}$ est réel positif, le long de la branche rectiligne inférieure du lacet, et réel négatif, sur la branche rectiligne supérieure, par suite des changements de détermination quand la variable décrit les circonférences.

L'élément différentiel étant holomorphe, dans le voisinage du point $u = \alpha$, le contour C peut, à volonté, être assujetti à renfermer ou non le point $u = \alpha$. La première hypothèse est celle qui permet de conduire les calculs de la façon la plus symétrique; c'est celle que nous adopterons dans ce qui va suivre.

De la formule (6) on déduit

$$4m^2n^2K = -\int_C \left[\frac{d}{du}\frac{1}{u-\alpha}\right] du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} \left(\frac{\sin nz}{z}\right)^2 dz$$
$$-\int_C \frac{\cos 2m(u-\alpha)}{(u-\alpha)^2} du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} \left(\frac{\sin nz}{z}\right)^2 dz,$$

ou, en intégrant par parties la première intégrale et remarquant que la partie intégrée est nulle, comme reprenant sa valeur lorsque la variable u, après avoir décrit le contour C en entier, revient au point de départ :

$$4m^2n^2K = -2\int_C \frac{1}{u-\alpha}\left[\frac{\sin n\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1-u^2}}\right]^2 \frac{u\,du}{\sqrt{1-u^2}}$$
$$-\int_C \frac{\cos 2m(u-\alpha)}{(u-\alpha)^2}\sqrt{1-u^2}\,du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} \left[\frac{\sin nz\sqrt{1-u^2}}{z\sqrt{1-u^2}}\right]^2 dz$$

Il convient, pour faciliter le calcul de l'intégrale double, figurant dans cette expression de K, de modifier le chemin d'intégration de la variable z qui actuellement se confond avec le segment de l'axe des abscisses, limité par les points $z = -1$ et $z = +1$, tracé dans le plan de cette variable.

Décrivons de l'origine du plan des z, comme centre, une demi-circonférence O, de rayon infiniment petit, du côté des ordonnées positives. La fonction sous le signe $\int$ étant holomorphe dans tout le plan, on peut remplacer, dans le chemin d'intégration, le diamètre de cette circonférence par la courbe elle-même. Appelons γ le contour d'intégration ainsi obtenu (*fig.* 4). On a alors

$$4m^2n^2\mathrm{K} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{u-\alpha}\left[\frac{\sin n\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1-u^2}}\right]^2 \frac{u\,du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{E^{2m(u-\alpha)}-E^{2m(u-\alpha)}}{(u-\alpha)^2}\sqrt{1-u^2}\,du\int_0^1\left[\frac{\sin nz\sqrt{1-u^2}}{z\sqrt{1-u^2}}\right]^2 dz.$$

Fig. 4.

Dans ce qui va suivre nous supposerons que n et m sont deux nombres élevés : mais nous aurons à distinguer le cas où n est petit, par rapport à m, de celui où n, tout en étant inférieur à m, est une quantité du même ordre de grandeur que m. Il y a lieu, suivant que l'on se place dans l'une ou l'autre hypothèse, de partir de la première ou de la seconde des expressions suivantes de K, que l'on obtient en remplaçant, dans la formule précédente, le carré du sinus en fonction du cosinus de l'arc double :

$$(17)\quad 4m^2n^2\mathrm{K} = \int_0^1 \frac{1}{u-\alpha}\frac{u\,du}{\sqrt{1-u^2}} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{u-\alpha}\frac{E^{2m(u-\alpha)}-E^{2m(u-\alpha)}}{(1-u)^2}u\,du$$

$$-\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{E^{2m(u-\alpha)}-E^{2m(u-\alpha)}}{(u-\alpha)^2}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\int_0^1 \frac{1-\cos 2nz\sqrt{1-u^2}}{z^2}dz$$

et

$$(8)\quad 4m^2n^2K = \int_C \frac{1}{u-\alpha}\,\frac{u\,du}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2}\int_C \frac{1}{u-\alpha}\,\frac{E^{[illegible]} + E^{[illegible]}}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}\,u\,du$$

$$+ \frac{1}{2}\int_C \frac{E^{2m(u-\alpha)} + E^{-2m(u-\alpha)}}{(u-\alpha)^2}\,\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$+ \frac{1}{8}\int_C \frac{E^{2m(u-\alpha)} + E^{-2m(u-\alpha)}}{(u-\alpha)^2}\,\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\int_z \frac{E^{[illegible]} + E^{[illegible]}}{z^2}\,dz$$

Dans toutes ces intégrales, le contour d'integration C renferme les points singuliers $u = +1$, $u = -1$ et le pôle $u = \alpha$, comme nous l'avons specifié plus haut.

II.

CALCUL DE L'INTÉGRALE $\int_C \frac{1}{u-\alpha}\,\frac{u\,du}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Nous allons établir que cette intégrale est nulle. Les points $u = \alpha$ et $u = \pm 1$ étant intérieurs au contour d'intégration, on peut le dilater, en effet, de telle sorte que $\left|\frac{x}{u}\right|$ et $\left|\frac{1}{u}\right|$ soient inférieurs à 1, tout le long de ce chemin. Dans ces conditions, l'elément différentiel est développable en série convergente procédant, suivant les puissances de $\frac{1}{u}$, et le terme de degré moindre a pour exposant 3. A chaque terme du développement correspond, par suite, une integrale nulle; l'intégrale à évaluer est donc elle-même identiquement nulle.

Ce résultat peut être confirmé comme il suit :

1° $\alpha = 1$. — L'intégrale indéfinie a pour valeur

$$\int \frac{1}{u-1}\,\frac{u\,du}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3}\left[\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{1}{(u-1)\sqrt{1-u^2}}\right].$$

Chacune des fonctions, écrites dans le second membre, reprend,

sa valeur quand la variable u, après avoir décrit le contour C en entier, revient au point de départ. L'intégrale proposée est donc nulle, pour $\alpha = 1$.

2° $\alpha < 1$. — Dans cette hypothèse, l'intégrale indéfinie peut s'écrire.

$$\int \frac{1}{u-\alpha} \frac{u\,du}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(u-\alpha)\sqrt{1-u^2}} - \frac{1}{1-\alpha^2}\frac{\sqrt{1-u^2}}{u-\alpha}$$
$$- \frac{\alpha}{(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\mathrm{L}(1-u\alpha+\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-u^2}) - \mathrm{L}(u-\alpha)\right].$$

Pour les mêmes raisons que ci-dessus, les variations des deux premiers termes du second membre le long du contour C sont nulles. La variation de $\mathrm{L}(u-\alpha)$ est égale à $2i\pi$ puisque le point $u=\alpha$ est intérieur au contour C. On a donc

$$\int_C \frac{1}{u-\alpha} \frac{u\,du}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\alpha}{(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\left\{2i\pi - \left[\mathrm{L}(1-u\alpha+\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-u^2})\right]_{\cdot}^{\cdot}\right\}.$$

Pour trouver facilement la valeur du logarithme, il convient de prendre, comme contour C, le lacet double embrassant le segment de l'axe des x, limité par les points $u = +1$ et $u = -1$, en déformant infiniment peu les branches confondues avec l'axe des abscisses, dans le voisinage du point $u = \alpha$ qui est un pôle de l'élément différentiel. La détermination du radical $\sqrt{1-u^2}$ est d'ail-

FIG. 1.

leurs définie par la condition que $\sqrt{1-u^2}$ est réel et positif le long de la branche AB du lacet.

Dans ces conditions on voit que la fonction

$$1 - u\alpha + \sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-u^2}$$

est essentiellement réelle, positive et non nulle le long de la branche AB du lacet. On peut donc partir d'un point de cette branche avec

la valeur arithmétique du logarithme et remplacer la demi-circonférence décrite du point α par son diamètre.

La partie de l'intégrale, prise le long de la circonférence décrite autour du point $u = +1$, est infiniment petite; mais en suivant ce trajet, la variable ayant tourné de 2π autour d'un point singulier de $\sqrt{1-u^2}$, ce radical change de signe, en sorte que l'on doit partir du point D, sur la branche DE, avec la valeur réelle et négative de $\sqrt{1-u^2}$. Or la fonction

$$1 - u\alpha - \sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-u^2}$$

s'annule pour $u = \alpha$. Le point $u = \alpha$ est donc un point singulier du logarithme. Il est du reste facile de voir qu'à la valeur $u = \alpha$ correspond un minimum de la fonction; elle est donc positive pour tous les points de l'axe des abscisses d'affixe compris entre -1 et $+1$, sauf pour la valeur $u = \alpha$ pour laquelle elle est nulle.

Le long de DE, le logarithme conserve un sens arithmétique. Cherchons sa variation, le long de la demi-circonférence infiniment petite, décrite sur EF comme diamètre. On a, dans le voisinage du point $u = \alpha$,

$$\begin{aligned} &1 - u\alpha - \sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-u^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1-\alpha^2}}(u-\alpha)^2 [1 + \text{série entière ayant } u-\alpha \text{ en facteur}]. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\mathrm{L}(1 - u\alpha - \sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-u^2}) = 2\mathrm{L}(u-\alpha) + \text{fonction holomorphe de } (u-\alpha).$$

Quand la variable décrit la demi-circonférence de diamètre EF, dans le sens de l'intégration, $\mathrm{L}(1 - u\alpha - \sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-u^2})$ varie donc de $2i\pi$. Cette fonction est donc égale à $2i\pi$ augmenté de sa valeur arithmétique le long de FG. La variation du logarithme, le long de la circonférence décrite autour du point $u = -1$ est infiniment petite; mais le radical change de signe encore une fois, en sorte que la fonction $1 - u\alpha - \sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-u^2}$ reprend sa valeur de départ $1 - u\alpha + \sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-u^2}$, le long de la branche AB du lacet.

De ce qui précède il résulte que

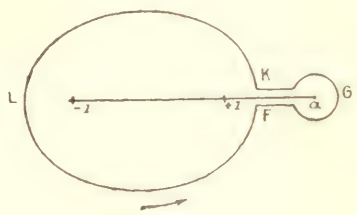
$$\left[L(1 - u\alpha + \sqrt{1 - \alpha^2}\sqrt{1 - u^2})\right]_{-1}^{+1} = 2i\pi.$$

L'intégrale proposée $\int_{C}$ est donc encore nulle quand $\alpha < 1$.

3° Etudions enfin le cas où $\alpha > 1$.

Il convient tout d'abord de décomposer l'intégrale en deux parties, en déformant le contour comme il est indiqué figure 6.

Fig. 6.



La première partie se rapporte au lacet FGK embrassant le pôle $u = \alpha$. Le radical $\sqrt{1 - u^2}$ étant purement imaginaire positif, pour $u = \alpha$, le résidu de la fonction sous le signe $\int$, relatif à ce pôle, est, en conséquence, $\frac{i\alpha}{(\alpha^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$. La partie de l'intégrale, prise le long du lacet, a donc pour valeur $\frac{2\pi\alpha}{(\alpha^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$. Par suite,

$$(9) \qquad \int_{C} \frac{1}{u - \alpha} \frac{u\,du}{(1 - u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\pi\alpha}{(\alpha^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} + \int_{C'}.$$

C' représentant le chemin KLF, dans lequel les points K et F sont supposés confondus.

L'intégrale indéfinie de la fonction sous le signe $\int$ pour $\alpha > 1$ peut s'écrire

$$\int \frac{1}{u - \alpha} \frac{u\,du}{(1 - u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

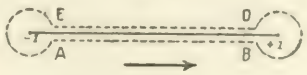
$$= \frac{1}{(u - \alpha)\sqrt{1 - u^2}} - \frac{1}{\alpha - 1}\frac{\sqrt{1 - u}}{u - \alpha} - \frac{\alpha}{(\alpha^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \arcsin\frac{u\alpha - 1}{\alpha - u}.$$

Aux deux premiers termes du second membre correspondent des parties nulles pour l'intégrale $\int_{-1}^{1}$; il reste

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{u-\alpha} \frac{u\,du}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\alpha}{(\alpha^2-1)^{\frac{3}{2}}} \left[\text{arc sin} \frac{u\alpha-1}{\alpha-u} \right]_{-1}^{1}.$$

Pour évaluer le second membre, nous prendrons, comme contour C, le lacet double embrassant les points $u = +1$ et $u = -1$ (*fig.* 7).

Fig. 7



Lorsque u croît de -1 à $+1$, $\frac{u\alpha-1}{\alpha-u}$ croît de -1 à $+1$. Convenons de partir, sur le contour, d'un point de AB avec la détermination de l'arc sin comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

Les valeurs $u = 1$ et $u = -1$ sont des points singuliers de l'arc sin, intérieurs au contour d'intégration. On trouve d'ailleurs facilement dans le voisinage du point $u = 1$, sur AB,

$$(10) \quad \text{arc sin} \frac{u\alpha-1}{\alpha-u} = \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{2(\alpha+1)}{\alpha-1}} \sqrt{1-u} \left\{ 1 + \begin{array}{c}\text{série entière de } 1-u \text{ contenant} \\ 1-u \text{ en facteur}\end{array} \right\}$$

et, dans le voisinage du point $u = -1$, sur AB,

$$(11) \quad \text{arc sin} \frac{u\alpha-1}{\alpha-u} = -\frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{2(\alpha-1)}{\alpha+1}} \sqrt{1+u} \left\{ 1 + \begin{array}{c}\text{série entière de } 1+u \text{ contenant} \\ 1+u \text{ en facteur}\end{array} \right\}.$$

On voit, à l'aide de ces développements, qu'en partant d'un point de la branche AB, sur le contour C, et marchant dans le sens direct, la fonction arc sin $\frac{u\alpha-1}{\alpha-u}$ a augmenté de 2π en revenant au point de départ. En effet, quand on va du point B au point D, en suivant la circonférence décrite autour de $u = +1$, $\sqrt{1-u}$ se change en

$-\sqrt{1-u}$: en sorte que la valeur de la fonction en D est, d'après le développement (10),

$$\pi - \arcsin \frac{u\alpha - 1}{\alpha - u}.$$

l'arc sin ayant la détermination définie le long de AB.

Suivant le chemin DE, on arrive en E avec la valeur que prend cette différence, dans laquelle l'arc sin a la détermination bien définie qu'il possède en A. Considérons maintenant le développement (11). Quand on décrit la circonférence ayant pour centre le point $u = -1$, de façon à passer du point E au point A, il montre que la fonction $\arcsin \frac{u\alpha - 1}{\alpha - u}$ se change en $-\pi - \arcsin \frac{u\alpha - 1}{\alpha - u}$, l'arc sin étant pris toujours avec la détermination définie le long de AB. Il s'ensuit que l'on arrive en A avec la valeur

$$2\pi - \arcsin \frac{u\alpha - 1}{\alpha - u},$$

u étant l'affixe de A. Parcourant ensuite AB, on revient en B avec la valeur $2\pi + \arcsin \frac{u\alpha - 1}{\alpha - 1}$, u étant l'affixe de B. La fonction arc sin a donc bien augmenté de 2π quand la variable, après avoir suivi le lacet en entier, revient au point de départ.

De ce qui précède il résulte que l'intégrale $\int$ a pour valeur $2\pi \frac{\alpha}{(\alpha^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}$. L'intégrale proposée est donc encore nulle, pour $\alpha > 1$, d'après la formule (9).

En résumé, l'intégrale

$$(12) \qquad \int \frac{1}{u - \alpha} \frac{u\,du}{(1 - u^2)^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

quelle que soit la valeur attribuée à α.

III.

Le calcul de l'intégrale suivante qui figure dans l'expression (7) de K

$$(13)\qquad J = \int_0^1 \frac{1}{u-\alpha}\,\frac{E^{m\sqrt{1-u^2}} - E^{-m\sqrt{1-u^2}}}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}\,u\,du,$$

pour n très grand, peut se ramener à celui d'intégrales telles que celles qui ont été considérées dans l'Introduction du présent Mémoire.

Nous allons changer de variable d'intégration en posant

$$t = \sqrt{1-u^2},$$

la nouvelle intégrale devant être prise le long du contour correspondant du contour C. Voyons d'abord quel est ce contour correspondant et dans quel sens il est décrit par la variable.

Partons du point où le contour C rencontre la partie positive de l'axe des abscisses. t a alors une valeur purement imaginaire positive, comme on l'a spécifié en écrivant la formule (6).

Le point correspondant est donc placé sur l'axe des ordonnées positives, dans le plan des t.

Quand u suit le contour C, jusqu'à l'axe des ordonnées, dans le plan des u, l'argument de $\sqrt{1-u^2}$ augmente de $\frac{\pi}{2}$ et ce radical devient réel négatif et inférieur à -1, sur l'axe des ordonnées. Le point t décrit donc, dans le plan des t, dans le sens direct, un arc de courbe partant d'un point de l'axe des ordonnées positives et coupant l'axe des abscisses négatives en un point dont l'abscisse est inférieur à -1.

Quand u suit le contour C, depuis l'axe des ordonnées positives jusqu'à l'axe des abscisses négatives, la variable t continue à décrire, dans son plan, un arc correspondant, dans le sens direct, et atteint l'axe des ordonnées négatives, quand il passe au point du contour C rencontrant l'axe des abscisses négatives, dans le plan de u. La variable u continuant à cheminer sur le contour C, le point t

atteint l'axe des abscisses positives, du plan des t, à une distance de l'origine supérieure à 1, quand u traverse, dans son plan, l'axe des ordonnées négatives. Enfin, le point t revient au point de départ, après avoir décrit un contour fermé enveloppant l'origine et les points $t = 1$ et $t = -1$, quand le point u revient lui-même au point de départ, sur le contour C.

Le nouveau chemin d'intégration, dans le plan des t, que nous désignerons par D, est donc fermé et renferme les points $t = -1$, $t = 0$, $t = 1$.

De $t = \sqrt{1 - u^2}$ on tire

$$u = -\sqrt{1 - t^2},$$

à condition de donner au radical une détermination convenable. Or nous avons vu que le point du contour D, situé sur l'axe des abscisses positives, correspond au point u du contour C situé sur l'axe des ordonnées négatives du plan des u. En posant

$$u = -\sqrt{1 - t^2},$$

nous devons donc prendre la détermination du radical qui est purement imaginaire positive, au point où le contour D rencontre l'axe des abscisses positives. Ce détail réglé, effectuons le changement de variable, dans l'intégrale proposée (13). Elle devient

$$(14) \qquad J = \int_D \frac{1}{\alpha + \sqrt{1 - t^2}} \frac{dt}{t} + \int_D \frac{1}{\alpha - \sqrt{1 - t^2}} \frac{dt}{t}.$$

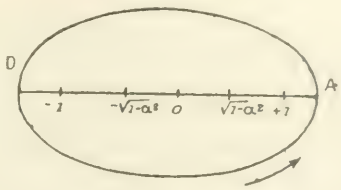
Pour calculer cette somme, plusieurs cas sont à considérer.

1° $0 < \alpha < 1$. — Le contour d'intégration D renferme deux points singuliers algébriques $t = -1$, $t = +1$, et trois pôles $t = 0$, $t = -\sqrt{1 - \alpha^2}$, $t = +\sqrt{1 - \alpha^2}$ de l'élément différentiel.

On voit, de suite, qu'il y a une distinction nécessaire à établir entre ces trois pôles. Si l'on fait tendre, vers l'origine, la partie supérieure ou la partie inférieure du contour, l'élément différentiel, pour les points qui s'approchent de la valeur $t = 0$, tend à devenir infini dans l'un et l'autre cas. Or il n'en va pas de même pour les deux autres pôles. Le radical $\sqrt{1 - t^2}$ étant purement imaginaire positif au point A (*fig.* 8) d'intersection du contour avec l'axe des

abscisses positives, si l'on fait tendre la branche inférieure du contour correspondant aux ordonnées négatives, vers l'axe des abscisses, $\sqrt{1-t^2}$ tend à devenir réel et positif le long de la nouvelle branche inférieure, pour les abscisses comprises entre -1 et $+1$ et à

Fig. 8.



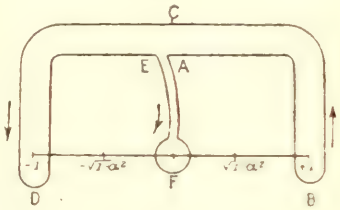
prendre la valeur α pour $t = \pm\sqrt{1-\alpha^2}$. La somme $\alpha + \sqrt{1-t^2}$ tend donc vers la valeur finie non nulle 2α, lorsque t se rapproche de ces points. La conclusion à tirer de là est que les points $t = \pm\sqrt{1-\alpha^2}$ ne sont pas des pôles, pour la branche inférieure du contour D. On peut donc, quand on déforme cette branche, lui faire franchir l'un ou l'autre de ces points ou tous les deux, sans qu'il en résulte aucune erreur. Mais les choses se passent tout différemment pour la branche supérieure du contour, correspondant aux ordonnées positives. Le radical $\sqrt{1-t^2}$ tend alors à devenir réel et négatif pour les valeurs de t appartenant à la branche mobile, à mesure qu'elle se rapproche davantage de l'axe des abscisses entre $t = -1$ et $t = +1$. Le radical $\sqrt{1-t^2}$ tend alors vers $-\alpha$, pour les valeurs de t qui tendent vers $\pm\sqrt{1-\alpha^2}$, et la somme $\alpha + \sqrt{1-t^2}$ tend vers zéro. Il s'ensuit que les points $t = \pm\sqrt{1-\alpha^2}$ sont des pôles véritables, pour la partie supérieure du contour D, et qu'on n'a pas le droit de les franchir, quand on est amené à déformer cette branche. Nous allons immédiatement faire application de ces remarques.

Considérons d'abord la première intégrale. On peut remplacer le chemin d'intégration D par le chemin marqué figure 9. L'intégrale à évaluer se ramène à la somme de trois autres que nous désignerons par les chemins suivis par la variable, écrits entre parenthèses. On a

$$(15) \qquad \int_D \frac{1-\sqrt{1-t^2}}{\alpha+\sqrt{1-t^2}}\,\frac{dt}{t} = \int_{ABC} + \int_{CDE} + \int_{EFA}.$$

L'intégrale (EFA) se rapporte au pôle $t = 0$ et se calcule immédiatement. Les valeurs asymptotiques des deux autres, pour n très grand, s'obtiennent comme on va le voir, en se fondant sur

Fig. 9.



les résultats établis dans mon Mémoire sur l'approximation des fonctions de grands nombres, rappelés au commencement du présent travail.

Le résidu de la fonction

$$\frac{E^{2n\alpha}}{\alpha + \sqrt{1-t^2}}\,\frac{1}{t^2},$$

pour le pôle $t = 0$, est égal à $\frac{2ni}{\alpha + 1}$. Il en résulte

$$(16) \qquad (ABC) = -\frac{4n\pi}{\alpha + 1}.$$

Pour évaluer l'intégrale (ABC), il faut au préalable calculer le développement de $\frac{1}{\alpha + \sqrt{1-t^2}}\,\frac{1}{t^2}$, dans le voisinage du point singulier $t = 1$, en excluant les puissances entières positives de $1 - t$. On peut écrire

$$\frac{1}{\alpha + \sqrt{1-t^2}}\,\frac{1}{t^2} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{1}{t^2}\left[\frac{\sqrt{1-t^2}}{\alpha} - \frac{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}{\alpha^3} + \frac{(1-t^2)^{\frac{5}{2}}}{\alpha^5} - \ldots\right]$$

$$+ \text{ fonction holomorphe de } 1 - t^2$$

$$= -\frac{\sqrt{1-t^2}}{\alpha^2 t^2}\left[1 - \frac{1-t^2}{\alpha^2} + \frac{(1-t^2)^2}{\alpha^4} - \ldots\right]$$

$$+ \text{ fonction holomorphe,}$$

ou

$$\frac{1}{\alpha + \sqrt{1-t^2}}\,\frac{1}{t^2} = -\sqrt{2}\,\frac{(1-t)^{\frac{1}{2}}}{\alpha^2}\left[1 + \frac{7\alpha^2 - 8}{4\alpha^2}(1-t) + \ldots\right]$$

$$+ \text{ fonction holomorphe de } (1-t)$$

Dans cette formule, $(1-t)^{\frac{1}{2}}$ a une valeur purement imaginaire positive, au point où le contour D rencontre l'axe des abscisses positives. Étant données les applications que nous aurons à faire de ce développement, il convient de l'écrire

$$(17)\qquad \frac{1}{\alpha+\sqrt{1-t^2}}\,\frac{1}{t^2} = -i\sqrt{2}\,\frac{(t-1)^{\frac{1}{2}}}{\alpha^2}\left[1-\frac{7\alpha^2+8}{4\alpha^2}(t-1)+\ldots\right]$$
$$+\text{ fonction holomorphe de } t-1,$$

le binome $(t-1)^{\frac{1}{2}}$ ayant une valeur réelle positive, pour les valeurs réelles de t supérieures à 1.

On trouve de même, dans le voisinage du point $t=-1$,

$$(18)\qquad \frac{1}{\alpha+\sqrt{1-t^2}}\,\frac{1}{t^2} = -\sqrt{2}\,\frac{(t+1)^{\frac{1}{2}}}{\alpha^2}\left[1+\frac{7\alpha^2+8}{4\alpha^2}(t+1)+\ldots\right],$$

le binome $(t+1)^{\frac{1}{2}}$ ayant une valeur réelle positive pour les valeurs réelles de t supérieures à -1.

Pour avoir la valeur asymptotique de l'intégrale (CDE), il n'y a plus qu'à appliquer la formule (2), rappelée dans l'Introduction, en partant du développement (17). Le sens de l'intégration étant direct, par rapport au point $t=1$, on trouve

$$(19)\qquad (\mathrm{ABC}) = \sqrt{\pi}\,\frac{E^{i\left(2n+\frac{\pi}{4}\right)}}{(2n)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{\sqrt{2}}{\alpha^2} - i\,\frac{3\sqrt{2}(7\alpha^2+8)}{16\alpha^4}\,\frac{1}{n}+\ldots\right].$$

Partant de la même formule et du développement (18), on obtient de même

$$(20)\qquad (\mathrm{CDE}) = \sqrt{\pi}\,\frac{E^{i\left(2n+\frac{\pi}{4}\right)}}{(2n)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{\sqrt{2}}{\alpha^2} + i\,\frac{3\sqrt{2}(7\alpha^2+8)}{16\alpha^4}\,\frac{1}{n}+\ldots\right].$$

Des formules (15), (16), (19), (20) on déduit

$$(21)\qquad \int_D \frac{E^{2nt}}{\alpha+\sqrt{1-t^2}}\,\frac{dt}{t^2}$$
$$= -\frac{4n\pi}{\alpha+1} + \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^2 n^{\frac{3}{2}}}\left[\cos\left(2n+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{3(7\alpha^2+8)}{16\alpha^4}\,\frac{\sin\left(2n+\frac{\pi}{4}\right)}{n}+\ldots\right]$$

le produit par n^2 des termes négligés, entre crochets, restant fini lorsque n augmente indéfiniment.

Cette formule suppose d'ailleurs essentiellement que α n'est pas nul. Nous reviendrons plus loin sur ce cas particulier.

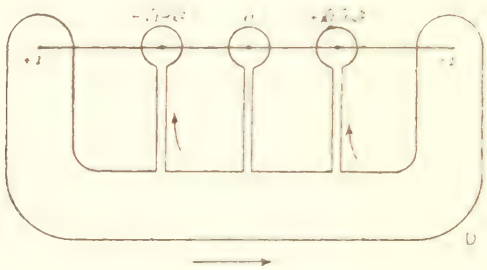
Nous avons maintenant à considérer l'intégrale

$$\int_D \frac{[illegible]\, dt}{\alpha - \sqrt{1-t^2}\; t^2}$$

qui est le second terme de la somme (14).

Il convient, pour calculer cette intégrale, de déformer le contour D de la figure (8), de façon à faire passer sa branche supérieure presque en entier au-dessous de l'axe des abscisses. Cette déformation est gênée, en vertu de la remarque faite au commencement de ce paragraphe, par les deux points singuliers algébriques $t = -1$, $t = +1$, et par les trois pôles $t = 0$, $t = \sqrt{1-\alpha^2}$, $t = -\sqrt{1-\alpha^2}$.

Fig. 10.



C'est une conséquence de ce que le radical $\sqrt{1-t^2}$ est réel négatif aux points d'intersection de ladite branche avec l'axe des abscisses, entre les abscisses -1 et $+1$.

Le chemin d'intégration D', tracé figure 10, est équivalent au contour D.

Les trois intégrales partielles, prises le long des lacets, ont pour somme le produit par $2i\pi$ de la somme des résidus relatifs aux

trois pôles; c'est-à-dire

$$2i\pi\left\{-\frac{2ni}{\alpha-1}-\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right]\left[\frac{E^{-i2n\sqrt{1-\alpha^2}}}{1-\alpha^2}-\frac{E^{+i2n\sqrt{1-\alpha^2}}}{1-\alpha^2}\right]$$

ou

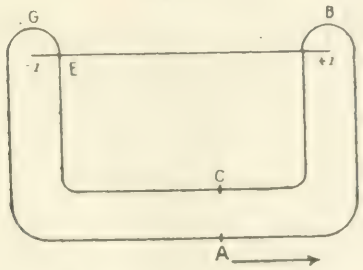
$$\frac{4\pi n}{\alpha-1}+4\pi\frac{\alpha}{(1-\alpha^2)^2}\sin 2n\sqrt{1-\alpha^2}.$$

Faisant maintenant abstraction des lacets, le contour d'intégration se réduit à celui qui est représenté figure 11 : l'intégrale à évaluer se ramène donc à la somme

$$\frac{4n\pi}{\alpha-1}+4\pi\frac{\alpha}{(1-\alpha^2)^2}\sin 2n\sqrt{1-\alpha^2}-(ABC)-(CGA),$$

A et C étant deux points quelconques pris sur les branches inférieures du contour (*fig.* 11).

Fig. 11



Pour évaluer (ABC), il faut encore partir du développement (17) et appliquer la formule (3), donnée dans l'Introduction,

$$(ABC)=\sqrt{\pi}\frac{E^{i(2n+\frac{\pi}{4})}}{(2n)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{\sqrt{2}}{\alpha^2}+i\frac{3\sqrt{2}(7\alpha^2-8)}{16\alpha^2 n}+\ldots\right],$$

le produit par n^2 des termes négligés entre crochets restant fini lorsque n augmente indéfiniment.

Pour évaluer l'intégrale (CGA), il faut remarquer que le radical $\sqrt{1-t^2}$ a maintenant une valeur réelle négative, au point E où le contour rencontre le segment -1 à $+1$ de l'axe des abscisses. Nous devons donc partir du développement, suivant les puissances

de $1+t$, de

$$\frac{1}{\alpha-\sqrt{1-t^2}}\,\frac{1}{t^2},$$

où $\sqrt{1-t^2}$ est réel et positif au point E. On trouve

$$\frac{1}{\alpha-\sqrt{1-t^2}}\,\frac{1}{t^2}=\sqrt{2}\,\frac{(t+1)^{\frac{1}{2}}}{\alpha^2}\left[1+\frac{7\alpha^2+8}{4\alpha^2}(t+1)+\ldots\right],$$

$(t+1)^{\frac{1}{2}}$ désignant la détermination réelle et positive au point E.

Partant du développement (3), on trouve

$$(\mathrm{CGA})=\sqrt{\pi}\,\frac{E^{i(2n+\frac{\pi}{4})}}{(2n)^2}\left[\frac{\sqrt{2}}{\alpha^2}-i\,\frac{3\sqrt{2}(7\alpha^2+8)}{16\alpha^4 n}+\ldots\right],$$

le produit par n^2 des termes négligés entre crochets restant fini lorsque n augmente indéfiniment. On a donc, pour $0<\alpha<1$,

$$(22)\quad \int_D \frac{E^{-2n.t}}{\alpha-\sqrt{1-t^2}}\,\frac{dt}{t^2}$$
$$=\frac{4n\pi}{\alpha-1}+4\pi\,\frac{\alpha}{(1-\alpha^2)^2}\sin 2n\sqrt{1-\alpha^2}$$
$$+\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^2 n^2}\left[\cos\left(2n-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{3(7\alpha^2+8)}{16\alpha^2}\,\frac{\sin\left(2n-\frac{\pi}{4}\right)}{n}+\ldots\right],$$

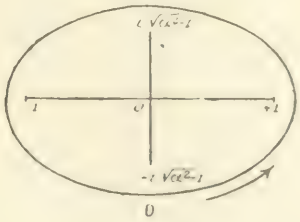
le produit par n^2 des termes négligés entre crochets restant fini lorsque n augmente indéfiniment.

2° $\alpha>1$. — Dans cette hypothèse, $\sqrt{1-\alpha^2}$ est imaginaire. La somme $\alpha+\sqrt{1-t^2}$ possède deux racines imaginaires $t=\pm i\sqrt{\alpha^2-1}$ situées, dans le plan, sur l'axe des ordonnées. On peut toujours supposer ces racines intérieures au contour D. En effet : 1° dans le plan de la variable u, le contour C peut être amené à rencontrer l'axe des abscisses, en deux points d'abscisses égales et de signes contraires, supérieures à 1 en valeurs absolues; 2° à deux valeurs réelles égales et de signes contraires de u, supérieures à 1 en valeurs absolues, correspondent deux valeurs purement imaginaires de t, égales et de signes contraires, dont le module croît en même temps que $|u|$. Les valeurs de t correspondant

aux points de rencontre du contour C, avec l'axe des abscisses du plan des u, ont, en conséquence, un module supérieur au module de $t = \pm i\sqrt{\alpha^2 - 1}$ qui correspond à $u = \alpha$, le point $u = \alpha$ étant compris entre le point $u = 1$ et le point où le contour C rencontre la partie positive de l'axe des abscisses.

Le chemin d'intégration D, le long duquel sont prises les intégrales figurant dans la somme (14), occupe donc la situation indiquée (*fig.* 12), par rapport aux points singuliers algé-

Fig. 12.



briques $t = +1$, $t = -1$ et aux pôles $t = 0$, $t = i\sqrt{\alpha^2 - 1}$, $t = -i\sqrt{\alpha^2 - 1}$ de l'élément différentiel.

Il importe d'observer que les valeurs $t = \pm i\sqrt{\alpha^2 - 1}$ n'annulent la somme $\alpha + \sqrt{1 - t^2}$ que si

$$\sqrt{1 - (i\sqrt{\alpha^2 - 1})^2} = \sqrt{\alpha^2}$$

est négatif. Or, au point d'intersection de l'axe des ordonnées avec la branche inférieure du contour, le radical $\sqrt{1 - t^2}$ est essentiellement réel et positif, tandis qu'il est réel et négatif au point d'intersection avec la branche supérieure. Ce n'est donc que pour la branche supérieure du contour D que les points $t = \pm i\sqrt{\alpha^2 - 1}$ doivent être considérés comme des pôles. Dans les déformations de ce contour, on peut impunément les laisser traverser la branche inférieure, mais non la branche supérieure qui correspond aux ordonnées positives.

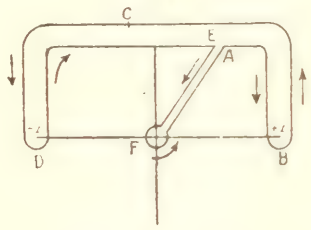
Évaluons d'abord la première des intégrales de la somme (14). A cet effet, marquons, sur l'axe des ordonnées, les deux points $t = \pm i\sqrt{\alpha^2 - 1}$. Nous pouvons déformer le contour D, comme il est indiqué (*fig.* 13), en nous appuyant sur les remarques précédentes.

On peut écrire

$$\int_0^{\infty} \frac{E^{2nt}}{\alpha - \sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t^2} = (ABC) + (CDE) + (EFA).$$

L'intégrale (EFA), relative au pôle $t = 0$, a pour valeur le produit de $2i\pi$ par le résidu de l'élément différentiel, relatif à ce pôle.

Fig. 14.



Tenant compte de ce que le lacet EFA provient de l'extension d'un fragment de la branche inférieure du contour de la figure 12, le radical $\sqrt{1-t^2}$ se réduit à $+1$ pour $t = 0$. Il en résulte, comme lorsque α est inférieur à 1,

$$(EFA) = 2i\pi \frac{2ni}{\alpha - 1} = \frac{4n\pi}{\alpha - 1}.$$

Quant aux intégrales (ABC) et (CDE), elles s'obtiennent exactement comme dans le cas où α est inférieur à 1 (*fig.* 14). Leur somme s'obtient, en ajoutant membre à membre les formules (19) et (20). On a donc

$$(23)\quad \int_0^{\infty} \frac{E^{2nt}}{\alpha + \sqrt{1-t^2}} = \frac{4n\pi}{\alpha - 1} - \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^2 n^{\frac{3}{2}}}\left[\cos\left(2n + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3(7\alpha^2 - 8)}{16\alpha^2}\frac{\sin\left(2n + \frac{\pi}{4}\right)}{n} + \ldots\right],$$

le produit par n^2 des termes négligés entre crochets restant fini lorsque n augmente indéfiniment.

La seconde intégrale de la somme (14) s'évalue en déformant le contour de la figure 12, comme il est indiqué (*fig.* 14), en tenant compte de ce que les points $t = \pm i\sqrt{\alpha^2 - 1}$ sont des pôles, pour

les parties du nouveau contour qui proviennent de l'extension de la branche supérieure du contour de la figure 12.

On a

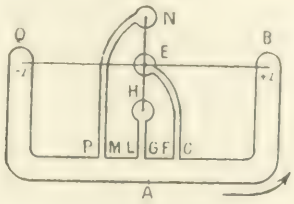
$$\int_D \frac{E^{-2nit}}{\alpha + \sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t^2}$$
$$= (PQA) + (ABC) + (CEF) + (FG) + (GHL) + (LM) + (MNP).$$

La somme des trois intégrales

$$(CEF) + (GHL) + (MNP)$$

a pour valeur le produit de $2i\pi$ par la somme des résidus de l'élé-

Fig. 14



ment différentiel relatifs aux trois pôles $t = -i\sqrt{\alpha^2 - 1}$, $t = 0$ et $t = -i\sqrt{\alpha^2 - 1}$. Tenant compte de ce que le radical $\sqrt{1-t^2}$ est maintenant réel et négatif pour les points de l'axe des ordonnées balayés par la partie supérieure du contour de la figure 12, pendant sa déformation, on a

$$(CEF) + (GHL) + (MNP) = 2i\pi \left[\frac{2ni}{\alpha - 1} + \frac{\alpha E^{-2n\sqrt{\alpha^2-1}}}{i(\alpha^2-1)^2} - \frac{\alpha E^{2n\sqrt{\alpha^2-1}}}{i(\alpha^2-1)^2} \right]$$
$$= \frac{4n\pi}{\alpha - 1} - \frac{2\pi\alpha}{(\alpha^2-1)^2} \left(E^{-2n\sqrt{\alpha^2-1}} - E^{2n\sqrt{\alpha^2-1}} \right).$$

Quant à la somme des autres intégrales

$$(ABC) + (FG) + (LM) + (PQA),$$

on peut supposer, pour l'évaluer, que les points C, F, G, L, M, P sont confondus, ce qui revient à faire partir les trois lacets d'un même point du contour déformé. On est alors ramené à une que-

tion déjà traitée, dans le cas où α est inférieur à 1, en partant de la figure 11. Finalement, on a

$$(24)\quad \int_0^1 \frac{E^{2n\alpha t}}{\alpha - \sqrt{1-t^2}}\,\frac{dt}{t^2}$$

$$= \frac{4n\pi}{\alpha - 1} - \frac{2\pi\alpha}{(\alpha^2-1)^{\frac{3}{2}}}\left[E^{2n\sqrt{\alpha^2-1}} - E^{2n\sqrt{\alpha^2-1}}\right]$$

$$+ \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^2 n^{\frac{3}{2}}}\left[\cos\left(2n - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3(7\alpha^2+8)}{16\alpha^2}\,\frac{\sin\left(2n - \frac{\pi}{4}\right)}{n} + \ldots\right],$$

le produit par n^2 des termes négligés dans le dernier crochet restant fini lorsque n augmente indéfiniment.

3° Le cas correspondant à $\alpha = 1$ peut être traité directement. Mais on arrive au même résultat, pour la valeur de la somme (14), en faisant tendre α vers 1 dans l'une ou l'autre des expressions de cette somme, pour $\alpha < 1$ ou $\alpha > 1$.

En résumé, l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{E^{2n\sqrt{\alpha^2-1}} - E^{2n\sqrt{\alpha^2-1}}}{(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{u\,du}{u-\alpha}$$

s'exprime de la façon suivante, pour n très grand :

1° $0 < \alpha < 1$ (formules (13), (14), (21), (22)) :

$$(25)\quad J = \frac{8n\pi}{\alpha^2-1} - 4\pi\alpha\,\frac{\sin 2n\sqrt{1-\alpha^2}}{(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \frac{2\sqrt{\pi}}{\alpha^2 n^{\frac{3}{2}}}\left[\cos\left(2n + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3(7\alpha^2+8)}{16\alpha^2}\,\frac{\sin\left(2n - \frac{\pi}{4}\right)}{n} + \ldots\right],$$

en exceptant la valeur $\alpha = 0$.

2° $\alpha > 1$ (formules (13), (14), (23), (24)) :

$$(26)\quad J = \frac{8n\pi}{\alpha^2-1} - \frac{2\pi\alpha}{(\alpha^2-1)^{\frac{3}{2}}}\left[E^{2n\sqrt{\alpha^2-1}} - E^{2n\sqrt{\alpha^2-1}}\right]$$

$$+ \frac{2\sqrt{\pi}}{\alpha^2 n^{\frac{3}{2}}}\left[\cos\left(2n + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3(7\alpha^2+8)}{16\alpha^2}\,\frac{\sin\left(2n + \frac{\pi}{4}\right)}{n} + \ldots\right].$$

3° $\alpha = 1$. Les formules (25) et (26) se réduisent l'une et l'autre à la suivante :

$$(27)\quad J = -4n\pi\frac{3+4n^2}{3} + \frac{2\sqrt{\pi}}{n^{\frac{3}{2}}}\left[\cos\left(2n+\frac{\pi}{4}\right) + \frac{15}{16}\frac{\sin\left(2n+\frac{\pi}{4}\right)}{n} + \ldots\right].$$

4° Pour $\alpha = 0$, on trouve, comme nous allons l'établir, que

$$(28)\quad J = -8n\pi - 4\sqrt{\frac{\pi}{n}}\left[\cos\left(2n-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{9}{16n}\sin\left(2n+\frac{\pi}{4}\right) + \ldots\right].$$

Dans toutes ces formules, le produit par n^2 des termes négligés entre crochets reste fini lorsque n augmente indéfiniment.

Il convient, pour appliquer les formules (25) et (26), de poser

$$\nu = \frac{n^2}{m}, \qquad x = 2m(\alpha - 1).$$

Les formules (25) et (26) peuvent alors s'écrire

$$(25')\quad \frac{J}{16n^2\sqrt{2\pi m}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\nu x\left(2+\frac{x}{2m}\right)}}\left[1 + \left(1+\frac{x}{2m}\right)\frac{\sin\sqrt{-2\nu x\left(2-\frac{x}{2m}\right)}}{\sqrt{-2\nu x\left(2+\frac{x}{2m}\right)}}\right]$$
$$+ \frac{1}{8\nu^2\sqrt{2m}\,n^2}\left[\cos\left(2n+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{3(7\nu^2-8)}{16\nu^2}\frac{\sin\left(2n-\frac{\pi}{4}\right)}{n} + \ldots\right],$$

$$(26')\quad \frac{J}{16n^2\sqrt{2\pi m}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\nu x\left(2+\frac{x}{2m}\right)}}\left[1 + \left(1+\frac{x}{2m}\right)\frac{e^{-\sqrt{2\nu x\left(2-\frac{x}{2m}\right)}} - e^{\sqrt{2\nu x\left(2-\frac{x}{2m}\right)}}}{2\sqrt{2\nu x\left(2+\frac{x}{2m}\right)}}\right]$$
$$+ \frac{1}{8\nu^2\sqrt{2m}\,n^2}\left[\cos\left(2n+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{3(7\nu^2-8)}{16\nu^2}\frac{\sin\left(2n-\frac{\pi}{4}\right)}{n} + \ldots\right].$$

Au bord géométrique solaire, on a $x = 0$. Les formules (25') et (26') se réduisent alors l'une et l'autre à la suivante :

$$(27')\quad \frac{J}{16n^2\sqrt{2\pi m}} = -\frac{\sqrt{2\nu\pi}}{6}\left[1 + \frac{3}{4m}\frac{1}{\nu}\right]$$
$$+ \frac{1}{8n^2\sqrt{2m}}\left[\cos\left(2n+\frac{\pi}{4}\right) + \frac{15}{16}\frac{\sin\left(2n+\frac{\pi}{4}\right)}{n} + \ldots\right].$$

Les formules (25′) et (26′) correspondent, la première à $x < 0$ et la seconde à $x > 0$. Elles supposent n un nombre élevé et α non voisin de zéro. La formule (25′) ne peut donc pas être appliquée au centre du Soleil, point du disque pour lequel $x = -2m$. Il faut alors faire usage de la formule (28) que nous allons établir ci-dessous, et qui peut se mettre sous la forme

$$(28') \qquad \frac{J}{16n^2\sqrt{2\pi m}} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2\nu m}} \cdot \frac{1}{4n^2\sqrt{2\nu m}}\left[\cos\left(2n - \frac{\pi}{4}\right) + \ldots\right].$$

Pour $\alpha = 0$, l'intégrale proposée devient, après le changement de variable et de contour qui a conduit à la formule (14),

$$J = \int_0^{\infty} \frac{E^{2ni}}{t^2\sqrt{1-t^2}}\,dt + \int_0^{\infty} \frac{E^{-2ni}}{t^2\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

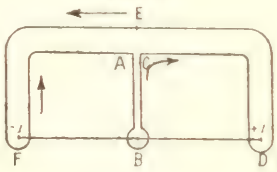
$\sqrt{1-t^2}$ étant purement imaginaire positif, pour t réel et supérieur à 1.

La fonction

$$\frac{E^{2ni}}{t^2\sqrt{1-t^2}}$$

possède le pôle $t = 0$, affecté du résidu $2ni$. L'intégrale correspondante se décompose en une somme des trois suivantes, après avoir

Fig. 15.



déformé le contour comme l'indique la figure 15 :

$$(ABC) + (CDE) = (FEA).$$

On a immédiatement

$$(29) \qquad (ABC) = 4n\pi;$$

(CDE) s'obtient en appliquant la formule (2) de l'Introduction, en

partant du développement

$$(30)\qquad \frac{1}{t^2\sqrt{1-t^2}} = -\frac{i\sqrt{2}}{2}(t-1)^{-\frac{1}{2}}\left[1-\frac{9}{4}(t-1)+\ldots\right]$$

dans lequel le binome $(t-1)^{-\frac{1}{2}}$ est réel et positif, pour les valeurs de t réelles supérieures à 1. On obtient ainsi

$$(31)\qquad (\mathrm{CDE}) = \sqrt{\frac{\pi}{n}}\,\mathrm{E}^{-(2n+\frac{\pi}{4})}\left[1+i\frac{9}{16n}+\ldots\right]$$

L'intégrale (EFA) s'obtient en appliquant la même formule et partant du développement

$$(32)\qquad \frac{1}{t^2\sqrt{1-t^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(t+1)^{-\frac{1}{2}}\left[1+\frac{9}{4}(t-1)+\ldots\right],$$

dans lequel le binome $(t+1)^{-\frac{1}{2}}$ a une valeur réelle positive, pour t réel et supérieur à -1. On arrive à

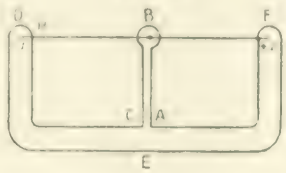
$$(33)\qquad (\mathrm{EFA}) = \sqrt{\frac{\pi}{n}}\,\mathrm{E}^{-(2n+\frac{\pi}{4})}\left[1+i\frac{9}{16n}+\ldots\right].$$

L'intégrale $\int_{\mathrm{D}} \frac{\mathrm{E}^{-2nt}}{t^2\sqrt{1-t^2}}$ s'obtient en donnant au contour D la forme indiquée sur la figure 16. Elle se décompose en une somme de trois autres

$$(\mathrm{ABC}) + (\mathrm{EFA}) + (\mathrm{CDE}).$$

Dans le cas actuel, pour parvenir aux points où le contour ren-

Fig. 16.



contre l'axe des abscisses, près de l'origine, il faut tourner de 2π autour du point $t = +1$, en partant des points analogues de la figure 15, en sorte que la détermination du radical $\sqrt{1-t^2}$, consi-

dérée dans le cas de la figure 15, a changé de signe et il en est de même au point H d'intersection du contour avec l'axe des abscisses. Le résidu relatif au pôle $t = 0$ de la fonction sous le signe $\int_0^{\cdot}$ est donc encore $2\pi i$, comme tout à l'heure, et l'on a

$$(34) \qquad (\mathrm{ABC}) = -4\pi n.$$

L'intégrale (EFD) s'obtient en appliquant la formule (3) de l'Introduction, en partant du développement (30), et l'on trouve

$$(35) \qquad (\mathrm{EFD}) = \sqrt{\frac{\pi}{n}}\, \mathrm{E}^{i\left(2n - \frac{\pi}{4}\right)} \left| 1 + i\frac{9}{16n} + \ldots \right|.$$

Quant à l'intégrale (CDE), on la calcule en partant du développement (32), changé de signe, vu le changement de détermination du radical. On arrive, en appliquant la même formule (3), à

$$(36) \qquad (\mathrm{CDE}) = \sqrt{\frac{\pi}{n}}\, \mathrm{E}^{i\left(2n - \frac{\pi}{4}\right)} \left| 1 - i\frac{9}{16n} + \ldots \right|.$$

Les formules (29), (31), (33) et (34), (35), (36) donnent

$$\int_0^{\cdot} \frac{\mathrm{E}^{2nit}\,dt}{t^2\sqrt{1-t^2}} + \int_0^{\cdot} \frac{\mathrm{E}^{2nit}\,dt}{t^2\sqrt{1-t^2}}$$
$$= -4n\pi + 2\sqrt{\frac{\pi}{n}} \left| \cos\left(2n - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{9}{16n}\sin\left(2n - \frac{\pi}{4}\right) + \ldots \right|.$$

Il était, du reste, facile de voir, *a priori*, que ces intégrales sont égales, en changeant t en $-t$ dans la première et observant que $\sqrt{1-t^2}$ est alors réel et négatif sur le segment de l'axe des abscisses compris entre les valeurs $t = +1$ et $t = -1$, quand la variable t y arrive du côté des ordonnées négatives.

On part de là pour écrire l'expression (28).

IV.

Nous nous proposons maintenant d'évaluer l'intégrale

$$(37) \qquad \mathrm{L} = \int_0^{\cdot} \frac{\mathrm{E}^{2n\sqrt{1-u^2}\,x} + \mathrm{E}^{-2n\sqrt{1-u^2}\,x}}{(u-z)^2}\,du = \int_0^{\cdot} \frac{1 - \cos 2nz\sqrt{1-u^2}}{z^2}\,dz.$$

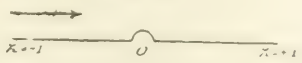
Nous admettrons, dans le présent Mémoire, que n, tout en étant grand, est très petit par rapport à m. On verra, dans la suite, ce qu'il faut entendre par là.

1° $\alpha = 1$. — Il convient d'évaluer tout d'abord l'intégrale $\int$. Or on a

$$\frac{1-\cos 2nz\sqrt{1-u^2}}{z^2} = \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^{p+1} \frac{(2n)^{2p}}{1.2\ldots 2p}(1-u^2)^p z^{2(p-1)}.$$

Le chemin d'intégration γ, dans le plan de la variable z, étant

Fig. 17.



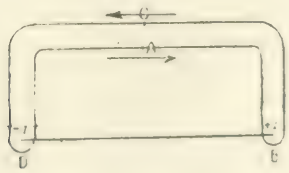
celui représenté sur la figure 17, on tire de là,

$$\int_\gamma \frac{1-\cos 2nz\sqrt{1-u^2}}{z^2}\,dz = 2\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{1.2\ldots 2p}\,\frac{(1-u^2)^p}{2p-1}(2n)^{2p}.$$

On peut donc écrire

$$(38)\qquad \int_C \frac{E^{2mi(u-1)}}{(u-1)^2\sqrt{1-u^2}}\,du \int_\gamma \frac{1-\cos 2nz\sqrt{1-u^2}}{z^2}\,dz$$
$$= 2\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{2p-1}\,\frac{(2n)^{2p}}{1.2\ldots 2p}\int_C \frac{(1-u^2)^{p-\frac{1}{2}}}{(u-1)^2}\,E^{2mi(u-1)}\,du.$$

Fig. 18.



L'intégrale placée sous le signe $\sum$ peut d'ailleurs se mettre sous la forme

$$(39)\qquad \int_C \frac{(1-u^2)^{p-\frac{1}{2}}}{(u-1)^2}\,E^{2mi(u-1)}\,du = E^{-2mi}\int_C \frac{(1-u^2)^{p-\frac{1}{2}}}{(u-1)^2}\,E^{2mi(u)}\,du.$$

En donnant au contour C la forme indiquée sur la figure 18, on a

$$\int_C \frac{(1-u^2)^{p-\frac{1}{2}}}{(u-1)^2} E^{i2mu}\,du = (\mathrm{ABC}) + (\mathrm{CDA}).$$

Les intégrales désignées, dans le second membre, par les chemins suivis par la variable, écrits entre parenthèses, peuvent être évaluées en appliquant la formule (2) donnée dans l'Introduction. Il faut partir, à cet effet, des développements de la fonction

$$\frac{(1-u^2)^{p-\frac{1}{2}}}{(u-1)^2},$$

dans le voisinage des points $u = 1$ et $u = -1$, $(1-u^2)^2$ étant alors purement imaginaire positif, sur le contour, pour u réel et supérieur à -1, et réel et positif pour u supérieur à -1. On trouve, dans le voisinage de $u = 1$,

$$(40)\qquad \frac{(1-u^2)^{p-\frac{1}{2}}}{(u-1)^2} = (-1)^{p-1} i\, 2^{p-\frac{1}{2}} (u+1)^{p-\frac{3}{2}} \left[1 + \frac{2p-1}{4}(u+1) + \ldots\right],$$

le binome $(u-1)^{p-\frac{3}{2}}$ étant réel et positif, sur l'axe des abscisses, pour u supérieur à 1. On a d'autre part, dans le voisinage de $u = -1$,

$$(41)\qquad \frac{(1-u^2)^{p-\frac{1}{2}}}{(u-1)^2} = 2^{p-\frac{3}{2}} (u+1)^{p-\frac{5}{2}} \left[1 - \frac{2p-5}{4}(u+1) + \ldots\right].$$

Partant du développement (40), on trouve

$$(\mathrm{ABC}) = E^{i2m} \frac{4\pi}{\Gamma\left(-p+\frac{5}{2}\right)} \frac{E^{i2m(-1)}}{m^{p-\frac{3}{2}}} \left[1 - i\frac{(2p-1)(2p-3)}{16m} + \ldots\right].$$

Utilisant ensuite le développement (41), on constate que l'intégrale (CDA) est de l'ordre du produit $(\mathrm{ABC}) \times \frac{1}{m^2}$, c'est-à-dire de l'ordre de grandeur de l'erreur admise sur (ABC). On a donc sim-

plement comme valeur de l'intégrale (39)

$$\frac{4\pi}{\Gamma\left(-p+\frac{5}{2}\right)}\,\frac{E^{i\left(p+\frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2}}}{m^{p-\frac{3}{2}}}\left[1+i\frac{(2p-1)(2p-3)}{16m}+\ldots\right]$$

et l'expression de l'intégrale (38) devient, en admettant une erreur relative de l'ordre de $\frac{1}{m^2}$,

$$8\pi\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{2p-1}\,\frac{E^{i\left(p+\frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2}}}{\Gamma\left(-p+\frac{5}{2}\right)}\,\frac{(2n)^{2p}}{1.2\ldots 2p}\,\frac{1}{m^{p-\frac{3}{2}}}\left[1+i\frac{(2p-1)(2p-3)}{16m}+\ldots\right]$$

ou

$$8\pi m^{\frac{3}{2}}\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{2p-1}\,\frac{E^{i\left(p+\frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2}}}{\Gamma\left(-p+\frac{5}{2}\right)}\,\frac{\left[\frac{(2n)^2}{m}\right]^p}{1.2\ldots 2p}\left[1+i\frac{(2p-1)(2p-3)}{16m}+\ldots\right].$$

Or on a

$$\Gamma\left(-p+\frac{5}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(-p+\frac{5}{2}\right)\left(-p+\frac{5}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{2^{p-2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(-1)^{p-2}\,1.3\ldots(2p-5)}$$

ou

$$\Gamma\left(-p+\frac{5}{2}\right)=(-1)^p\,\frac{2^{p-2}\sqrt{\pi}\,(2p-3)(2p-1)}{1.3\ldots(2p-1)}.$$

Il en résulte

$$\Gamma\left(-p+\frac{5}{2}\right)(2p-1).1.2\ldots 2p=(-1)^p\,2^{p-2}(2p-1)^2(2p-3)^2\ldots 1.2\ldots p\sqrt{\pi}$$

L'expression de l'intégrale (38) devient, en conséquence,

$$(42)\qquad 32\sqrt{\pi}\,m^{\frac{3}{2}}\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{E^{i\left(p+\frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2}}}{(2p-1)^2(2p-3)^2\ldots 1.2\ldots p}\left[1+i\frac{(2p-1)(2p-3)}{16m}+\ldots\right]$$

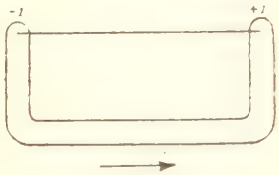
Après avoir déformé le contour C comme l'indique la figure (19),

on trouve d'une façon analogue l'expression asymptotique de l'intégrale

$$(43)\qquad \int_{C} \frac{E^{2m(u-1)}}{(u-1)^2\sqrt{1-u^2}}\,du \int_{\gamma} \frac{1-\cos 2nz\sqrt{1-u^2}}{z^2}\,dz.$$

La partie fournie par le point singulier $u = -1$ est négligeable

Fig. [illegible].



devant celle que donne la considération du point $u = +1$, du moment où l'erreur relative admise sur le résultat est de l'ordre de $\frac{1}{m^2}$. La valeur de l'intégrale s'obtient en changeant i en $-i$ dans l'expression (42). On en déduit

$$L = 64n^2\sqrt{\pi m}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n^2}{m}\right)^{p-1}}{(2p-1)^2(2p-3)(1)\cdots\frac{1}{2p}}$$
$$\cdot\left[\cos\left(p-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} - \frac{(2p-1)(2p-3)}{16m}\sin\left(p-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} - \ldots\right],$$

le produit par m^2 des termes négligés entre crochets restant fini lorsque m augmente indéfiniment. On peut aussi écrire

$$(44)\qquad L = 32n^2\sqrt{2\pi m}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n^2}{m}\right)^{p-1}}{(2p-1)^2(2p-3)(1)\cdots\frac{1}{2p}}$$
$$\cdot\left[\cos p\frac{\pi}{2} - \sin p\frac{\pi}{2} + \frac{(2p-1)(2p-3)}{16m}\left(\cos p\frac{\pi}{2} - \sin p\frac{\pi}{2}\right) + \ldots\right].$$

Cette formule est, en principe, valable pour toute valeur de $\frac{n^2}{m}$. Mais elle n'est pratiquement applicable que lorsque $\frac{n^2}{m}$ ne dépasse pas l'ordre de grandeur de 15 unités.

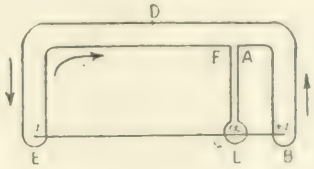
Nous verrons, dans un autre Mémoire, comment la question doit être traitée, dans l'hypothèse contraire.

2° $\alpha < 1$. — Le point $u = \alpha$ est un pôle de la fonction, placée sous le signe $\int_C$, intérieur au contour d'intégration C. Considérons d'abord l'intégrale

$$(45)\qquad \int_C \frac{E^{2mu-\alpha}}{(u-\alpha)^2}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\int_\gamma \frac{1-\cos 2nz\sqrt{1-u^2}}{z^2}\,dz.$$

On peut donner au contour C la forme indiquée sur la figure 20.

Fig. 20.



et la décomposer en une somme de trois autres

$$(45)\qquad \int_C = (\mathrm{FLA}) + (\mathrm{ABD}) + (\mathrm{DEF}).$$

Pour avoir l'intégrale (FLA), relative au lacet décrit autour du point $u = \alpha$, il faut calculer le résidu de la fonction sous le signe $\int_C$, pour le pôle $u = \alpha$. Il a pour valeur

$$\mathrm{R} = \left[\frac{2mi}{\sqrt{1-\alpha^2}} - \frac{\alpha}{(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\int_\gamma \frac{1-\cos 2nz\sqrt{1-\alpha^2}}{z^2}\,dz$$
$$-2n\frac{\alpha}{1-\alpha^2}\int_\gamma \frac{\sin 2nz\sqrt{1-\alpha^2}}{z}\,dz$$

ou, en intégrant par parties le second terme,

$$(46)\qquad \mathrm{R} = \frac{2mi}{\sqrt{1-\alpha^2}}\int_\gamma \frac{1-\cos 2nz\sqrt{1-\alpha^2}}{z^2}\,dz$$
$$+\frac{2\alpha}{(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\left(-1+\cos 2n\sqrt{1-\alpha^2}\right).$$

On a, par suite,

$$(47)\qquad (\mathrm{FLA}) = 2\pi i\,\mathrm{R}.$$

Pour calculer les intégrales (ABD) et (DEF), il convient de remplacer $\int \frac{\cos 2nz\sqrt{1-u^2}}{z^2}\,dz$ par son développement obtenu à propos de la formule (38), ce qui donne

$$(48)\qquad \int \frac{E^{2mu-\alpha}}{(u-\alpha)^2\sqrt{1-u^2}}\,du \int \frac{1-\cos 2nz\sqrt{1-u^2}}{z^2}\,dz$$
$$= 2\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(1-u^2)^{p-\frac{1}{2}}}{2p-1}\,\frac{(2n)^{2p}}{1.2\ldots 2p}\int \frac{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}}{(u-\alpha)^2}\,E^{2mu-\alpha}\,du,$$

l'intégrale placée dans le second membre étant prise suivant le chemin ABD ou DEF. Écrivant

$$(49)\qquad \int_{ABD} \frac{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}}{(u-\alpha)^2}\,E^{2mu-\alpha} = E^{-m\alpha}\int_{ABD} \frac{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}}{(u-\alpha)^2}\,E^{2mu}\,du,$$

l'évaluation de l'intégrale, écrite dans le second membre, s'obtient en appliquant la formule (2) de l'Introduction, en partant du développement

$$(50)\qquad \frac{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}}{(u-\alpha)^2} = (u-1)^{-\frac{1}{2}}\,\frac{(1+\alpha)^{\frac{1}{2}}}{(1-\alpha)^2}\,(u-1)\left[1+\left(\frac{2p-1}{1}-\frac{1}{1-\alpha}\right)(u-1)+\ldots\right],$$

dont le champ de convergence, autour du point $u=1$, diminue à mesure que α se rapproche de la valeur 1 et devient nul lorsque α atteint la valeur 1. Les résultats auxquels nous allons parvenir, en partant de la formule (50), ne seront donc valables que si α n'est pas trop voisin de 1.

L'intégrale $\int_{(AB)}$ se calcule de même, en partant du développement

$$(51)\qquad \frac{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}}{(u-\alpha)^2} = (u+1)^{-\frac{1}{2}}\,\frac{(1+\alpha)^{\frac{1}{2}}}{(1-\alpha)^2}\,(u+1)\left[1+\left(\frac{2p-1}{1}-\frac{1}{1-\alpha}\right)(u+1)+\ldots\right].$$

Dans ces formules, le binome $(u-1)^{-\frac{1}{2}}$ est réel et positif pour u réel et supérieur à 1, et le binome $(u+1)^{-\frac{1}{2}}$ réel et positif, pour u réel et supérieur à -1.

On obtient

$$(52)\qquad (\mathrm{ABD}) = 2\sqrt{\frac{\pi}{m}}\sum_{p=1}^{p=\infty}\left(\frac{n^2}{m}\right)^p \frac{E^{-i\left[(m-1)(\alpha+1)+\left(p-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]}}{(1-\alpha)^2(2p-1)\Gamma(p-1)}$$
$$\times\left[1+\left(\frac{2p-1}{4}-\frac{2}{1-\alpha}\right)\frac{2p+1}{4m}i+\ldots\right]$$

le produit par m^2 des termes négligés entre crochets restant fini pour m infini.

On trouve de la même manière

$$(53)\qquad (\mathrm{DEF}) = 2\sqrt{\frac{\pi}{m}}\sum_{p=1}^{p=\infty}\left(\frac{n^2}{m}\right)^p \frac{E^{-i\left[2m(1+\alpha)+\left(p-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]}}{(1+\alpha)^2(2p-1)\Gamma(p-1)}$$
$$\times\left[1-\left(\frac{2p-1}{4}-\frac{2}{1+\alpha}\right)\frac{2p+1}{4m}i+\ldots\right].$$

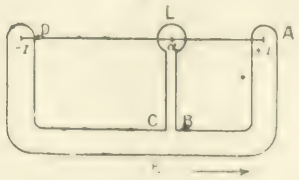
Additionnant membre à membre les trois formules (47), (52) et (53), on obtient finalement la valeur de l'intégrale (45).

L'expression de l'intégrale

$$(54)\qquad \int_C \frac{E^{-i2m(u-\alpha)}}{(u-\alpha)^2}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\int_\gamma \frac{1-\cos 2mz\sqrt{1-u^2}}{z^2}\,dz$$

s'obtient par des considérations analogues, en donnant au contour C la forme représentée (*fig.* 21). Mais il faut tenir compte de

Fig. 21.



la circonstance que $\sqrt{1-u^2}$ a maintenant une valeur réelle et négative, aux points où le contour rencontre l'axe des abscisses, entre les valeurs $u = -1$ et $u = +1$. Cela tient à ce que la valeur de $\sqrt{1-u^2}$, sur l'axe des abscisses, pour $u > 1$, est purement imaginaire positive.

Dans le cas actuel, le résidu R′ analogue à R, pour le pôle $u = \alpha$,

s'obtient donc en changeant m en $-m$ et $\sqrt{1-\alpha^2}$ en $-\sqrt{1-\alpha^2}$, dans l'expression (46) de R, ce qui conduit à l'égalité

$$(55)\qquad R + R' = \frac{4mi}{\sqrt{1-\alpha^2}}\int_0^\infty \frac{1-\cos 2nz\sqrt{1-\alpha^2}}{z^2}\,dz.$$

On a, en conséquence,

$$(56)\qquad \int_0^\infty \frac{E^{-2mu-\alpha}}{(u-\alpha)^2}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\int_0^\infty \frac{1-\cos 2nz\sqrt{1-u^2}}{z^2}\,dz$$
$$= 2i\pi R' + (EAB) + (CDE).$$

L'intégrale (EAB) s'obtient en partant du développement (48), après changement de i en $-i$, et en appliquant la formule (3) de l'Introduction au développement (50).

L'intégrale (CDE) s'évalue par la même formule, en partant du développement (51) *changé de signe*, c'est-à-dire

$$\frac{(1-u^2)^{p-\frac{1}{2}}}{(u-\alpha)^2} = \frac{2^{p-\frac{1}{2}}}{(1+\alpha)^p}(u+1)^{p-\frac{1}{2}}\left[1-\left(\frac{2p-1}{4}-\frac{2}{1+\alpha}\right)(u+1)+\ldots\right],$$

à condition de regarder le binome $(u+1)^{p-\frac{1}{2}}$ comme positif au point D du contour (*fig.* 21), où u est réel et supérieur à -1. Il faut, en effet, tourner de -2π, autour du point $u=-1$, pour passer du point E de la figure 20, auquel correspond le développement (51), au point D de la figure 21, en déformant le contour de la figure 20, pour l'amener à coïncider avec le contour de la figure 21.

On trouve

$$(57)\qquad (EAB) = 2\sqrt{\frac{\pi}{m}}\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{m}\right)^p \frac{\Gamma^{\left[(p+1)+\alpha+(p+1)\sqrt{\frac{1}{2}}\right]}}{(1+\alpha)^2(2p-1)\Gamma(p+1)}$$
$$\times\left[1-\left(\frac{2p-1}{4}-\frac{2}{1+\alpha}\right)\frac{2p+1}{4m}i+\ldots\right];$$

$$(58)\qquad (CDE) = 2\sqrt{\frac{\pi}{m}}\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{m}\right)^p \frac{\Gamma^{\left[(p+1)+\alpha+(p+1)\sqrt{\frac{1}{2}}\right]}}{(1+\alpha)^2(2p-1)\Gamma(p+1)}$$
$$\times\left[1+\left(\frac{2p-1}{4}-\frac{2}{1+\alpha}\right)\frac{2p-1}{4m}i+\ldots\right].$$

Des formules (45), (45'), (47), (52), (53) d'une part et (56), (57), (58) d'autre part, on tire finalement, en tenant compte de la formule (55), la valeur de L, pour $\alpha < 1$, à savoir

$$
\begin{aligned}
(59)\quad L = &-\frac{8m\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}\int_{\gamma}^{\infty}\frac{1-\cos 2nz\sqrt{1-\alpha^2}}{z^2}\,dz \\
&+\frac{1}{(1-\alpha)^2}\sqrt{\frac{\pi}{m}}\,\frac{n^2}{m}\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{\left(\frac{n^2}{m}\right)^{p-1}}{(2p-1)\Gamma(p-1)} \\
&\times\left\{\cos\left[2m(1-\alpha)+\left(p+\frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]\right. \\
&\quad\times\left(\frac{2p+1}{4m}\left(\frac{2p-1}{4}-\frac{2}{1-\alpha}\right)\right. \\
&\quad\times\sin\left[2m(1-\alpha)+\left(p+\frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]+\frac{1}{m^2}(\quad)+\ldots\Big) \\
&+\text{un terme qui s'obtient en changeant } \alpha \text{ en } -\alpha \text{ dans le terme ci-dessus,}
\end{aligned}
$$

le produit par m^2 des termes négligés dans les grandes parenthèses, restant fini lorsque m augmente indéfiniment. Cette formule n'est d'ailleurs valable que si α n'est pas trop voisin de 1, pour le motif invoqué à propos de l'établissement de la formule (50). Elle ne peut être appliquée que si le produit $m(1-\alpha)$ est suffisamment élevé.

La formule (59) ne devant être employée que pour $\alpha > 0$, on voit que si l'on considère une valeur de α non voisine de 1, le terme non écrit et celui qui le précède sont tous deux d'ordre $\frac{1}{m^{\frac{3}{2}}}$ par rapport à celui qui dépend de l'intégrale $\int_{\gamma}^{\infty}$. Si l'on considère, au contraire, une valeur de α assez voisine de 1, le terme non écrit est négligeable par rapport à celui dont on le déduit par le changement de α en $-\alpha$. Pour ces motifs, il n'y a pas lieu de tenir compte de ce terme non écrit. Nous en ferons abstraction dans ce qui va suivre. Posant, comme nous l'avons déjà fait,

$$\frac{n^2}{m} = \nu, \qquad 2m(\alpha-1) = \gamma,$$

la formule (59) peut se mettre sous la forme suivante, en ne tete-

nant que les termes principaux :

$$(59)\quad \frac{L}{3\sqrt{2}n^2\sqrt{2\pi m}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\sqrt{-2x\left(2+\frac{x}{2m}\right)}}$$

$$\int_{-1}^{-1} \frac{1-\cos\sqrt{-2\sqrt{2}x\left(2+\frac{x}{2m}\right)}\,z}{-2\sqrt{2}x\left(2+\frac{x}{2m}\right)z^2}\,dz$$

$$-\frac{1}{4x^2}\left[U\cos x - V\sin x\right] - \frac{W\cos x + Z\sin x}{4x^3} - \frac{1}{x^4}\left[\ldots\right] + \ldots,$$

les termes négligés contenant en facteur $\frac{1}{x^4}$, $\frac{1}{mx^3}$ ou $\frac{1}{m^2}$, et U, V, W, Z, représentant les séries

$$U = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\cos p\frac{\pi}{2} - \sin p\frac{\pi}{2}}{(2p+1)\Gamma(p+1)\,x^{2p+1}},$$

$$V = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\cos p\frac{\pi}{2} + \sin p\frac{\pi}{2}}{(2p-1)\Gamma(p+1)\,x^{2p-1}},$$

$$W = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{2p-1}{2p+1}\,\frac{2^{p-1}}{\Gamma(p+1)}\left(\cos p\frac{\pi}{2} - \sin p\frac{\pi}{2}\right),$$

$$Z = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{2p+1}{2p-1}\,\frac{2^{p-1}}{\Gamma(p+1)}\left(\cos p\frac{\pi}{2} + \sin p\frac{\pi}{2}\right).$$

4° Au centre de l'image, on a $\alpha = 0$ ou $x = -2m$. Il en résulte

$$\frac{L}{3\sqrt{2}n^2\sqrt{2\pi m}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2\pi m}\int_{-1}^{+1} \frac{1-\cos\sqrt{4m\sqrt{2}}\,z}{4m\sqrt{2}\,z^2}\,dz$$

$$-\frac{1}{16m^2}\left[U\cos 2m - V\sin 2m\right] + \ldots,$$

ou, d'après la formule (65), que nous allons établir,

$$\frac{L}{3\sqrt{2}n^2\sqrt{2\pi m}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2\pi m}\left[\frac{-1}{4\sqrt{m\sqrt{2}}} - \frac{1}{2m\sqrt{2}} - \frac{\sin 2\sqrt{m\sqrt{2}}}{4m\sqrt{2}}\right]$$

$$-\frac{1}{16m^2}\left[U\cos 2m + V\sin 2m\right] + \ldots.$$

ce qui peut s'écrire, en tenant compte de l'identité $n = \sqrt{\nu m}$,

$$(59'') \qquad \frac{L}{32 n^2 \sqrt{2\pi m}} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2\nu}}\left[\pi - \frac{1}{n} - \text{des termes contenant } \frac{1}{m} \text{ en facteur}\right].$$

Pour clore la question, nous allons nous occuper de l'intégrale suivante, prise le long du chemin γ, représenté figure 17, et où q est supposé positif,

$$(60) \qquad \int_\gamma \frac{1-\cos qz}{qz^2}\,dz = \int_{-1}^{+1} \frac{1-\cos qz}{qz^2}\,dz$$

qui se calcule de deux manières différentes, suivant que q est ou non un nombre élevé.

Si q ne dépasse pas quelques unités, le développement en série du cosinus, figurant dans l'élément différentiel, conduit à l'expression suivante :

$$(61) \qquad \int_\gamma \frac{1-\cos qz}{qz^2}\,dz = 2q \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \frac{q^{2p}}{1.2\ldots(2p-1)}$$

On pourrait, du reste, obtenir des expressions plus avantageuses, au point de vue du calcul numérique, lorsque q dépasse 3.

Lorsque q a une valeur un peu élevée, il est tout indiqué de faire usage d'un développement semi-convergent que nous allons établir, du moment où l'on s'en tient à un degré d'approximation convenable.

On a d'abord, après une intégration par parties,

$$(62) \qquad \int_\gamma \frac{1-\cos qz}{z^2}\,dz = 2 - 2\cos q - q\int \frac{\sin qz}{z}\,dz.$$

On obtient d'ailleurs, à l'aide de deux intégrations par parties successives, l'expression suivante :

$$\int_\gamma \frac{\sin qz}{z^{2p+1}}\,dz = \frac{2}{q}\cos q - 2\frac{2p+1}{q}\sin q - \frac{(2p+1)(2p+2)}{q^2}\int_\gamma \frac{\sin qz}{z^{2p+1}}\,dz$$

dont on tire de proche en proche

$$(63)\quad \int_\gamma \frac{\sin qz}{z}\,dz = \pi - \frac{2}{q}\cos q\left[1 - \frac{1.2}{q^2} + \frac{1.2.3.4}{q^4} - \ldots + (-1)^p\frac{1.2\ldots 2p}{q^{2p}}\right]$$
$$- \frac{2}{q^2}\sin q\left[1 - \frac{1.2.3}{q^2} + \ldots + (-1)^p\frac{1.2\ldots(2p+1)}{q^{2p}}\right]$$
$$+ (-1)^{p+1}\frac{1.2\ldots(2p+2)}{q^{2p+2}}\int_\gamma \frac{\sin qz}{z^{2p+3}}\,dz.$$

En vue d'exprimer l'intégrale entrant dans le second membre, considérons l'intégrale auxiliaire

$$\int_\gamma \frac{\cos qz}{z^{2p+3}}\,dz.$$

Si l'on développe le cosinus en série et que l'on intègre, on obtient une série de termes tous réels, à l'exception d'un seul, qui a pour valeur

$$(-1)^{p+1}\frac{q^{2p+2}}{1.2\ldots(2p+2)}\int_\gamma \frac{dz}{z} = (-1)^p i\pi\frac{q^{2p+2}}{1.2\ldots(2p+2)}.$$

Il s'ensuit que l'intégrale réelle $\int \frac{\sin qz}{z^{2p+3}}\,dz$ est le coefficient de i dans la somme

$$(-1)^{p+1} i\pi\frac{q^{2p+2}}{1.2\ldots(2p+2)} + \int_\gamma \frac{E^{iqz}}{z^{2p+3}}\,dz.$$

E désignant la base des logarithmes népériens. On peut donc mettre la formule (63) sous la forme

$$(64)\quad \int_\gamma \frac{\sin qz}{z}\,dz = \pi - \frac{2}{q}\cos q\left[1 - \frac{1.2}{q^2} + \frac{1.2.3.4}{q^4} - \ldots + (-1)^p\frac{1.2\ldots 2p}{q^{2p}}\right]$$
$$- \frac{2}{q^2}\sin q\left[1 - \frac{1.2.3}{q^2} + \ldots + (-1)^p\frac{1.2\ldots(2p+1)}{q^{2p}}\right]$$
$$= r,$$

r désignant le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans l'expression

$$(-1)^{p+1}\frac{1.2\ldots(2p+2)}{q^{2p+2}}\int_\gamma \frac{E^{iqz}}{z^{2p+3}}\,dz.$$

Or, si l'on remplace, dans le plan de la variable z, le chemin

d'intégration γ (*fig.* 17) par la demi-circonférence de rayon 1, tracée du côté des ordonnées positives, on peut écrire [1]

$$\int_\gamma \frac{E^{iqz}}{z^{2p+3}}\,dz = \mu\pi E^{iq\xi},$$

ξ désignant l'affixe d'un point de cette demi-circonférence et μ un facteur de module inférieur à 1. Mais, q étant positif, $|E^{iq\xi}|$ est au plus égal à 1, puisque la partie imaginaire de ξ n'est pas négative. Il s'ensuit que cette intégrale a un module inférieur à π et par suite

$$r < \pi\,\frac{1.2\ldots(2p+2)}{q^{2p+2}} \qquad \text{(en valeur absolue)}.$$

Si donc le second membre de cette inégalité est inférieur à la limite de l'erreur admise dans les approximations, on pourra négliger r dans la formule (64). Il convient d'ailleurs de choisir p de façon que $2p+2$ soit le plus près possible de q tout en lui étant inférieur.

A la formule (64) correspond, d'après la relation (62), l'expression approchée suivante :

$$(65)\quad \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{1-\cos qz}{qz^2}\,dz = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{q} + \frac{1}{q}\cos q\left[\frac{1.2}{q^2} - \ldots + (-1)^{p-1}\frac{1.2\ldots 2p}{q^{2p}}\right] - \frac{1}{q^2}\sin q\left[1 - \frac{1.2.3}{q^2} + \ldots + (-1)^p\frac{1.2\ldots(2p+1)}{q^{2p}}\right],$$

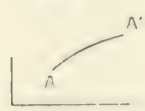
avec une erreur inférieure en valeur absolue à

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{1.2\ldots(2p+2)}{q^{2p+2}}.$$

---

[1] Étant donnée l'intégrale $I = \int f(z)\,dz$ prise le long d'un chemin AA', on

Fig. 17



sait, en effet, que l'on a $I = \mu\,\mathrm{arc}\,AA'\,f(\xi)$, ξ étant l'affixe d'un point de AA' et μ un facteur de module plus petit que 1.

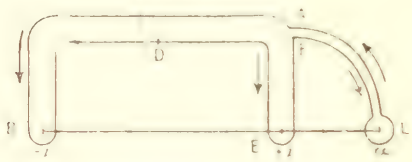
D'après la formule (61), l'intégrale (60) est nulle pour $q = 0$; elle a d'ailleurs pour valeur π pour $q = \infty$, d'après la formule (65). Sa dérivée par rapport à q, savoir $2\frac{1-\cos q}{q^2}$, est positive. C'est donc une fonction croissante de q. La dérivée seconde $2\frac{q\sin q + 2\cos q - 2}{q^3}$ a une première série de racines $q = 2k\pi$, k étant un entier et une seconde série comprise entre $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ et $2k\pi + \frac{3\pi}{2}$, k étant au moins égal à 1. L'intégrale (60), en grandissant de 0 à π, lorsque q croît de zéro à l'infini, éprouve donc une infinité d'inflexions. En conséquence, cette intégrale augmente en passant par une infinité de sinuosités.

3° Nous avons encore à calculer l'intégrale L, dans le cas où $\alpha > 1$. Considérons d'abord l'intégrale

$$(66)\qquad \int_C \frac{E^{2m(u-\alpha)}}{(u-\alpha)^2}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\int_C \frac{1-\cos 2uz\sqrt{1-u^2}}{z}\,dz,$$

le contour C étant toujours celui qui a été défini à propos de la

Fig. 2.



formule (6). Déformons ce chemin, comme il est indiqué (*fig.* 2).

On a

$$\int_C = (\mathrm{FLA}) + (\mathrm{ABD}) + (\mathrm{DEF})$$

L'intégrale (FLA) a pour valeur le produit de $2i\pi$ par le résidu de l'élément différentiel relatif au pôle $u = \alpha$. Le radical $\sqrt{1-u^2}$ étant purement imaginaire positif, pour $u = \alpha$, ce résidu se déduit de la formule (46) en y remplaçant $\sqrt{1-\alpha^2}$ par $i\sqrt{\alpha^2-1}$ et en exprimant le cosinus par des exponentielles.

On trouve

$$(67)\qquad R = \frac{2m}{\sqrt{\alpha^2-1}}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}\frac{1-\frac{1}{2}\left(E^{2i\pi\sqrt{\alpha^2-1}}-E^{-2i\pi\sqrt{\alpha^2-1}}\right)}{z^2}\,dz$$
$$+\frac{i\alpha}{(\alpha^2-1)^{\frac{3}{2}}}\left(-2+E^{m\sqrt{\alpha^2-1}}-E^{-m\sqrt{\alpha^2-1}}\right).$$

On en déduit

$$(68)\qquad (FLA) = 2i\pi R.$$

Le calcul de la somme (ABD) + (DEF) s'effectue exactement comme dans le cas où α est inférieur à 1. Cette somme s'obtient en additionnant les formules (52) et (53). Il en résulte pour l'intégrale (66) la valeur

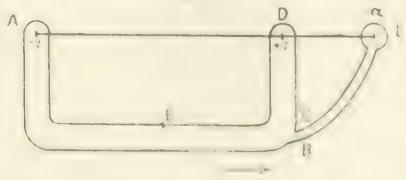
$$(69)\qquad 2i\pi R + 2\sqrt{\frac{\pi}{m}}\sum_{p=1}^{p=\infty}\left(\frac{n^2}{m}\right)^p\frac{E^{\left[2m(1-\alpha)+(p-1)\frac{\pi}{4}\right]}}{(1-\alpha)^2(2p-1)\Gamma(p+1)}$$
$$+\left[1-\left(\frac{2p-1}{4}-\frac{2}{1-\alpha}\right)\frac{2p+1}{4m}i+\ldots\right]$$
$$+2\sqrt{\frac{\pi}{m}}\sum_{p=1}^{p=\infty}\left(\frac{n^2}{m}\right)^p\frac{E^{\left[2m(1+\alpha)+(p-1)\frac{\pi}{4}\right]}}{(1+\alpha)^2(2p-1)\Gamma(p+1)}$$
$$+\left[1-\left(\frac{2p-1}{4}-\frac{2}{1+\alpha}\right)\frac{2p-1}{4m}i+\ldots\right].$$

L'intégrale

$$(70)\qquad \int_{-1}^{1}\frac{E^{2m(u-\alpha)}}{(u-\alpha)^2}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}\frac{1-\cos 2uz\sqrt{1-u^2}}{z^2}\,dz,$$

quand α est supérieur à 1, s'obtient en déformant le contour d'inté-

Fig. 24.



gration, comme il est indiqué (*fig.* 24). On a

$$\int_{-1}^{\infty}(BLC) + (CDE) = (LAB)$$

L'intégrale (BLC), relative au pôle $u = \alpha$, est égale au produit de $2i\pi$ par le résidu R′ de l'élément différentiel relatif à ce pôle. Or comme $\sqrt{1-u^2}$ a la même valeur que dans le cas examiné tout à l'heure, à propos de l'intégrale (66), ce résidu R′ s'obtient simplement en changeant m en $-m$ dans la formule (67). Il est donc donné par la formule

$$(71)\qquad R + R' = 2\frac{i\alpha}{(\alpha^2-1)^{\frac{3}{2}}}\left[-2 + E^{2m\sqrt{\alpha^2-1}} + E^{-2m\sqrt{\alpha^2-1}}\right],$$

et l'on a

$$(72)\qquad (BLC) = 2i\pi R.$$

La somme des deux autres intégrales (CDE) + (EAB) s'évalue exactement comme lorsque α est inférieur à 1. On a, en conséquence,

$$(73)\qquad (CDE) + (EAB) = 2\sqrt{\frac{\pi}{m}}\sum_{p=1}^{p=\infty}\left(\frac{n^2}{m}\right)^{p}\frac{E^{\left[2m(1-\alpha)+(2p-1)\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]}}{(1-\alpha)^2(2p-1)\Gamma(p+1)}$$
$$\times\left[1-\left(\frac{2p-1}{4}-\frac{2}{1-\alpha}\right)\frac{2p+1}{4m}t+\ldots\right]$$
$$+2\sqrt{\frac{\pi}{m}}\sum_{p=1}^{p=\infty}\left(\frac{n^2}{m}\right)^{p}\frac{L^{\left[2m(1+\alpha)+(2p-1)\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]}}{(1+\alpha)^2(2p-1)\Gamma(p+1)}$$
$$\times\left[1+\left(\frac{2p-1}{4}-\frac{2}{1+\alpha}\right)\frac{2p+1}{4m}t+\ldots\right].$$

En résumé, lorsque $\alpha > 1$, la valeur de l'intégrale L, déduite des formules (66), (67), (68), (69), (70), (71), (72), (73) est la suivante :

$$(74)\qquad L = \frac{4\pi\alpha}{(\alpha^2-1)^{\frac{3}{2}}}\left[E^{2m\sqrt{\alpha^2-1}} + E^{-2m\sqrt{\alpha^2-1}} - 2\right]$$
$$\frac{4}{(1-\alpha)^2}\sqrt{\frac{\pi}{m}}\frac{n}{m}\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{\left(\frac{n^2}{m}\right)^{p-1}}{(2p-1)\Gamma(p+1)}$$
$$\times\left\{\cos\left[2m(1-\alpha)+\left(p-\frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]\right.$$
$$\left.-\frac{2p+1}{4m}\left(\frac{2p-1}{4}-\frac{2}{1-\alpha}\right)\sin\left[2m(1-\alpha)+\left(p-\frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]\right\}$$

+ un terme qui se déduit du précédent en changeant α en $-\alpha$.

Cette expression n'est d'ailleurs pratiquement applicable que si α diffère assez de 1, pour que le produit $m(1-\alpha)$ ait une valeur élevée. Comme dans le cas où $\alpha < 1$, le dernier terme non écrit est négligeable vis-à-vis du précédent.

Posant, comme nous l'avons déjà fait,

$$\frac{n}{m} = \alpha, \qquad 2m(\alpha - 1) = x$$

la formule (74) devient, en ne retenant que les termes les plus importants,

$$(74') \qquad \frac{L}{32n^2\sqrt{2\pi m}} = \frac{\sqrt{\pi}\left(1 + \frac{x}{2m}\right)}{4\alpha\left[x\left(2 + \frac{x}{2m}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\times \left[E\sqrt{\frac{1}{2\pi\left(1+\frac{x}{2m}\right)}} + E\sqrt{\frac{1}{2\pi\left(1+\frac{x}{2m}\right)}} + \alpha\right]$$

$$= \frac{1}{4x^2}(U\cos x - V\sin x)$$

$$+ \frac{1}{4x^3}(W\cos x + Z\sin x) + \frac{1}{x^4}(\ldots) + \ldots,$$

les termes négligés contenant en facteur $\frac{1}{x^4}$, $\frac{1}{mx^3}$ ou $\frac{1}{m^2}$; U, V, W et Z représentant d'ailleurs les séries définies à propos de la formule (59').

V.

RÉSUMÉ DES FORMULES EXPRIMANT K.

m, n, α étant les paramètres définis par les formules (4) et K l'intégrale qui figure dans l'expression (5) de l'intensité I, les formules suivantes donnent la valeur de K, avec une faible erreur relative, dans différentes hypothèses.

Posons :

$$
(75)\quad \left\{
\begin{aligned}
S_0 &= \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\left(\frac{n^2}{m}\right)^{p-1}}{(2p-1)^2(2p-3)\,\Gamma(p+1)} \left(\cos p\frac{\pi}{2} + \sin p\frac{\pi}{2}\right),\\
U &= \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\left(\frac{n^2}{m}\right)^{p-1}}{(2p-1)\,\Gamma(p+1)} \left(\cos p\frac{\pi}{2} + \sin p\frac{\pi}{2}\right),\\
V &= \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\left(\frac{n^2}{m}\right)^{p-1}}{(2p-1)\,\Gamma(p-1)} \left(\cos p\frac{\pi}{2} - \sin p\frac{\pi}{2}\right)\,(^1),\\
W &= \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{2p+1}{2p-1}\,\frac{\left(\frac{n^2}{m}\right)^{p-1}}{\Gamma(p+1)} \left(\cos p\frac{\pi}{2} - \sin p\frac{\pi}{2}\right),\\
Z &= \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{2p+1}{2p-1}\,\frac{\left(\frac{n^2}{m}\right)^{p-1}}{\Gamma(p+1)} \left(\cos p\frac{\pi}{2} + \sin p\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Les sommes de ces séries sont inscrites dans le Tableau suivant, pour diverses valeurs du rapport $\frac{n^2}{m}$:

$\frac{n^2}{m}$.	S_0	U.	V.	W	Z.
0,00	—1,0000	—1,0000	—1,0000	—3,000	3,000
01	1,0006	0,9983	1,0017	3,008	2,992
02	1,0011	0,9966	1,0033	3,017	2,983
03	1,0017	0,9950	1,0050	3,025	2,975
04	1,0022	0,9933	1,0066	3,033	2,967
05	1,0028	0,9916	1,0082	3,041	2,958
06	1,0033	0,9899	1,0099	3,049	2,950
07	1,0039	0,9882	1,0115	3,057	2,941
08	1,0045	0,9864	1,0131	3,066	2,932
09	1,0050	0,9847	1,0147	3,073	2,923
10	1,0056	0,9830	1,0163	3,080	2,915
20	1,0112	0,9654	1,0320	3,158	2,824
30	1,0169	0,9472	1,0469	3,228	2,730
40	1,0226	0,9284	1,0610	3,293	2,633

(1) La série V est identique à la série T_s, définie par les formules (86) pour $s = 0$.

$\frac{n^2}{m}$	S_0.	U.	V.	W.	Z.
50.....	1,0283	0,9091	1,0713	1,354	[illegible]
60.....	1,0341	0,8894	1,0868	1,405	[illegible]
70.....	1,0399	0,8692	1,0985	1,455	[illegible]
80.....	1,0458	0,8487	1,1094	[illegible]	[illegible]
0,90.....	1,0517	0,8279	1,1193	1,556	[illegible]
1,00.....	1,0576	0,8068	1,1285	1,558	[illegible]
2,00.....	1,1185	0,5910	1,1701	[illegible]	[illegible]
3,00.....	1,1813	0,3982	1,1515	[illegible]	[illegible]
4,00.....	1,2447	0,2593	1,0420	[illegible]	[illegible]
5,00.....	1,3078	0,1809	0,9440	1,829	[illegible]
6,00.....	1,3696	0,1488	0,8516	1,664	0,213
7,00.....	1,4299	0,1391	0,7912	1,712	0,146
8,00.....	1,4880	0,1322	0,7535	1,775	0,246
9,00.....	1,5444	0,1193	0,7261	1,710	[illegible]
10,00.....	−1,5991	−0,1019	−0,7000	−1,558	[illegible]

D'après les formules (7), (12), (13) et (3'), on a

$$\frac{m^2 K}{2\sqrt{2\pi m}} = \frac{J}{16 n^2 \sqrt{2\pi m}} - \frac{L}{32 n^2 \sqrt{2\pi m}}. \tag{76}$$

Partant de cette expression et posant

$$\nu = \frac{n^2}{m}, \qquad x = 2m(\alpha - 1), \tag{77}$$

on a :

1° Pour $\alpha < 1$ et non voisin de zéro ou $x < 0$ et non voisin de $-2m$, d'après les formules (25'), (59)',

$$\frac{m^2 K}{2\sqrt{2\pi m}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\nu}} \left\{ \frac{1}{x\left(\nu + \frac{x}{2m}\right)} \left[1 - \left(1 + \frac{x}{2m}\right) \frac{\sin\sqrt{-2\nu x\left(1 + \frac{x}{2m}\right)}}{\sqrt{-2\nu x\left(1 + \frac{x}{2m}\right)}} \right] \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{1 - \cos\sqrt{-2\nu x\left(1 + \frac{x}{2m}\right)z}}{\sqrt{-2\nu x\left(1 + \frac{x}{2m}\right)z^3}} dz \right\}$$

en posant

$$(78)\quad \tau = \frac{\left[1 + \frac{W}{x} + \frac{1}{x^2}(\ \ )\right]\cos x - \left[V - \frac{Z}{x} - \frac{1}{x^2}(\ \ )\right]\sin x}{4x^2}$$

— des termes négligeables contenant en facteur $\frac{1}{mx^2}$, $\frac{1}{m^2}$ ou $\frac{1}{8n^2\sqrt{2\pi m}}$.

2° Pour $\alpha > 1$ ou $x > 0$, d'après les formules (26'), (74'),

$$(79)\quad \frac{m^2 K}{2\sqrt{2\pi m}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\nu}\,x\left(2 + \frac{x}{2m}\right)}\left[1 + \left(1 + \frac{x}{2m}\right)\frac{E^{\sqrt{2\nu x\left(2+\frac{x}{2m}\right)}} - 1}{\sqrt{2\nu x\left(2 + \frac{x}{2m}\right)}}\right] + \tau;$$

m étant considérable, le rapport $\frac{\sqrt{2\nu(2x)}}{16m}$ peut être petit, même quand x est assez élevé. Les formules (78) et (79) prennent alors une forme plus avantageuse, pour le calcul numérique, en les développant suivant les puissances de $\frac{1}{m}$, la décroissance des termes étant rapide. Tenant compte de la relation (62), on trouve, pour $\alpha < 1$ ou $x < 0$,

$$(80)\quad \frac{m^2 K}{2\sqrt{2\pi m}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\nu}}\left\{\frac{1}{2x}\left[1 - \frac{\sin\sqrt{-4\nu x}}{\sqrt{-4\nu x}}\right] + \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2\nu x}} \frac{1 - \cos\sqrt{-4\nu x}\,z}{\sqrt{-4\nu x}\,z^2}\,dz\right.$$
$$+ \frac{x}{8m}\left[\frac{1 - \cos\sqrt{-4\nu x}}{\sqrt{-4\nu x}} - \frac{1}{2x}\left(2 - \frac{\sin\sqrt{-4\nu x}}{\sqrt{-4\nu x}} + \cos\sqrt{-4\nu x}\right)\right]$$
$$+ \frac{x^2}{128m^2}\left[\frac{1}{2x}\left(8 + 9\frac{\sin\sqrt{-4\nu x}}{\sqrt{-4\nu x}} - \cos\sqrt{-4\nu x}\right) - 2\nu\frac{\sin\sqrt{-4\nu x}}{\sqrt{-4\nu x}} - \sin\sqrt{-4\nu x} - 3\frac{1 - \cos\sqrt{-4\nu x}}{\sqrt{-4\nu x}}\right] + \ldots\Big\} + \tau,$$

et, pour $\alpha > 1$ ou $x > 0$,

$$(80')\quad \frac{m^2 K}{2\sqrt{2\pi m}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\nu}}\left\{\frac{1}{2x}\left[1 + \frac{E^{-\sqrt{2\nu x}} - 1}{\sqrt{4\nu x}}\right] + \frac{1}{16m}\left[2 + \frac{E^{-\sqrt{2\nu x}} - 1}{\sqrt{4\nu x}} - E^{-\sqrt{2\nu x}}\right] + \ldots\right\} + \tau,$$

τ étant donné par la formule (78').

3° D'après les formules (27′), (44), (76) et (86), on a, pour $\alpha = 1$ ou $x = 0$, c'est-à-dire au bord géométrique de l'image,

$$(81)\quad \frac{m^2 K_B}{2\sqrt{2\pi m}} = -S_0 - \frac{\sqrt{2\pi\lambda}}{6} - \frac{1}{8m}\left[\frac{V}{2} - \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}\right]$$

$$+ \text{ des termes contenant } \frac{1}{m^2} \text{ ou } \frac{1}{8n^3\sqrt{2\pi m}} \text{ en facteur.}$$

4° Enfin, pour $\alpha = 0$ ou $x = -2m$, c'est-à-dire au centre de l'image, on a d'après les formules (28′) et (59″),

$$(82)\quad \frac{m^2 K_0}{2\sqrt{2\pi m}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2\lambda}}\left(\pi - \frac{1}{n} + \text{ des termes contenant } \frac{1}{m} \text{ en facteur}\right)$$

VI.

Les formules (78) et (79) se composent chacune de deux parties : l'une connue exactement en termes finis, et provenant des résidus relatifs aux pôles des éléments différentiels des intégrales qui interviennent dans le calcul de K ; la seconde τ, fournie par des développements asymptotiques, applicables seulement lorsque n a une valeur suffisamment élevée, est connue avec une faible erreur relative et, par suite, avec une erreur absolue négligeable, τ étant très petit, comme on le verra. On suppose, par ailleurs, la largeur de la fente suffisante pour que $\frac{1}{8n^3\sqrt{2\pi m}}$ soit totalement négligeable.

Il reste à trouver une expression de K, applicable au cas où n n'est pas un nombre élevé, en tenant compte de ce que m et n sont grands. Reportons-nous, à cet effet, à la formule (7). Nous avons démontré (12) que la première intégrale est identiquement nulle. L'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{1}{n-\alpha}\,\frac{1+\sqrt{\alpha}-(1-\sqrt{\alpha})^2}{(1-\alpha)^2}\,d\alpha$$

a été calculée au paragraphe III. Les expressions trouvées, (25) et (26), sont valables lorsque α tend vers 1 et ne tombent en défaut que pour α très petit.

Il faut, au contraire, calculer une nouvelle expression de la troisième intégrale L, valable pour α voisin de 1. A cet effet, nous allons la développer suivant les puissances ascendantes de $\alpha - 1$.

Nous avons, en conséquence, à chercher la valeur, pour $\alpha = 1$, de la dérivée d'ordre s, par rapport à α, de l'intégrale double qui figure dans la formule (7) et que l'on peut mettre sous la forme

$$(83) \qquad L = \int_C \frac{E^{(2m)u-\alpha} + E^{(2m)u+\alpha}}{(u-\alpha)^2}\, du \int_{\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} \frac{1-\cos 2nt}{t^2}\, dt.$$

Remarquant que la dérivée, par rapport à α, de la fraction dépendant de $u - \alpha$, sous le premier signe $\int$, est égale et de signe contraire à sa dérivée par rapport à u, il vient

$$\frac{dL}{d\alpha} = -\int_C \frac{d}{du} \frac{E^{(2m)u-\alpha} + E^{(2m)u+\alpha}}{(u-\alpha)^2}\, du \int_{\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} \frac{1-\cos 2nt}{t^2}\, dt.$$

Intégrant par parties et remarquant que la partie intégrée est nulle, comme reprenant sa valeur quand la variable, après avoir décrit le contour en entier, revient au point de départ, on tire de là

$$\frac{dL}{d\alpha} = \int_C \frac{E^{(2m)u-\alpha} + E^{(2m)u+\alpha}}{(u-\alpha)^2}\, du \frac{d}{du} \int_{\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} \frac{1-\cos 2nt}{t^2}\, dt.$$

Cette expression se généralise de proche en proche et l'on a

$$\frac{d^2L}{d\alpha^2} = \int_C \frac{E^{(2m)u-\alpha} + E^{(2m)u+\alpha}}{(u-\alpha)^2}\, du \frac{d^2}{du^2} \int_{\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} \frac{1-\cos 2nt}{t^2}\, dt.$$

Faisant $\alpha = 1$ et développant $\cos 2nt$ en série, cette formule devient

$$(84) \qquad \left(\frac{d^2L}{d\alpha^2}\right)_{\alpha=1} = 2\sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^{p+1} \frac{(2n)^{2p}}{\Gamma(2p+1)} \frac{1}{2p-1}$$
$$\times \int_C \frac{E^{(2m)u-1} + E^{(2m)u+1}}{(u-1)^2} \frac{d^2}{du^2} (1-u^2)^{p-1}.$$

Il s'agit de trouver la valeur asymptotique de l'intégrale, pour p fixe et m très grand. Comme dans les applications que nous ferons

des résultats, on n'aura à prendre qu'un nombre restreint de termes dans la série, p doit être regardé comme très petit, par rapport à m qui est considérable, par hypothèse. C'est ce qui va nous permettre d'appliquer les formules (2) et (3).

Les points singuliers de l'élément différentiel sont les points $u = +1$ et $u = -1$. Leur considération conduit à appliquer les formules (2) et (3) aux développements de

$$\frac{1}{(u-1)^2}\frac{d^s}{du^s}(1-u^2)^{p-\frac{1}{2}},$$

en suivant une voie absolument semblable à celle qui a été adoptée pour arriver à la formule (44). On a d'abord, en différentiant le développement (40),

$$(85)\qquad \frac{1}{(u-1)^2}\frac{d^s}{du^s}(1-u^2)^{p-\frac{1}{2}}$$

$$= (-1)^{p+1}2^{p-\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\,\frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}-s\right)}(u-1)^{p-\frac{1}{2}-s}$$

$$\times\left[1+\frac{4p^2-1}{2p-2s+1}\,\frac{u-1}{4}+\ldots\right],$$

le binome $(u-1)^{p-\frac{1}{2}-s}$ étant réel et positif, pour u réel et supérieur à 1.

On obtiendrait le développement de la même fonction, dans le voisinage du point $u = -1$, en partant de la formule (41). Mais on n'a pas à en faire usage, du moment où l'on admet, sur la valeur de l'intégrale à calculer, une erreur relative de l'ordre de $\frac{1}{m^2}$. Cette particularité s'est déjà présentée en établissant la formule (44). Tous calculs faits, la formule (84) devient

$$\left(\frac{d^s L}{d\alpha^s}\right)_{\alpha=0} = \sum_{p=1}^{p=\infty}\pi\frac{(2n)^{2p}}{2p-1}\,\frac{\alpha^{p-\frac{1}{2}}}{(2m)^{p-\frac{1}{2}-s}}\,\frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2p-1)\,\Gamma\left(p-\frac{1}{2}-s\right)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}-s\right)}$$

$$\times\left[\cos\left(p-\frac{7}{2}-s\right)\frac{\pi}{2}\right.$$

$$\left.+\frac{2p-2s-3}{2p-2s+1}\,\frac{4p^2-1}{16m}\sin\left(p-\frac{7}{2}-s\right)\frac{\pi}{2}+\ldots\right].$$

elle peut d'ailleurs être modifiée en tenant compte des propriétés de la fonction Γ, rappelées dans l'Introduction, et qui permettent d'écrire

$$\Gamma\left(-p+\frac{5}{2}+s\right)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}-s\right)$$
$$=\left(-p+\frac{3}{2}+s\right)\left(-p+\frac{1}{2}+s\right)\frac{\pi}{\sin\left(p-s+\frac{1}{2}\right)\pi}$$
$$(2p-2s-3)(2p-2s-1)\frac{\pi}{4}(-1)^{p-s}$$

et

$$\frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2p+1)}=\frac{\sqrt{\pi}\,2^{-2p}}{\Gamma(p+1)}.$$

Posant

$$(86)\quad \begin{cases} S_s=\displaystyle\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{\cos\left(p-s\right)\frac{\pi}{2}+\sin\left(p-s\right)\frac{\pi}{2}}{(2p-1)(2p-2s-3)(2p-2s-1)\Gamma(p+1)}\left(\frac{n^2}{m}\right)^{p-1}, \\ T_s=\displaystyle\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{\cos\left(p-s\right)\frac{\pi}{2}-\sin\left(p-s\right)\frac{\pi}{2}}{\left[4(p-s)^2-1\right]\Gamma(p+1)}(2p+1)\left(\frac{n^2}{m}\right)^{p-1}, \end{cases}$$

on arrive finalement à l'expression

$$(87)\quad \left(\frac{d^2L}{da^2}\right)_{a=0}=2^2\sqrt{2\pi m}(2m)^2n^2\left[S_0+\frac{1}{16m}T_0+\frac{1}{m^2}(\ldots)+\ldots\right].$$

On a en conséquence, d'après la formule (76)

$$\frac{m^2K}{2\sqrt{2\pi m}}=\frac{1}{16n^2\sqrt{2\pi m}}J=\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{\left[2m(\alpha-1)\right]^s}{\Gamma(s+1)}\left[S_s+\frac{1}{16m}T_s+\frac{1}{m^2}(\ldots)+\ldots\right],$$

J s'exprimant, suivant les cas, par les formules (25) ou (26), valables lorsque α tend vers 1. Tenant compte des formules (77), (25') et (26'), on obtient, pour $\alpha<1$ ou $x<0$,

$$(88)\quad \frac{m^2K}{2\sqrt{2\pi m}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\nu x\left(2+\frac{x}{2m}\right)}}\left[1-\left(1+\frac{x}{2m}\right)\frac{\sin\sqrt{2\nu x\left(2+\frac{x}{2m}\right)}}{\sqrt{2\nu x\left(2+\frac{x}{2m}\right)}}\right]$$
$$\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{x^s}{\Gamma(s+1)}\left[S_s+\frac{1}{16m}T_s+\frac{1}{m^2}(\ldots)+\ldots\right]$$

et, pour $\alpha > 1$ ou $x > 0$,

$$(88') \quad \frac{m^2 K}{2\sqrt{2\pi m}}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\alpha x}\left(2 + \frac{x}{2m}\right)} \left[1 + \left(1 + \frac{x}{2m}\right) E^{-\sqrt{2\alpha x\left(2 + \frac{x}{2m}\right)}} - E^{-\sqrt{2\alpha x\left(2 + \frac{x}{2m}\right)}} \right]$$

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{x^s}{\Gamma(s+1)} \left[S_s + \frac{1}{16m} T_s + \frac{1}{m^2} (\ldots) + \ldots \right],$$

en négligeant des termes en $\frac{1}{8\alpha^2\sqrt{2\pi m}\, n^{\frac{3}{2}}}$ qui sont complètement insensibles dans les conditions où nous aurons à appliquer ces formules (α voisin de 1 et $\frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$).

VII.

Les formules établies dans les pages qui précèdent permettent d'étudier les variations de l'intensité en fonction de x, en prenant comme unité l'intensité I_B au bord géométrique, c'est-à-dire au bord qui limiterait nettement le contour de l'image, sans l'existence de la diffraction.

C'est là de beaucoup la question la plus importante à élucider, parce qu'elle se rapporte à la répartition complexe de la lumière au voisinage du bord géométrique. L'aspect d'une région restreinte d'une surface éclairée dépend, en effet, non pas des variations de l'intensité absolue à l'intérieur, mais de celles de l'intensité relative, par rapport à l'intensité localisée en un point particulier choisi dans cette région. En posant

$$y = \frac{I}{I_B},$$

on a, d'après la formule (5),

$$(89) \qquad y = \frac{K}{K_B},$$

K_0 étant donné par la formule (81) et K, suivant les circonstances, par l'une des formules (78), (79), (82) ou (88).

D'après la formule (81), la formule (89) peut s'écrire

$$(89') \qquad \left| S_0 - \frac{\sqrt{2\pi\nu}}{6} - \frac{1}{16m}\left(\nu - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{\nu}}\right)\right| y = \frac{m^2 K}{2\sqrt{2\pi m}}.$$

Il convient, pour étudier y, de calculer tout d'abord les dérivées $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ pour $x = 0$. A cet effet, il faut partir des formules (89') et (88). Négligeant les termes en $\frac{1}{m}$ qui sont très petits, en raison de la grandeur de m, la formule (89') devient

$$(90) \qquad \left(S_0 - \frac{\sqrt{2\pi\nu}}{6}\right) y = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2\nu}}\left[1 - \frac{\sin\sqrt{12\nu}\,x}{\sqrt{12\nu}\,x}\right] \sum_{s=0}^{\infty} S_s \frac{x^s}{\Gamma(s+1)},$$

S_s étant défini, en fonction du rapport $\nu = \frac{n^2}{m}$, par la formule (86).

Développant le second membre en série, il vient

$$(90') \qquad \left(S_0 - \frac{\sqrt{2\pi\nu}}{6}\right) y = \sqrt{2\pi\nu} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(12\nu x)^s}{1.2\ldots(2s+3)} \sum_{s=0}^{\infty} S_s \frac{x^s}{1.2\ldots s}.$$

On arriverait d'ailleurs au même résultat en partant de l'expression (26') de J au lieu de (25').

On tire de là

$$(91) \qquad \left\{ \begin{aligned} \left(S_0 - \frac{\sqrt{2\pi\nu}}{6}\right)\frac{dy}{dx} &= 12\sqrt{2\pi\nu} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s(12\nu x)^{s-1}}{1.2\ldots(2s+3)} \sum_{s=1}^{\infty} S_s \frac{x^{s-1}}{1.2\ldots(s-1)}, \\ \left(S_0 - \frac{\sqrt{2\pi\nu}}{6}\right)\frac{d^2y}{dx^2} &= 12^2\sqrt{2\pi\nu} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s(s-1)(12\nu x)^{s-2}}{1.2\ldots(2s+3)} \sum_{s=1}^{\infty} S_s \frac{x^{s-2}}{1.2\ldots(s-2)}. \end{aligned} \right.$$

Il en résulte, pour $x = 0$,

$$(92) \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \frac{1}{3}\,\frac{S_1 + \frac{1}{10}\sqrt{2\pi\nu^3}}{S_0 - \frac{\sqrt{2\pi\nu}}{6}}, \qquad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = \frac{S_2 + \frac{\sqrt{2\pi\nu^5}}{15}}{S_0 - \frac{\sqrt{2\pi\nu}}{6}}.$$

Les valeurs de S_0 et de S_1, en fonction du rapport $\nu = \frac{n^2}{m}$, sont données dans le Tableau suivant :

$\nu = \frac{n^2}{m}$.	S_0.	S_1.	$\nu = \frac{n^2}{m}$.	S_0.	S_1.	$\nu = \frac{n^2}{m}$.	S_0.	S_1.
0,01..	—1,0006	0,33167	0,1...	—1,0056	0,31656	1.....	—1,0576	—0,15515
0,02..	1,0011	0,33000	0,2...	1,0112	0,29956	2.....	1,1185	—0,04714
0,03..	1,0017	0,32832	0,3...	1,0169	0,28232	3.....	1,1813	0,27488
0,04..	1,0022	0,32665	0,4...	1,0226	0,26486	4.....	1,2447	0,52844
0,05..	1,0028	0,32497	0,5...	1,0283	0,24718	5.....	1,3078	0,80752
0,06..	1,0033	0,32329	0,6...	1,0341	0,22922	6.....	1,3696	1,11124
0,07..	1,0039	0,32161	0,7...	1,0399	0,21109	7.....	1,4297	1,43854
0,08..	1,0045	0,31993	0,8...	1,0458	0,19267	8.....	1,4880	1,78814
0,09..	1,0050	0,31824	0,9...	1,0517	0,17406	9.....	1,5444	2,15892
0,10..	—1,0056	0,31656	1,0...	—1,0576	0,15515	10.....	—1,5991	—2,54979

Posant

$$S_0 + \frac{\sqrt{2\pi\nu}}{6} = \delta,$$

$$3S_1 + \frac{\sqrt{2\pi}}{10}\nu^{\frac{3}{2}} = \Delta,$$

on a

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \frac{1}{3}\frac{\Delta}{\delta}, \tag{93}$$

δ et $\frac{\Delta}{\delta}$ sont fournis par les Tables suivantes :

$\nu = \frac{n^2}{m}$.	δ.	$\frac{\Delta}{\delta}$.	$\nu = \frac{n^2}{m}$.	δ.	$\frac{\Delta}{\delta}$.	$\nu = \frac{n^2}{m}$.	δ.	$\frac{\Delta}{\delta}$.
0,01..	—0,95878	—1,0380	0,1...	—0,87347	—1,0963	1....	—0,63984	—1,1192
0,02..	0,94203	1,0517	0,2...	0,82435	1,1173	2....	0,52764	1,0757
0,03..	0,92931	1,0613	0,3...	0,78805	1,1270	3....	0,45766	1,0341
0,04..	0,91866	1,0689	0,4...	0,75835	1,1314	4....	0,40919	1,0364
0,05..	0,90936	1,0752	0,5...	0,73290	1,1327	5....	0,37357	1,0472
0,06..	0,90091	1,0806	0,6...	0,71049	1,1318	6....	0,34623	1,0117
0,07..	0,89337	1,0852	0,7...	0,69039	1,1299	7....	0,32440	1,0071
0,08..	0,88629	1,0893	0,8...	0,67211	1,1268	8....	0,30637	1,0036
0,09..	0,87969	1,0930	0,9...	0,65535	1,1234	9....	0,29109	1,0002
0,10..	—0,87347	—1,0963	1,0...	—0,63984	—1,1192	10....	—0,27797	—0,9977

Il ressort de l'ensemble de ces nombres que y est une fonction

décroissante de x, dans le voisinage de $x = 0$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ étant négatif. Cette dérivée prend d'ailleurs sa plus grande valeur absolue pour $y = \frac{1}{2}$.

Telle est donc la condition pour que l'intensité décroisse le plus rapidement possible, dans le voisinage immédiat de $x = 0$, c'est-à-dire dans le voisinage immédiat du bord géométrique de l'image, quand on passe de l'intérieur à l'extérieur de ce bord.

D'autre part, d'après les formules (89), (82), (81), le rapport de l'intensité centrale I_0 de l'image à l'intensité I_B au bord géométrique a pour valeur approchée, n étant élevé,

$$\frac{I_0}{I_B} = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{2\left(8 + \frac{\sqrt{2\pi}}{10}\right)\sqrt{y}}$$

avec une erreur relative de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{n}$. Cette expression permet de calculer $\frac{I_0}{I_B}$. Elle conduit aux résultats suivants, en fonction du rapport $y = \frac{n^2}{m}$:

	$\frac{I_0}{I_B}$		$\frac{I_0}{I_B}$		$\frac{I_0}{I_B}$
0,01	26	0,1	7,1	1	3,1
0,02	15	0,2	5,3	2	2,6
0,03	12	0,3	4,6	3	2,5
0,04	11	0,4	4,1	4	2,4
0,05	9,7	0,5	3,8	5	2,4
0,06	8,9	0,6	3,6	6	2,3
0,07	8,3	0,7	3,4	7	2,3
0,08	7,9	0,8	3,4	8	2,3
0,09	7,5	0,9	3,3	9	2,3
				10	2,3

Le second membre de la formule (90′) est une fonction continue de x. Il s'ensuit que l'intensité lumineuse varie d'une façon continue, dans le voisinage du bord géométrique, et non brusquement. L'image, au foyer d'une lunette, par suite de la diffraction, n'est donc pas limitée par un bord nettement tranché. Cependant, comme

la variation de l'intensité est extrêmement rapide, quand on traverse le bord géométrique, la chute considérable de lumière, de l'intérieur à l'extérieur de ce bord, donne à l'observateur l'impression de l'existence d'un bord véritable, d'ailleurs mal défini au point de vue physique et auquel il est naturel de donner le nom de *bord optique*.

On vient de voir que la courbe figurant les variations de y possède, au point correspondant au bord géométrique, une tangente inclinée au maximum sur la partie négative de l'axe des abscisses, lorsque $\frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$. Par suite, quand on passe d'un point intérieur à un point extérieur au bord géométrique, tous deux immédiatement voisins et à distances fixes de ce bord, la chute de l'intensité relative est aussi élevée que possible lorsque $\frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$. On peut donc dire que le bord géométrique de l'image est défini le mieux possible, lorsque la largeur de la fente satisfait à cette égalité.

En conséquence, nous nous proposons d'étudier à fond, dans ce qui va suivre, les variations de y, dans l'hypothèse où $\frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$. Nous nous bornerons à fournir ensuite de simples indications sur les courbes figurant ces variations, quand $\frac{n^2}{m}$ possède d'autres valeurs.

Les formules qui ont fourni les résultats, inscrits dans les Tableaux ci-dessus, supposent essentiellement n suffisamment élevé. En conséquence, les nombres correspondant aux plus faibles valeurs de ν n'ont de sens précis que si la longueur de la fente est assez grande pour qu'il en soit ainsi. A cet égard, à côté de termes contenant $\frac{1}{m^2}$ en facteur, nous avons négligé, dans les formules (78), (79), (80), (80'), (81), (88), (88'), des termes de l'ordre de $\frac{1}{8n\sqrt{2\pi m}}$ (quand on les considère en dehors du voisinage du centre de l'image). Ce rapport ne dépasse pas $\frac{1}{m}$, lorsque $\nu > \nu_1$, ν_1 ayant la valeur

$$\nu_1 = [(128\pi)^2 m]^{\frac{1}{2}}.$$

D'après la première formule (4), les valeurs de ν_1, correspondant

à diverses valeurs de la longueur h de la fente, à $\varepsilon = 16'$ et à $\lambda = 0^{\mu},5$, sont les suivantes :

h.	λ.
$2^{m},50$	0,04
1,50	0,04
1,00	0,04
0,80	0,04
0,60	0,04
0,40	0,05
0,30	0,05
0,20	0,05
0,10	0,06

VIII.

ÉTUDE DES VARIATIONS DE y POUR $\frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$.

Dans ce qui va suivre, nous adopterons, comme valeur approchée du demi-diamètre solaire, le nombre $\varepsilon = 16'$ et admettrons que les rayons, admis dans l'œil de l'observateur, ont pour longueur d'onde $\lambda = 0^{\mu},5$.

D'après les formules (4), les valeurs correspondantes de m, n et de la largeur de la fente, en fonction de sa longueur, sont données dans le Tableau suivant, auquel on a joint le rapport ρ par lequel il faut multiplier la surface de la fente, pour avoir celle du cercle de diamètre égal à la longueur de la fente.

Longueur h de la fente.	m	n	ε	Largeur w de la fente.	Surface de la fente.	ρ
$2^{m},50$	7468,18	3655,00	191,29	$0^{m},54$	$1^{m}53,5$	300,3
1,50	4486,91	2193,46	148,16	5,06	75,9	253,6
1,00	2924,27	1460,64	120,94	4,15	41,5	189,9
0,80	2339,61	1167,51	108,15	3,70	29,6	169,9
0,60	1754,95	875,98	93,66	3,20	19,2	147,1
0,40	1169,31	584,80	76,47	2,61	10,4	120,1
0,30	877,98	438,90	66,34	2,26	6,8	104,9
0,20	584,15	292,00	54,08	1,85	3,7	84,9
0,10	292,33	146,17	38,24	1,31	1,3	60,1

D'après les nombres inscrits dans le Tableau situé en tête du paragraphe V, on a, pour $\nu = \frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$,

$$-S_0 = \frac{\sqrt{2\pi\nu}}{6} = 0,73290,$$

$$V = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{\nu}} = 0,69813.$$

Le premier membre de l'équation (89′), pour $\nu = \frac{1}{2}$, se réduit donc à $\left(0,73290 - \frac{0,69813}{16m}\right)y$. En négligeant le terme en $\frac{1}{16m}$, on commet sur y, d'après le Tableau ci-dessus, une erreur relative inférieure à $\frac{1}{48000}$, et par suite tout à fait insensible. Nous partirons, en conséquence, dans ce qui va suivre, de la relation

$$(94) \qquad 0,73290\,y = \frac{m^2 K}{2\sqrt{2\pi m}},$$

K s'obtenant, suivant les cas, en faisant $\nu = \frac{1}{2}$ dans les formules (78), (79) ou (80), (80′) ou (88), (88′).

Nous nous proposons d'appliquer cette formule, pour calculer les valeurs de y correspondant à différentes valeurs de x, à 0,001 près. Il y a plusieurs cas à considérer.

1° La determination des valeurs de y, dans le voisinage du bord géométrique, c'est-à-dire pour des valeurs modérées de x ne dépassant pas 15 en valeur absolue, s'obtient en faisant $\nu = \frac{1}{2}$ dans les relations (88), (88′) et (94). Il convient, en vue de simplifier les calculs numériques, de developper les deux premières par rapport aux puissances du rapport $\frac{x}{m}$, qui y figure de différentes manières, et de se limiter au terme en $\frac{1}{m}$. La quantité négligée qui devient de beaucoup la plus importante, quand x atteint 15 en valeur absolue, se trouve dans le développement du second membre de la formule (88′) : c'est le terme en $\frac{1}{m^2}$ contenant $E^{\sqrt{2x}}$ en facteur,

savoir :

$$\frac{\sqrt{\pi}\,E^{\sqrt{2x}}\,x}{512\,m^2}\left(-9+\sqrt{2x}-2x\right).$$

Cette expression est minimum, pour $x = 2,153\ldots$, entre $x = 0$ et $x = 15$. Sa plus grande valeur absolue correspond à $x = 15$ et à la plus petite valeur de m inscrite dans le Tableau en tête du paragraphe VIII, savoir : $m = 2924,33$. Or on trouve qu'elle ne dépasse pas 0,000 038, quantité totalement négligeable, vu l'ordre d'approximation dont on a besoin, et qui devient bien plus petite encore, quand on se sert d'une lunette d'ouverture supérieure $0^{m},10$ à laquelle correspond la valeur de m introduite dans le calcul ci-dessus.

Le développement des formules (88), (88′) et (89′), effectuées comme on vient de le dire, conduisent aux expressions suivantes, pour $x < 0$:

$$(95)\qquad \left(S_0 - \frac{\sqrt{\pi}}{6}\right)y$$
$$= 0,732\,90\,y$$
$$- \frac{\sqrt{\pi}}{2x}\left[1 - \frac{\sin\sqrt{-2x}}{\sqrt{-2x}}\right] - \sum_{s=0}^{s=\infty} S_s \frac{x^s}{\Gamma(s+1)}$$
$$- \frac{1}{16m}\left[\sqrt{\pi}\left(2 - \frac{\sin\sqrt{-2x}}{\sqrt{-2x}} + \cos\sqrt{-2x}\right) - \sum_{s=0}^{s=\infty} T_s \frac{x^s}{\Gamma(s+1)}\right]$$

et, pour $x > 0$,

$$(96)\qquad \left(S_0 - \frac{\sqrt{\pi}}{6}\right)y$$
$$= 0,732\,90\,y$$
$$- \frac{\sqrt{\pi}}{2x}\left[1 - \frac{E^{\sqrt{2x}} - E^{-\sqrt{2x}}}{2\sqrt{2x}}\right] - \sum_{s=0}^{s=\infty} S_s \frac{x^s}{\Gamma(s+1)}$$
$$- \frac{1}{16m}\left[\sqrt{\pi}\left(2 - \frac{E^{\sqrt{2x}} - E^{-\sqrt{2x}}}{2\sqrt{2x}} - \frac{E^{\sqrt{2x}} + E^{-\sqrt{2x}}}{2}\right) - \sum_{s=0}^{s=\infty} T_s \frac{x^s}{\Gamma(s+1)}\right],$$

S_s et T_s représentant les séries définies par les formules (86), en y faisant $\nu = \frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$.

Ces relations donnent naturellement $y = 1$, pour $x = 0$, c'est-à-dire au bord géométrique, quand on néglige le terme en $\frac{1}{16m}$ qui est alors absolument insensible. On verra du reste que ces termes en $\frac{1}{16m}$ sont négligeables pour toutes les valeurs de x qui ne dépassent pas 15 en valeur absolue, c'est-à-dire entre les limites d'emploi des formules (95) et (96).

2° Au delà de $|x| = 15$, on doit pratiquement renoncer à employer les formules (95) et (96), en raison de la complication des calculs numériques qu'elles entraîneraient. Il convient alors de partir des formules (78) et (79), dont l'approximation est d'autant meilleure que $|x|$ est plus grand. Or elles fournissent déjà, pour $|x| = 15$, comme on le verra plus loin, exactement les mêmes résultats que les formules (95) et (96). Considérons d'abord le cas où $x < -15$. Posant

$$q = \sqrt{-x\left(2 - \frac{x}{2m}\right)},$$

$$\nu = \frac{\tau}{0,73290} = \frac{\left(1,240 - \frac{4,575}{x}\right)\cos x - \left(1,465 - \frac{3,456}{x}\right)\sin x}{4x^2},$$

et négligeant, dans la formule (78), le terme $-\frac{1}{2m\left(2 - \frac{x}{2m}\right)}\frac{\sin q}{q}$ qui introduit dans y un appoint inférieur à $\frac{1}{40000}$, même lorsque m reçoit la plus faible valeur inscrite dans le Tableau du paragraphe VIII, q étant supérieur à 5, on obtient

$$(95') \qquad \nu = 2,418\,41\left[\frac{1}{q^2}\left(1 - \frac{\sin q}{q}\right) + \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{1 - \cos qz}{qz^2}\,dz\right] - \nu.$$

Cette formule se raccorde d'ailleurs exactement avec la formule (95), pour $x = -15$. Tandis que, pour cette valeur, la formule (95) donne $y = 3,3300$, la formule (95') fournit $y = 3,3299$. Les résultats s'accordent à 0,0001 près, tandis que l'approximation demandée est de 0,001.

Les variations du terme très petit ν provoquent des sinuosités de période 2π, dans la courbe représentative de y, qui vont rapidé-

ment en s'amortissant quand x diminue à partir de -15. Le terme principal qui dépend de la fonction

$$F(q) = \frac{1}{q^2}\left(1 - \frac{\sin q}{q}\right) + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1 - \cos qz}{qz^2}\,dz$$

croît avec q. C'est, par conséquent, une fonction décroissante de x pour $x < -15$. On a, en effet, les inégalités

$$F'(q) = -\frac{3}{q^3}\sin q - \frac{2}{q^3}\cos q + \frac{1}{q^2} - \frac{\cos q}{q^2} = -\frac{3}{q^3} + \frac{1}{q} > 0, \quad \text{pour } q > 3.$$

Or q est déjà supérieur à 5 pour $x = -15$.

D'autre part,

$$F''(q) = \frac{1}{q^2}\left[\frac{12}{q^3}\sin q - 6\left(\frac{1}{q^2} - \frac{\cos q}{q^2}\right) - \frac{\sin q}{q} - \frac{2(1 - \cos q)}{q} - \sin q\right].$$

Or, en s'appuyant sur ce que l'équation $q^3 - 3q^2 - 6q + 12 = 0$ a deux racines réelles positives, l'une comprise entre 1 et $\frac{\pi}{2}$, et la seconde entre 3 et 4, on trouve que K désignant un entier positif quelconque supérieur à 1, on a

$$F''(2K\pi + \pi) < 0, \qquad F''\left(2K\pi + \frac{\pi}{2}\right) > 0, \qquad F''(2K\pi + \pi) < 0.$$

L'équation $F''(q) = 0$ a donc deux séries de racines positives auxquelles correspondent des points d'inflexion pour y. La courbe représentant y possède donc, pour $x < 0$, une infinité de sinuosités plus espacées que celles provenant du terme v, q croissant beaucoup moins rapidement que x. Ces sinuosités sont d'ailleurs de faible amplitude et exigeraient, pour être mises graphiquement en évidence, l'emploi d'une échelle d'ordonnées fortement surélevées par rapport à celle des abscisses. Mais leur existence exerce une influence très nette sur l'allure des valeurs numériques de y, résumées dans un Tableau inséré plus loin.

La formule (65) donne l'expression approchée suivante :

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1 - \cos qz}{qz^2}\,dz = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{q} - \frac{2}{q^2}\cos q - \frac{1}{q^2}\left(1 - \frac{6}{q^2}\right)\sin q,$$

d'autant plus exacte que q est plus grand. Elle conduit pour y à

la formule

$$(95'') \quad y = 2,4184 \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{q}\left(1 - \frac{1}{q} - \frac{2}{q^2}\cos q\right) - \frac{1}{q}\left(1 - \frac{1}{q} - \frac{6}{q^2}\right)\sin q \right] - \ldots$$

d'autant meilleure que q est plus élevé et qui peut être employée avec une sécurité parfaite, pour $x < -20\pi$.

C'est ce qui résulte de la comparaison des valeurs de y obtenues en partant des formules (95′) et (95″), pour diverses valeurs de x :

	Formules	
x	(95′).	(95″).
-6π	$y = 3,3650$	3,3687
-8π	3,3914	3,3919
-10π	3,4244	3,4250
-12π	3,4650	3,4656
-14π	3,5074	3,5068
-16π	3,5416	3,5412
-18π	3,5666	3,5658
-20π	3,5809	3,5809

L'exactitude des nombres fournis pour la formule approchée (95″), pour $x < -20\pi$, dépasse certainement 0,001, limite à laquelle s'arrête l'approximation demandée.

Ces formules ont été utilisées, pour obtenir les valeurs de y correspondant à des valeurs de x, échelonnées entre -15 et -100π. Pour simplifier les opérations, l'ensemble des termes dépendant de q a été calculé comme il suit. On a d'abord calculé ces termes en prenant $q = \sqrt{-2x}$, comme si m était infini, c'est-à-dire comme si la longueur de fente était infinie. La véritable valeur de q pouvant s'écrire $q = \sqrt{-2\left(x - \frac{x^2}{4m}\right)}$, on a ensuite interpolé entre les nombres obtenus, pour avoir les valeurs correspondant à $q = \sqrt{-2X}$, en faisant $X = x + \frac{x^2}{4m}$. Or, en procédant ainsi, on arrive à ce résultat intéressant que les corrections à appliquer aux nombres obtenus, en supposant la fente de longueur infinie, ne dépassent pas 0,001 à 0,002, même lorsque la fente a une longueur descendant à $0^m,10$. Les corrections sont d'ailleurs nulles, pour des fentes de longueurs dépassant $0^m,30$. Il n'y a donc

pratiquement pas lieu de tenir compte de ces corrections. Il en résulte que la courbe figurant les variations de y, pour $-100\pi < x < 0$, est pratiquement la même pour toutes les longueurs de fente supérieures à $0^{m},10$. Nous avons déjà dit, en effet, que cette circonstance se présente aussi lorsque x est compris entre 0 et -15. Elle existe également, comme on va le voir, pour $x > 0$. Mais il convient d'ajouter qu'il n'en serait plus tout à fait de même, si l'approximation demandée pour y, au lieu d'atteindre 0,001, était poussée jusqu'à 0,0001.

Pour les valeurs positives de x supérieures à 15, il convient, pour calculer y, de partir des relations (94) et (79) en y faisant $\nu = \frac{1}{2}$. Pour la même raison que tout à l'heure, en posant

$$q = \sqrt{x\left(2 - \frac{x}{2m}\right)},$$

cette relation peut se ramener, en négligeant un terme insensible, à la forme simple

$$(96') \qquad y = 2{,}418\,41\,\frac{1}{q}\left[1 - \frac{\sqrt{\pi}}{q} - 1\right] \quad \text{[illegible]}$$

υ ayant la même signification que dans la formule (95').

La courbe représentant y possède des sinuosités qui s'amortissent rapidement, à cause de la présence du terme υ dans le second membre. Leur période est égale à 2π. Les sinuosités de la seconde catégorie, dont il a été question tout à l'heure, n'existent plus dans le cas actuel.

La formule (96') s'accorde exactement avec la formule (96) pour $x = 15$. Toutes deux fournissent, pour y, la valeur $y = 0{,}0664$. L'accord se manifeste jusqu'à 0,0001, tandis qu'il eût suffit d'une approximation atteignant 0,001.

La formule (96') peut être remplacée par la suivante :

$$(96'') \qquad y = 2{,}418\,41\,\frac{1}{q}\left(1 - \frac{1}{q}\right) \quad \text{[illegible]}$$

en négligeant le terme en $\frac{E^{-\nu}}{q}$ inférieur à 4×10^{-6} pour $x > 15$.

Par ailleurs, on peut remplacer, dans l'expression de y, q par

$Q = \sqrt{2x}$; on a, en effet,

$$q = Q\left(1 - \frac{Q^2}{8m}\right).$$

Pour $x < 100\pi$, $\frac{Q^2}{8m}$ est inférieur à $\frac{1}{3^2}$, même pour la plus petite valeur 2924,33, de m inscrite dans le Tableau du paragraphe VIII. $\frac{1}{q^2}$ et $\frac{1}{q^3}$ sont donc développables en séries très convergentes et l'on a

$$\frac{1}{q^2}\left(1 - \frac{1}{q}\right) = \frac{1}{Q^2}\left(1 - \frac{1}{Q}\right) - \frac{1}{16m}\left(2 - \frac{3}{Q}\right) - \ldots$$

Cette expression montre que, dans le cas le plus défavorable où $m = 2924{,}33$, l'erreur commise sur y, en remplaçant q par Q, n'atteint pas $\frac{1}{20000}$.

q augmentant avec x et étant supérieur à 5, pour $x = 15$, la formule (96″) montre que y est une fonction décroissante de x, au delà de cette valeur, tout au moins quand on fait abstraction du terme très petit υ qui s'amortit rapidement lorsque x augmente.

Les formules (95), (95′), (95″) et (96), (96′), (96″) ont été mises en nombre, en faisant usage tantôt de logarithmes, tantôt d'une machine à calculer, à onze colonnes, permettant d'obtenir des résultats avec un grand nombre de chiffres exacts. C'est par le second moyen qu'ont été trouvées les sommes des séries S_s et T_s, avec huit chiffres significatifs dont le dernier seul comporte une incertitude de 1 à 2 unités. Cette approximation était nécessaire afin de pouvoir calculer la série $S = \sum_{s=0}^{\infty} S_s \frac{x^s}{\Gamma(s+1)}$ et la série $T = \sum_{s=0}^{\infty} T_s \frac{x^s}{\Gamma(s+1)}$ pour toutes les valeurs de x moindres que 15 en valeurs absolues.

Il arrive, en effet, que quelques termes de ces dernières séries, assez grands pour certaines valeurs de x, se détruisent presque totalement. Ce sont seulement les dernières décimales, figurant dans ces termes, qui apportent des appoints aux sommes S et T. En raison de la longueur et de la complication des calculs, toutes les opérations ont été exécutées deux fois d'une façon indépendante. Leur exactitude a ainsi été contrôlée avec certitude.

Les Tableaux numériques suivants fournissent les principaux résultats du calcul :

Valeurs des fonctions S_s *pour* $\frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$:

$$S_s = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos(p-s)\frac{\pi}{2} + \sin(p-s)\frac{\pi}{2}}{(2p-1)(2p-2s-3)(2p-2s-1)\Gamma(p-s)\left(\frac{n^2}{m}\right)^{p-s}}.$$

s.	S_s.	s.	S_s.
0.....	1,098 511 2	20.....	0,000 561 901 90
1.....	0,267 174 333	21.....	−0,000 613 034 99
2.....	−0,047 173 979	22.....	−0,000 466 853 04
3.....	−0,032 112 800	23.....	0,000 510 730 38
4.....	−0,014 195 324	24.....	0,000 390 963 83
5.....	−0,011 151 327	25.....	0,000 330 033 33
6.....	−0,006 034 034 1	26.....	−0,000 333 343 49
7.....	0,005 616 806 3	27.....	−0,000 370 224 61
8.....	0,005 444 652 4	28.....	0,000 287 609 41
9.....	0,004 375 474 1	29.....	0,000 300 823 87
10.....	−0,002 219 763 1	30.....	0,000 290 692 33
11.....	0,000 930 833 1	31.....	0,000 286 673 86
12.....	−0,001 348 290 8	32.....	−0,000 220 438 61
13.....	0,001 067 184 3	33.....	0,000 247 614 36
14.....	−0,001 140 862 1	34.....	−0,000 193 348 11
15.....	0,001 203 264 0	35.....	−0,000 200 069 98
16.....	0,000 875 372 88	36.....	0,000 174 309 48
17.....	0,000 937 153 89	37.....	−0,000 196 878 82
18.....	−0,000 692 800 04	38.....	0,000 156 494 68
19.....	0,000 749 477 47	39.....	0,000 177 464 36
		40.....	−0,000 141 278 21

Somme de la série $S = \sum_{1}^{\infty} \frac{S}{(x+1)(x+2)} v^x$ *pour* $\frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$.

x.	S.	x.	S.
0.....	−1,098 51	0.....	−1,098 51
1.....	−1,096 12	1.....	−0,809 60
2.....	−1,556 18	2.....	−0,666 67
3.....	−1,569 99	3.....	−0,578 92
4.....	−1,800 39	4.....	−0,517 21
5.....	−2,072 53	5.....	−0,470 46
6.....	−2,198 82	6.....	−0,439 17
7.....	−2,266 94	7.....	−0,418 21
8.....	−2,333 33	8.....	−0,739 93
9.....	−2,380 39	9.....	−0,784 63
10.....	−2,418 97	10.....	−0,844 93
11.....	−2,400 67	11.....	−0,913 71
12.....	−2,474 49	12.....	−0,990 94
13.....	−2,490 00	13.....	−1,083 65
14.....	−2,498 72	14.....	−1,177 86
15.....	−2,504 76	15.....	−1,279 38
16.....	−2,507 41		

Valeurs des fonctions T_s *pour* $\frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$.

$$T_s = \sum_{p=1}^{n=\infty} \frac{\cos(p-s)\frac{\pi}{2} - \sin(p-s)\frac{\pi}{2}}{[4(p-s)^2-1]\Gamma(p-1)} (2p-1)\left(\frac{n^2}{m}\right)^{p-1}.$$

s.	T_s.	s.	T_s.
0.....	−1,074 317 52	20.....	[illegible]
1.....	−3,434 686 89	21.....	[illegible]
2.....	0,350 175 06	22.....	[illegible]
3.....	0,090 990 11	23.....	[illegible]
4.....	0,120 646 354	24.....	[illegible]
5.....	0,002 165 070	25.....	[illegible]
6.....	0,040 015 738	26.....	0,001 [illegible]
7.....	−0,005 303 894	27.....	[illegible]
8.....	0,020 624 866	28.....	[illegible]
9.....	0,003 860 914	29.....	[illegible]
10.....	0,012 431 697 5	30.....	[illegible]
11.....	−0,002 779 152 9	31.....	[illegible]
12.....	−0,008 290 006 4	32.....	[illegible]
13.....	0,002 062 813 8	33.....	[illegible]
14.....	−0,005 916 702 4	34.....	[illegible]
15.....	0,001 581 816 7	35.....	[illegible]
16.....	−0,004 432 964 7	36.....	[illegible]
17.....	0,001 247 752 8	37.....	[illegible]
18.....	0,003 444 363 5	38.....	[illegible]
19.....	0,001 007 790 7	39.....	[illegible]

Somme de la série $T = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{T_s}{\Gamma(s+1)} x^s$.

x.	T	x.	T
0.....	−1,07	0.....	−1,07
1.....	−2,19	1.....	[illegible]
−2.....	−3,14	2.....	[illegible]
−3.....	−4,15	3.....	−13,19
−4.....	−9,75	4.....	−19,67
−5.....	−11,18	5.....	−26,96
−6.....	−11,94	6.....	−33,98
−7.....	−12,09	7.....	−40,91
−8.....	+11,74	8.....	[illegible]
−9.....	+10,93	9.....	[illegible]
−10.....	+9,82	10.....	[illegible]
−11.....	+8,46	11.....	[illegible]
−12.....	+7,09	12.....	[illegible]
−13.....	+5,68	13.....	[illegible]
−14.....	[illegible]	14.....	[illegible]
−15.....	[illegible]	15.....	[illegible]

Valeurs de la fonction

$$f_1 = \frac{1}{2x} - \frac{1}{(2x)^2} \cdot \frac{E^{\sqrt{2x}} - E^{\sqrt{2x}}}{2}.$$

x	f_1
0	−0,166 67
1	−0,184 14
2	−0,203 36
3	−0,224 45
4	−0,247 55
5	−0,272 87
6	−0,300 56
7	−0,330 84
8	−0,363 90
9	−0,399 98
10	−0,439 32
11	−0,482 17
12	−0,528 79
13	−0,579 51
14	−0,634 63
15	−0,694 46

Valeurs de

$$P = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{1 - \cos\sqrt{-2xz}}{-2xz^2}\, dz.$$

x.	P.
−15	−0,258 44
6π	−0,230 97
8π	−0,200 28
10π	−0,180 37
12π	−0,166 44
−14π	−0,155 83
16π	−0,147 10
−18π	−0,139 55
20π	−0,132 86

Valeurs de la fonction

$$f_1 = \frac{1}{2x} - \frac{\sin\sqrt{-2x}}{(-2x)^2}.$$

x	f_1
0	−0,166 67
−1	−0,150 78
1,227	−0,147 35
−2	−0,136 34
−3	−0,122 93
−4	−0,111 38
−5	−0,100 63
6	−0,090 95
−7	−0,082 21
−8	−0,074 33
9	−0,067 24
−10	−0,060 86
−11	−0,055 14
−12	−0,050 03
−13	−0,045 45
−14	−0,042 83
−15	−0,037 72
6π	−0,027 15
8π	−0,017 87
−10π	−0,013 92
−12π	−0,012 23
−14π	−0,011 31
16π	−0,010 51
−18π	−0,009 62
−20π	−0,008 63

Valeurs du terme v figurant dans les formules (95′), (95″), (96′), (96

x.	v.	x.	v.
15	0,0004	15	−0,0022
16	−0,0014	−6π	−0,0010
17	−0,0016	−8π	0,0006
18	−0,0005	−10π	0,0004
6π	−0,0007	−12π	0,0002
8π	0,0004	−14π	0,0002
10π	0,0003	16π	0,0001
12π	0,0002	−18π	0,0001
14π	0,0001	−20π	0,0001
16π	0,0001	24π	0,0001
18π	0,0001	−28π	0,0000
20π	0,0001		
24π	0,0001		
28π	−0,0000		

Coefficients de $-\frac{1}{16m}$ *dans les formules* (95) *et* (96).

x.		x.	
-15	7,51	0	[illegible]
-14	8,50	1	[illegible]
-13	9,57	2	[illegible]
-12	10,61	3	[illegible]
-11	11,59	4	[illegible]
-10	12,56	5	[illegible]
-9	13,30	6	[illegible]
-8	13,79	7	[illegible]
-7	13,90	8	[illegible]
-6	13,64	9	[illegible]
-5	12,94	10	[illegible]
-4	11,80	11	[illegible]
-3	9,80	12	[illegible]
-2	8,75	13	[illegible]
-1	7,25	14	[illegible]
		15	[illegible]

D'après ce dernier Tableau et celui inscrit en tête du paragraphe VIII, les termes en $\frac{1}{16m}$ des formules (95) et (96) fournissent, pour y, des appoints inférieurs à un demi-millième, même dans le cas le plus défavorable correspondant à une fente de $0^{m},10$ de longueur et à $|x| = 15$. Ils sont donc toujours négligeables.

Les formules (92) donnent, pour $\nu = \frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$, d'après le Tableau des valeurs de la fonction S_s,

$$(97)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 0,377\,561, \\ \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0} = 0,060\,936\,7. \end{cases}$$

Ces formules montrent que y est une fonction décroissante de x, dans le voisinage de $x = 0$, et que la concavité de la courbe est alors tournée vers les y positives. Le rayon de courbure, pour $x = 0$, est d'ailleurs égal à 20,0417 unités graphiques. En raison de sa grandeur, il y a lieu de penser que la courbe représentant y possède un point d'inflexion, correspondant à une abscisse de valeur peu élevée. Or, en substituant les valeurs $x = -1$ et $x = -2$, dans la série (91) fournissant $\frac{d^2y}{dx^2}$, on trouve, pour $\nu = \frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$:

Pour $x = -1$,

$$0,732\,902\,\frac{d^2y}{dx^2} = 0,008\,520\,6.$$

Pour $x = -2$,

$$0,732\,902\,\frac{d^2y}{dx^2} = -0,027\,1921.$$

La dérivée seconde $\frac{d^2y}{dx^2}$ a donc une racine, comprise entre $x = -1$ et $x = -2$, dont la valeur se trouve par interpolation. On arrive, tous calculs faits, aux valeurs suivantes des coordonnées du point d'inflexion et du coefficient angulaire de la tangente en ce point :

(98) $x = -1,2270\ldots$ $y = 1,4944\ldots$ $\frac{dy}{dx} = -0,415\,66\ldots$

$\frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$. *Valeurs de y.*

x.	y.	x.	y.	x.	y.
-100π	3,699	-12	3,276	17	0,057
-96π	3,699	-11	3,243	18	0,055
-92π	3,698	-10	3,197	6π	0,054
-88π	3,696	-9	3,138	8π	0,042
-84π	3,692	-8	3,068	10π	0,034
-80π	3,688	-7	2,984	12π	0,029
-76π	3,682	-6	2,873	14π	0,025
-72π	3,676	-5	2,716	16π	0,022
-68π	3,671	-4	2,491	18π	0,0192
-64π	3,667	-3	2,187	20π	0,0176
-60π	3,665	-2	1,812	24π	0,0148
-56π	3,664	$-1,227$	1,494 (1)	28π	0,0127
-52π	3,663	-1	1,400	32π	0,0112
-48π	3,659	0	1,000 (2)	36π	0,0100
-44π	3,651	1	0,659	40π	0,0090
-40π	3,657	2	0,410	44π	0,0082
-36π	3,620	3	0,257	48π	0,0076
-32π	3,605	4	0,182	52π	0,0070
-28π	3,597	5	0,155	56π	0,0065
-24π	3,592	6	0,145	60π	0,0061
-20π	3,581	7	0,135	64π	0,0057
-18π	3,566	8	0,120	68π	0,0054
-16π	3,542	9	0,103	72π	0,0051
-14π	3,507	10	0,090	76π	0,0048
-12π	3,466	11	0,083	80π	0,0046
-10π	3,424	12	0,080	84π	0,0044
-8π	3,391	13	0,077	88π	0,0042
-6π	3,365	14	0,072	92π	0,0040
-15	3,330	15	0,066	96π	0,0039
-14	3,313	16	0,061	100π	0,0037
-13	3,300				

(1) Inflexion : $\frac{dy}{dx} = -0,4157$.

(2) Bord géométrique : $\frac{dy}{dx} = -0,3776$.

Il convient, pour représenter graphiquement les variations de l'intensité relative y, en partant des nombres inscrits dans les Tableaux ci-dessus, de changer de variable indépendante en posant

$$\xi = \frac{x}{2\pi} \tag{99}$$

et de prendre ξ comme abscisse. L'avantage résultant de ce changement consiste en ce que l'unité d'abscisse possède alors une signification physique simple. Elle représente le pouvoir séparateur de la lunette d'observation utilisée avec une ouverture circulaire de diamètre égal à la longueur de la fente. C'est ce qui résulte des formules (77) et (4) qui donnent

$$\xi = \frac{h}{\lambda}(\sin\varphi - \sin\varepsilon) = \frac{h}{\lambda}\left[(\varphi - \varepsilon)\cos\varepsilon - \frac{1}{2}(\varphi - \varepsilon)(\sin\varepsilon) + \ldots\right]$$

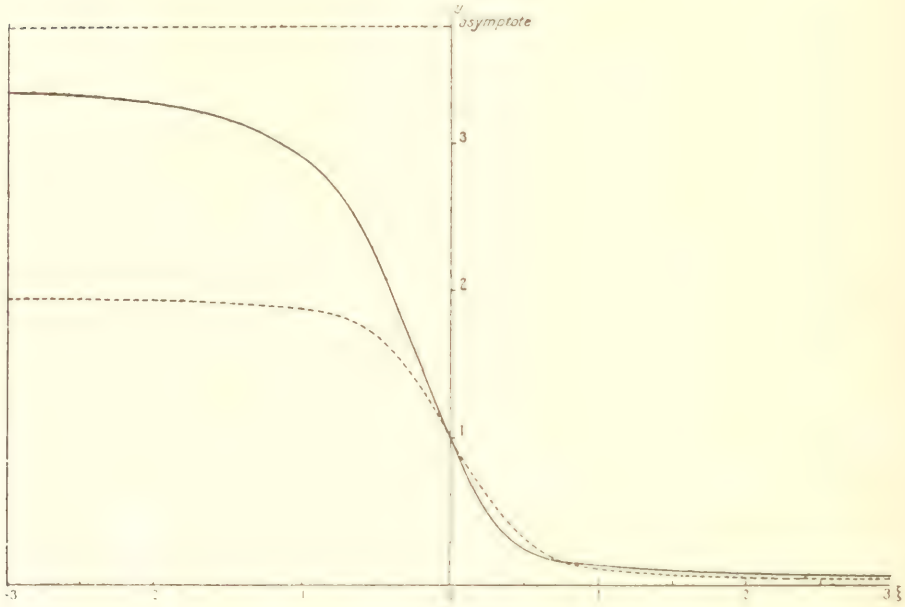
$\cos\varepsilon$ étant pratiquement égal à 1, on voit que ξ varie de 1 lorsque la très faible distance angulaire $\varphi - \varepsilon$ au bord géométrique varie de $\frac{\lambda}{h}$, c'est-à-dire d'une quantité égale au pouvoir séparateur d'une lunette non diaphragmée dont l'objectif a pour diamètre la longueur h de la fente.

Les valeurs de ξ correspondant aux valeurs de x, considérées dans les Tableaux numériques ci-dessus, sont les suivantes :

x	ξ	x	ξ
0	0,000	[illegible]	[illegible]
1	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1,22	[illegible]	16	[illegible]
2	0,318	17	[illegible]
3	[illegible]	18	[illegible]
4	[illegible]	[illegible]	[illegible]
5	[illegible]	[illegible]	[illegible]
6	[illegible]	[illegible]	[illegible]
7	[illegible]	[illegible]	[illegible]
8	[illegible]	[illegible]	[illegible]
9	[illegible]	16π	[illegible]
10	[illegible]	18π	[illegible]
11	[illegible]	[illegible]	[illegible]
12	1,910	[illegible]	[illegible]
13	[illegible]	[illegible]	[illegible]

L'identité $\frac{dy}{d\xi} = 2\pi \frac{dy}{dx}$ permet de calculer la dérivée de y, par rapport à ξ, connaissant la dérivée de y, par rapport à x. Aux valeurs (97) et (98) de $\frac{dy}{dx} = -0,3776$, pour $x = 0$, et $\frac{dy}{dx} = -0,4157$, pour $x = -1,227$, correspondent donc $\frac{dy}{d\xi} = -2,3723$, pour $\xi = 0$, et $\frac{dy}{d\xi} = -2,6117$, pour $\xi = -0,195$. La dérivée seconde $\left(\frac{d^2y}{d\xi^2}\right)_{\xi=0}$ a de même pour valeur $0,060937 \times 4\pi^2 = 2,4056$. On en conclut que le rayon de courbure au point ($\xi = 0$, $y = 1$) de la courbe a pour valeur 7,09. La courbe en trait plein (*fig.* 25) repré-

Fig. 25.



sente les variations de l'intensité relative y, quand ξ varie entre -3 et $+3$, l'intensité au bord géométrique étant prise comme unité. Sur la même figure, est tracée, en trait pointillé, une courbe représentant les variations d'intensité, au voisinage du bord géométrique solaire, dans le cas d'une lunette d'ouverture circulaire de

diamètre égal à la longueur de la fente. Cette courbe a été tracée en prenant comme point de départ la Table de Struve [1]. Cette Table ayant été dressée, en prenant l'intensité au bord géométrique égale à $\frac{1}{2}$, tous les nombres doivent être doublés quand on prend cette intensité pour unité, comme nous l'avons fait. Adoptant comme argument la variable ξ, définie ci-dessus, au lieu de $\pi \frac{h}{\gamma} (\varphi - \varepsilon)$ employé dans la Table de Struve, on a les valeurs suivantes pour l'intensité relative, quand on prend comme unité l'intensité au bord géométrique :

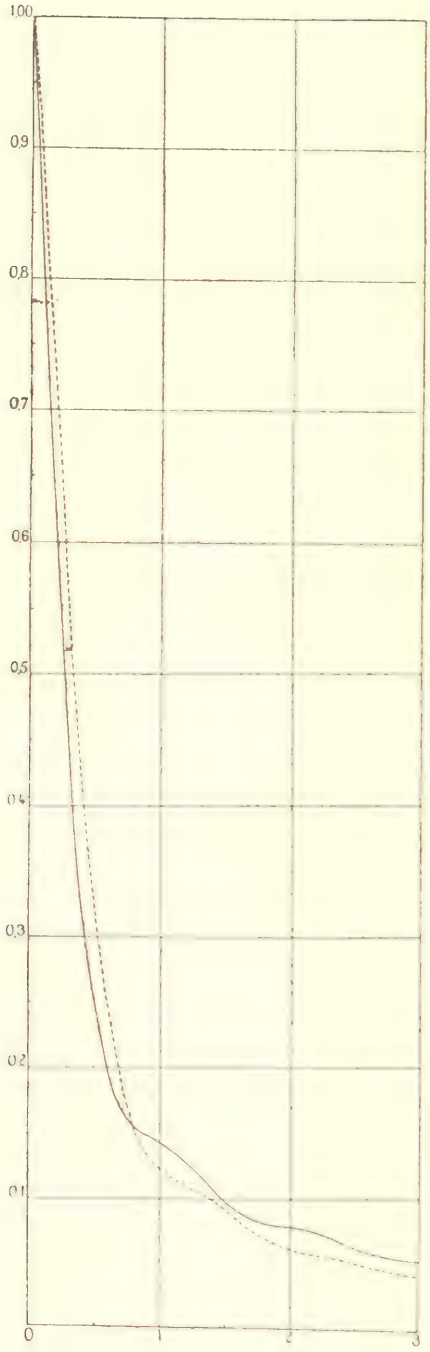
ξ.	Intensité relative.	ξ.	Intensité relative.	ξ.	Intensité relative.
0.000.....	1.0000	0.955.....	0.1260	1.010.....	0.0928
0.0637.....	0.8922	1.019.....	0.1204	1.074.....	0.0868
0.127.....	0.7868	1.082.....	0.1162	1.037.....	0.0821
0.191.....	0.6856	1.146.....	0.1128	1.101.....	0.0816
0.255.....	0.5910	1.210.....	0.1094	1.164.....	[illegible]
0.318.....	0.5042	1.274.....	0.1056	1.228.....	0.0988
0.382.....	0.4264	1.337.....	0.1012	[illegible]	[illegible]
0.446.....	0.3586	1.401.....	0.0968	1.485.....	[illegible]
0.509.....	0.3008	1.464.....	0.0918	1.610.....	[illegible]
0.573.....	0.2530	1.528.....	0.0868	1.737.....	[illegible]
0.637.....	0.2146	1.592.....	0.0820	1.864.....	[illegible]
0.700.....	0.1846	1.655.....	0.0778	[illegible]	[illegible]
0.764.....	0.1620	1.719.....	0.0738	[illegible]	[illegible]
0.828.....	0.1456	1.783.....	0.0706	[illegible]	[illegible]
0.891.....	0.1340	1.846.....	0.0678		

Les valeurs de l'intensité, pour les valeurs négatives de ξ, s'obtiennent en retranchant de 2 les nombres de la Table correspondant aux valeurs absolues de ξ.

Sur la figure 25, la même unité graphique a été adoptée pour les ordonnées et les abscisses. La figure 26 a été tracée en prenant, pour les ordonnées, une unité graphique dix fois supérieure à celle des abscisses et en considérant seulement les variations de l'intensité relative, pour ξ positif, c'est-à-dire à l'extérieur du bord géométrique. Cette figure met en évidence des sinuosités invisibles

[1] André, *Traité d'Astronomie stellaire*, t. I, p. [illegible].

Fig. 2.



sur la figure 25. La courbe en trait plein se rapporte à la fente et la courbe en pointillé à une ouverture circulaire de diamètre égal à la longueur de la fente, comme dans le cas de la figure 25.

La courbe de la figure 25, comme on l'a déjà dit, est pratiquement indépendante de la longueur de la fente. Cette longueur n'intervient que dans la signification de l'unité de l'échelle des abscisses qui représente le pouvoir séparateur $\frac{\lambda}{2\sin\alpha}$ d'une lunette d'ouverture circulaire de diamètre égal à la longueur de la fente. D'ailleurs, la condition $\frac{n^2}{m} = \frac{1}{5}$ assujettissant la largeur de la fente à ne pas dépasser quelques millimètres (*voir* le Tableau numérique en tête du paragraphe VIII), on peut prendre pratiquement, comme longueur de la fente, le diamètre même de l'objectif de la lunette. L'unité d'abscisse correspond alors à $1''$ pour une lunette de $0^m,10$ d'ouverture, à $0'',5$ pour une lunette de $0^m,20$, à $0'',2$ pour une lunette de $0^m,50$, à $0'',1$ pour une lunette de $1^m,00$, à $0'',04$ pour une ouverture de $2^m,50$, etc., dans le cas où la longueur d'onde des radiations, admises dans l'œil, a pour valeur $\lambda = 0^\mu,5$.

La figure 25 met en pleine évidence le fait que l'intensité lumineuse, dans le voisinage immédiat du bord géométrique qui correspond à l'abscisse $\xi = 0$, varie plus rapidement, lorsque l'accès de la lumière, dans la lunette d'observation, est limité par la fente, qu'en employant l'instrument avec une ouverture circulaire de diamètre égal à la longueur de la fente. En passant de l'abscisse $\xi = -1$ à l'abscisse $\xi = +1$, l'intensité est en effet réduite dans le rapport $\frac{1}{2,4}$, dans le premier cas, tandis qu'elle diminue dans le rapport $\frac{1}{1,5}$, dans le second. Le bord optique, observable dans la lunette, est donc plus nettement tranché, en diaphragmant l'objectif par la fente, qu'en utilisant sa surface entière. Ce bord se prête en conséquence à des points plus précis, dans le premier cas que dans le second.

Le bord optique n'étant pas susceptible de définition physique, on peut se demander sur quel point de l'image l'observateur porte

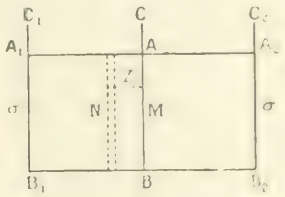
ses pointés micrométriques. La réponse exacte à cette question ne peut être fournie que par l'expérience et l'on peut concevoir, dans ce but, des dispositifs aptes à fournir des données répondant aux besoins des observations. Cependant, il est admissible, *a priori*, que l'observateur doive avoir une tendance à fixer son attention sur la région du bord optique où le contraste est maximum. Ce point, on va l'établir, est situé extérieurement au bord géométrique, à une très faible distance angulaire de ce bord. Or le maximum est plus grand en faisant usage de la fente qu'en utilisant la surface entière de l'objectif; de plus, quand on se déplace normalement au bord géométrique, les variations du contraste, autour du maximum, sont plus élevées dans le premier cas que dans le second. L'observateur, s'il est porté à pointer le point de contraste maximum, fera donc les mesures les plus concordantes dans la première hypothèse. La supériorité de l'emploi de la fente se manifeste ainsi une fois de plus. Nous nous proposons d'établir ces propriétés, après avoir défini le contraste en un point.

Par suite des imperfections de l'œil, les détails à la surface d'un objet éclairé ne s'aperçoivent que s'ils se présentent sous un angle supérieur à une certaine limite σ, probablement de l'ordre de grandeur de $2'$ à $3'$ et variable suivant l'observateur. Tel détail, invisible à l'œil nu, devient d'ailleurs observable, quand on le grossit avec un instrument d'optique, de telle sorte que son diamètre angulaire σ_1, multiplié par le grossissement G, atteigne ou dépasse σ. Une petite surface lumineuse qui se voit sous l'angle σ, impressionne l'œil, non par l'intensité de son éclairement en tel ou tel point, mais par la quantité globale de lumière qu'il en reçoit, l'observateur ne distinguant aucun détail à l'intérieur de la surface. Cette remarque permet de définir numériquement le contraste lumineux en un point M d'une surface dont l'éclairement, supposé continu, n'est pas uniforme.

Considérons la courbe C joignant le point M aux points voisins de la surface, de même intensité que M. Prenons sur C deux points A et B, encadrant le point M à la distance angulaire $\frac{\sigma}{2}$, et menons, en ces points, les normales $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, limitées

aux courbes C_1 et C_2 parallèles à la courbe C et tracées, de part et d'autre de cette courbe, à la distance angulaire σ. Soient Q_1 la quantité de lumière, reçue par l'œil, émanant du petit rectangle BB_1A_1A et Q_2 la quantité analogue relative au rectangle BB_2A_2A. Sup-

Fig.



posant, pour fixer les idées, $Q_1 > Q_2$, nous appellerons contraste lumineux en M le rapport $\rho = \frac{Q_1}{Q_2}$.

Cette définition suppose que l'œil distingue séparément l'une et l'autre petite surface. Or c'est bien ce qui se produit, puisque leur ensemble, dans la direction de la variation de l'intensité, est vu sous l'angle 2σ, tandis que la limite de séparation est σ. D'après cette définition, le contraste, supérieur à 1, est d'autant plus grand que l'une des surfaces est plus lumineuse par rapport à l'autre. Le rapport ρ prend d'ailleurs la valeur 1, lorsque l'éclairement de la surface, autour du point considéré M, est uniforme.

En raison de la petitesse de σ, on peut regarder les deux petits rectangles ABB_1A_1, ABB_2A_2 comme rectilignes pour calculer l'expression analytique du rapport $\frac{Q_1}{Q_2}$.

Soient N un point du premier rectangle, placé à la distance x de AB, et I_1 l'intensité lumineuse en ce point, intensité qui est la même tout le long d'une parallèle à AB, puisque AB est une courbe d'égale intensité et que les courbes voisines, de même nature, peuvent être regardées comme parallèles à la première, dans la très petite surface du rectangle [1]. Une bande de la surface du rec-

[1] S. l'on formait quelque objection sur ce point, elle ne pourrait porter sur l'application qui sera faite plus loin au bord de l'astre. Les courbes d'égale intensité sont, dans ce cas, rigoureusement parallèles, puisque normales à l'axe de symétrie de l'image le long duquel porte l'observation.

tangle, parallèle à AB, et d'épaisseur dz, envoie à l'observateur une quantité de lumière proportionnelle à sa surface et à l'intensité I_1 en N, savoir

$$dQ_1 = H\sigma I_1 dz.$$

H désignant une constante.

La quantité de lumière perçue par l'observateur, émanant du rectangle tout entier, est donc

$$Q_1 = H\sigma \int_{z_1}^{z_2} I_1 dz.$$

On a de même

$$Q_2 = H\sigma \int_{z_2}^{z_3} I_2 dz,$$

d'où

$$\rho = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\int_{z_2}^{z_3} I_2 dz}{\int_{z_1}^{z_2} I_1 dz} \tag{100}$$

Si, au lieu de regarder un objet directement à l'œil, on l'examine avec un instrument d'optique possédant un grossissement G, le plus petit détail visible possède un diamètre $\sigma_1 = \frac{\sigma}{G}$. C'est donc σ_1 qui joue alors le rôle de σ, dans les formules qui précèdent.

Partant de la formule (100), on a calculé le contraste ρ, dans le voisinage du bord géométrique de l'image, en supposant l'œil armé d'un grossissement G tel que l'angle $\sigma_1 = \frac{\sigma}{G}$ soit égal à divers multiples fractionnaires (0,5; 1,0; 1,5; 2,0) du pouvoir séparateur de la lunette employée à pleine ouverture. Ce calcul a été fait : 1° dans le cas où la lunette est employée à pleine ouverture; 2° dans le cas où elle est diaphragmée par une fente de longueur égale au diamètre de l'objectif et de largeur définie par la relation $\frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$. Les nombres obtenus, dans ce dernier cas, se rapportent aux points de l'image placés le long de l'axe de symétrie parallèle au grand côté de la fente.

Les intégrales figurant dans l'expression (100) du rapport ρ sont égales, dans l'un et l'autre cas mentionnés ci-dessus, aux aires des

courbes tracées figure 25 et comprises entre l'ordonnée, correspondant à l'abscisse du point où l'on cherche à obtenir le rapport ρ, et les ordonnées situées de part et d'autre à la distance σ_1.

La première colonne des Tableaux ci-dessous contient les abscisses (le pouvoir séparateur de la lunette est pris comme unité d'abscisse), comptées à partir du bord géométrique, des points où le rapport ρ a été calculé.

Ouverture circulaire. Valeurs de ρ.

Abscisse.	$\sigma_1 = 0.5$.	$\sigma_1 = 1.0$.	$\sigma_1 = 1.5$.	$\sigma_1 = 2.0$.	Remarques.
−0.1	1.98	3.39	4.76	6.07	
0.0	2.25	4.00	5.62	7.16	Bord géométrique.
+0.1	2.55	4.70	6.61	8.32	
0.2	2.84	5.43	7.68	9.78	
0.3	3.10	6.09	8.74	11.15	
0.4	3.29	6.61	9.71	12.43	
0.5	3.3[illegible]	6.87	10.45	13.50	
0.6	3.1[illegible]	6.81	10.84	14.24	
0.7	2.85	6.44	10.84	14.62	
0.8	2.44	5.83	10.49	14.64	
0.9	2.04	5.12	9.89	14.45	
+1.0	1.73	4.42	9.16	14.05	

Fente $\left(\frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}\right)$. Valeurs de ρ.

Abscisse.	$\sigma_1 = 0.5$.	$\sigma_1 = 1.0$.	$\sigma_1 = 1.5$.	$\sigma_1 = 2.0$.	Remarques.
−0.1	2.60	5.04	7.38	9.67	
0.0	2.97	5.91	8.69	11.39	Bord géométrique.
+0.1	3.34	6.76	10.04	13.18	
0.2	3.64	7.47	11.29	14.86	
0.3	3.76	7.86	12.25	16.23	
0.4	3.59	7.81	12.70	17.09	
0.5	3.17	7.37	12.64	17.43	
0.6	2.64	6.66	12.10	17.36	
0.7	2.15	5.81	11.37	16.91	
0.8	1.76	4.95	10.44	16.33	
0.9	1.52	4.15	9.44	15.67	
+1.0	1.41	3.47	8.44	14.84	

L'examen de ces Tableaux met en évidence le fait que le con-

traste passe par un maximum, dans le voisinage du bord géométrique, quand on se déplace normalement à ce bord, quelle que soit la valeur de σ_1, c'est-à-dire quel que soit le grossissement avec lequel on observe les images dans le plan focal. Le contraste maximum correspondant à l'ouverture circulaire, pour une valeur de σ_1, est d'ailleurs inférieur au contraste maximum relatif à la fente, pour la même valeur de σ_1. De plus, les variations du contraste, de part et d'autre du maximum, sont plus rapides dans la seconde hypothèse que dans la première. Le fait saute immédiatement aux yeux, en considérant les courbes construites, dans l'un et l'autre cas, en prenant ξ comme abscisse et portant les valeurs du contraste en ordonnées. Ces propriétés sont bien celles dont il a déjà été question plus haut.

Les théories et les calculs développés, dans le présent Mémoire, supposent l'éclat intrinsèque de l'astre uniforme en chaque point de sa surface. On ne peut, en conséquence, les appliquer en toute rigueur au Soleil dont l'éclat décroît nettement du centre au bord. Les moyens analytiques employés se prêtent d'ailleurs, moyennant certains développements, à l'étude de la diffraction des images de cet astre par une fente, en tenant compte des variations d'éclat du disque, du centre au bord. Laissant cette question de côté pour le moment [1], je me bornerai à montrer ici que les ordonnées des courbes d'intensité, correspondant aux points intérieurs au disque solaire, s'obtiennent approximativement en multipliant les ordonnées, calculées dans l'hypothèse d'un éclat intrinsèque uniforme, par les valeurs variables de cet éclat le long du rayon solaire, rapporté à celui de la périphérie, en chacun des points auxquels correspondent ces ordonnées. C'est ce qui résulte de considérations physiques, fondées sur les effets connus de la diffraction d'une onde plane limitée par une ouverture circulaire, de diamètre h, ou par une fente rectangulaire, de largeur a et de longueur h.

Dans la première hypothèse, les ondes diffractées fournissent,

[1] Ce travail, déjà commencé, demandera encore du temps, en raison des développements et des calculs numériques très laborieux qu'il comporte.

au foyer d'un objectif de diamètre h, une image de largeur angulaire $\frac{\lambda}{h}$, dans laquelle se trouve concentrée la presque totalité de l'énergie lumineuse incidente, entourée d'anneaux beaucoup plus faibles, d'intensités rapidement décroissantes et espacées angulairement de $\frac{\lambda}{h}$. Il s'ensuit que si l'on regarde l'image solaire, au foyer d'un objectif, comme la résultante des images de ses différents points, l'intensité en un point M de l'image, en négligeant une faible erreur relative, provient de l'énergie lumineuse émise par le point P de la surface de l'astre dont M est l'image géométrique, augmentée d'appoints originaires d'une petite région de l'astre, avoisinant le point P et comprise dans un cercle de rayon angulaire montant à un multiple de $\frac{\lambda}{h}$ par quelques unités seulement. Cette région est d'autant moindre que l'objectif est de plus grande largeur, et son éclat intrinsèque moyen diffère nécessairement très peu de l'éclat intrinsèque en P. L'intensité en M est donc sensiblement la même que si tout le disque avait pour éclat intrinsèque celui qui existe en P. L'erreur relative commise est d'autant moindre que le rayon de l'objectif est plus grand.

Lorsque l'objectif est diaphragmé par la fente, un raisonnement analogue est applicable pour les points de l'image disposés le long de l'axe de symétrie parallèle au sens de la longueur de la fente. Il y a cependant une différence. Une onde plane, limitée par une fente de longueur h et de largeur a, fournit au foyer d'une lunette une image dans laquelle la lumière diffractée est concentrée presque en totalité, non plus en un point, mais dans une bande centrale, de largeur angulaire $\frac{\lambda}{h}$ et de longueur angulaire $\frac{\lambda}{a}$, entourée d'anneaux ovales d'intensités décroissantes devenant rapidement insensibles. Les espaces obscurs séparant les anneaux successifs sont d'ailleurs aux distances angulaires $\frac{\lambda}{h}$, $2\frac{\lambda}{h}$, $3\frac{\lambda}{h}$, ... respectivement dans le sens de la longueur de la fente, et aux distances angulaires $\frac{\lambda}{a}$, $2\frac{\lambda}{a}$, $3\frac{\lambda}{a}$, ... dans le sens perpendiculaire. Dans le cas qui

nous occupe, $\frac{\lambda}{h}$ est le pouvoir séparateur d'un objectif de diamètre h égal à la longueur de la fente : $\frac{\lambda}{a}$ est une quantité supérieure, puisque a est petit par rapport à h. Si maintenant on considère l'image solaire, au foyer de la lunette diaphragmée par la fente, comme la résultante des images des divers points de l'astre, on voit que l'intensité, en chaque point M, sur l'axe de symétrie de l'image de l'astre, dirigé dans le sens de la longueur de la fente, provient uniquement, d'après ce qui précède, d'une petite région de la surface de l'astre, avoisinant le point P de cette surface dont M est l'image géométrique, si l'on consent à commettre une faible erreur relative. Cette région, par rapport à celle qui a été considérée tout à l'heure, pour la surface entière de l'objectif, est allongée, à cause de $a < h$, perpendiculairement à l'axe de symétrie de l'image solaire parallèle au grand côté de la fente sur lequel est placé le point M. Or l'éclat intrinsèque de l'astre, fonction seulement de la distance au centre, varie à peine dans ce sens, du moment où l'on ne s'éloigne pas par trop de l'axe considéré, c'est-à-dire à condition de ne pas considérer des fentes par trop étroites. Cette condition se trouve remplie en faisant usage d'une lunette de grande ouverture, armée d'une fente dont la largeur satisfait à la relation $\frac{n}{m} = \frac{1}{2}$. Il en résulte, comme tout à l'heure, que l'intensité en M est sensiblement la même que si tout le disque avait pour éclat intrinsèque celui qui existe en P, à condition que la lunette soit d'ouverture suffisante. L'erreur relative commise est d'autant moindre que cette ouverture est plus considérable.

Ce raisonnement ne donne pas d'indication sur ce qui se passe à l'extérieur du bord géométrique. On peut dire sous ce rapport que, près de ce bord, la lumière diffractée provient nécessairement, en majeure partie, des points du disque répartis sur son contour apparent. L'intensité est donc, dans ce cas, sensiblement la même que si le disque entier avait l'éclat intrinsèque de la périphérie de l'astre.

Les ordonnées des courbes d'intensité relative se trouvent en divisant l'intensité absolue, en chacun des points de l'image, par

l'intensité absolue au bord géométrique. On les obtient, d'après ce qui précède, avec de faibles erreurs relatives, en multipliant les ordonnées des courbes tracées (*fig.* 25) par le rapport de l'éclat intrinsèque, en ces points, à celui de la périphérie de l'astre, rapport qui est le même, que l'objectif soit découvert ou armé de la fente. Cette règle conduit, en conséquence, comme dans l'hypothèse de l'homogénéité d'éclat de l'astre, à la conclusion que le bord optique doit être mieux tranché en masquant l'objectif de la lunette par la fente qu'en l'employant avec sa surface entière.

Toutefois, le raisonnement suppose essentiellement l'objectif suffisamment grand. Des précisions à cet égard ne pourront être données, qu'après extension de la théorie développée, dans le présent Mémoire, au cas où l'éclat intrinsèque de l'astre n'est plus considéré comme uniforme.

Dans l'hypothèse de l'homogénéité d'éclat du disque, on a trouvé le nombre 3.8 comme valeur du rapport $\frac{I}{I_1}$ de l'intensité au centre à celle du bord géométrique, lorsque la largeur de la fente est liée à sa longueur par la relation $\frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$. D'autre part, dans le cas du Soleil, l'éclat intrinsèque central est voisin de cinq fois celui de la périphérie de l'astre, pour la lumière de longueur d'onde $\lambda = 0^{\mu},5$, supposée admise dans l'œil de l'observateur. Il en résulte, en vertu de ce qui précède, que l'éclat de l'image solaire, fournie au foyer d'une lunette armée de la fente, est environ 19 fois plus grand au centre qu'au bord géométrique, à sa rencontre avec l'axe de symétrie parallèle au sens de la longueur de la fente.

IX.

COURBES D'INTENSITÉ POUR $\frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$.

Les calculs numériques considérables qu'il a fallu exécuter, pour tracer la courbe d'intensité relative correspondant à $\frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$ en prenant, comme unité, l'intensité au bord géométrique de l'image,

seraient à recommencer, sous de nouveaux frais, si l'on voulait construire exactement les courbes de même nature se rapportant à d'autres valeurs de $\nu = \frac{n^2}{m}$. Les calculs des séries S_s et T_s seraient même encore plus laborieux, pour $\frac{n^2}{m} > \frac{1}{2}$. Ces courbes présentant un intérêt secondaire, puisque l'intensité varie alors moins rapidement, que dans l'hypothèse correspondant à $\frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$, au voisinage du bord géométrique, nous nous bornerons à de simples indications à leur sujet.

Le Tableau suivant fournit les valeurs de y, calculées pour diverses valeurs du rapport $\nu = \frac{n^2}{m}$ et pour $x = \pm 15$, par les formules (80), (80′), (81) et (89). Les deux premières colonnes fournissent les valeurs Y, obtenues en négligeant les termes en $\frac{1}{m}$ dans les formules; y s'obtient en ajoutant à Y une correction $\Delta Y = \frac{B}{m}$, où B représente

$$B = \frac{\sqrt{\pi}\, x}{\sqrt{2\nu}\, 8}\left[1 - \frac{\cos\sqrt{1+2\nu}}{\sqrt{1+2\nu}} + \frac{1}{2x}\left(1 - \frac{\sin\sqrt{1+2\nu}}{\sqrt{1+2\nu}} - \cos\sqrt{1+2\nu}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{2\pi\nu}}\left[\sin\frac{x\sqrt{2\nu}}{2} - \cos\frac{x\sqrt{2\nu}}{2}\right]$$

pour $x < 0$, et

$$B = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\nu}}\,\frac{1}{16}\left[1 + \frac{\sin\sqrt{1+2\nu}}{\sqrt{1+2\nu}} - \cos\sqrt{1+2\nu}\right] = \frac{1}{8\sqrt{2\pi\nu}}\left[\sin\frac{x\sqrt{2\nu}}{2} + \cos\frac{x\sqrt{2\nu}}{2}\right]$$

pour $x > 0$.

Les deux dernières colonnes du Tableau donnent les valeurs du coefficient B, en fonction de ν.

m étant inférieur, en chiffres ronds, à 5000 (*voir* le Tableau en tête du paragraphe VIII), les valeurs de Δy sont pratiquement négligeables, pour $x = -15$, puisqu'elles ne modifient pas le dernier chiffre à droite de Y; y va donc alors en décroissant, lorsque ν

augmente. Les corrections Δy, pour $x = \pm 15$, peuvent affecter, par contre, le dernier chiffre de Y, lorsque ν est petit. Néanmoins, les valeurs de y conclues vont encore en décroissant, quand ν augmente.

$\frac{n^2}{m}$.	Y pour $x = -15$.	Y pour $x = 15$.	Correction $\Delta Y = \frac{1}{m}$ B. B pour $x = -15$.	B pour $x = 15$.
0,01	4,94	0,1328	−1,84	−2,14
0,02	4,92	0,1234	−0,56	−1,44
0,03	4,90	0,1170	−0,63	−1,14
0,04	4,87	0,1121	−1,25	−0,98
0,05	4,83	0,1081	−1,54	−0,86
0,06	4,79	0,1048	−1,72	−0,78
0,07	4,75	0,1019	−1,77	−0,71
0,08	4,71	0,0994	−1,77	−0,66
0,09	4,66	0,0972	−1,74	−0,63
0,1	4,62	0,0951	−1,67	−0,60
0,2	4,21	0,0819	−0,53	−0,45
0,3	3,85	0,0747	−0,37	−0,36
0,4	3,56	0,0699	+0,87	−0,32
0,5	3,33	0,0664	−1,07	−0,30
0,6	3,15	0,0638	+1,05	−0,28
0,7	3,00	0,0617	+0,90	−0,26
0,8	2,88	0,0600	−0,71	−0,25
0,9	2,80	0,0586	−0,52	−0,25
1	2,73	0,0575	−0,34	−0,24
2	2,44	0,0517	−0,20	−0,21
3	2,31	0,0497	−0,22	−0,20
4	2,25	0,0487	−0,03	−0,19
5	2,22	0,0480	−0,14	−0,18
6	2,19	0,0475	−0,19	−0,18
7	2,17	0,0470	−0,14	−0,18
8	2,16	0,0467	−0,09	−0,17
9	2,14	0,0465	−0,13	−0,17
10	2,13	0,0463	−0,15	−0,17

Le fait que, pour $x = \pm 15$ ou, d'après la formule (99), pour $\xi = \pm \frac{15}{2\pi}$, le réseau de courbes obtenu en faisant croître ν, se rapproche constamment de l'axe des abscisses, ce fait, dis-je, permet de situer la courbe, correspondant à une valeur donnée de ν, par rapport à celle de la figure 25, construite pour $\nu = \frac{1}{2}$. On y

parvient, en tenant compte de la propriété de la tangente au point ($\xi = 0$, $y = 1$), correspondant au bord géométrique, d'être de moins en moins inclinée sur la direction négative de l'axe des abscisses, à mesure que ν s'éloigne davantage de $\frac{1}{2}$, dans un sens ou dans l'autre.

Si $\nu < \frac{1}{2}$, la courbe est disposée au-dessus de la courbe de la figure 25, pour $\xi = -\frac{15}{2\pi}$. ξ croissant, elle rencontre nécessairement cette dernière, vu la disposition de la tangente, avant que ξ prenne la valeur zéro, pour laquelle $y = 1$. La courbe repasse ensuite au-dessus de celle de la figure 25, lorsque ξ dépasse la valeur zéro, et doit conserver cette situation au moins jusqu'à l'abscisse $+\frac{15}{2\pi}$.

Si $\nu > \frac{1}{2}$, la courbe est située au-dessous de celle de la figure 25 pour $\xi = -\frac{15}{2\pi}$. ξ croissant, elle doit conserver cette situation tant qu'elle n'a pas franchi le point ($\xi = 0$, $y = 1$), correspondant au bord géométrique, vu la disposition de la tangente en ce point. Elle passe ensuite au-dessus, lorsque ξ croît par des valeurs positives, pour rencontrer bientôt la courbe de la figure 25, et repasser au-dessous, avant d'atteindre le point correspondant à l'abscisse $\xi = +\frac{15}{2\pi}$.

Toutes les courbes du réseau, pour le point correspondant au centre du Soleil, sont d'ailleurs disposées comme pour l'abscisse $\xi = -\frac{15}{2\pi}$. C'est ce qui résulte de l'examen du Tableau du paragraphe VII donnant les valeurs de l'intensité relative, au centre, $y = \frac{I_0}{I_B}$. On peut voir, en se fondant sur le même Tableau et en partant des formules (79), (81) et (89), que les courbes sont également disposées comme pour l'abscisse $\xi = \frac{15}{2\pi}$ au point éloigné d'abscisse positive qui correspond à $x = 2\ m$.

Ces résultats ont été établis ici dans l'hypothèse où $\frac{n^2}{m}$ ne dépasse

pas 10. On pourrait les étendre jusqu'à la valeur $\frac{n}{m} = 15$ inclusivement; au delà, les calculs deviendraient beaucoup trop laborieux, pour pouvoir être poussés notablement plus loin. La question de la diffraction des images des astres circulaires, par une fente, doit alors être abordée d'une tout autre manière. Ce sujet pourra faire l'objet d'un Mémoire ultérieur.

Sur les équations générales du mouvement des systèmes matériels non holonomes;

PAR IV. ISÉNOFF.

1. On sait que le mouvement sans frottement d'un système matériel holonome ou non holonome est caractérisé par la fonction $S = \frac{1}{2}\Sigma m J^2$, J désignant l'accélération d'un point de masse m. Si $q_1, q_2, \ldots, q_k$ sont les paramètres indépendants, dont les variations virtuelles sont arbitraires, cette fonction S est une fonction du second degré en $q_1, q_2, \ldots, q_k$ que nous pouvons supposer réduite seulement aux termes qui contiennent $q_1, q_2, \ldots, q_k$. Les coefficients de cette fonction peuvent dépendre d'autres paramètres encore, dont les variations virtuelles sont des fonctions données, linéaires et homogènes des variations $q_1, q_2, \ldots, q_k$. Pour un déplacement virtuel donné du système, la somme des travaux des forces appliquées est

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_k \delta q_k.$$

Alors les équations du mouvement sont

$$\frac{\partial S}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, k).$$

La fonction S s'appelle *énergie d'accélération*, par analogie avec le nom *énergie cinétique* étant ainsi appelée la *demi-force vive du*

(1) Paul APPELL, *Développement sur une forme nouvelle des équations de la Dynamique* (Mémoire imprimé dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1899).

système

$$T = \frac{1}{2} \sum m v^2,$$

v étant la vitesse d'un point de masse m.

Si le système est holonome, les équations du mouvement, données par Lagrange, sont

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k).$$

Notre but est d'écrire, sous une autre forme, les équations générales du mouvement d'un système non holonome, au moyen de laquelle, dans la plupart des cas, on parvient plus facilement aux équations différentielles du mouvement.

2. Supposons un système de points matériels soumis aux liaisons, exprimées par des équations finies et différentielles, des paramètres qui définissent la position du système; les premières parties des équations différentielles ne sont pas des différentielles totales et n'ont pas de facteurs intégrants.

En ne tenant compte que des liaisons finies, imposées au système, soit $k - p$ le nombre des paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots, q_{k+p}$ qui fixent sa position. En supposant que ces liaisons dépendent aussi du temps t, nous aurons, pour les coordonnées d'un point quelconque du système,

$$(1) \qquad \begin{cases} x = f(t, q_1, q_2, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots, q_{k+p}), \\ y = \varphi(t, q_1, q_2, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots, q_{k+p}), \\ z = \psi(t, q_1, q_2, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots, q_{k+p}). \end{cases}$$

Nous obtiendrons un déplacement virtuel du système compatible *avec ces liaisons* au moment t, en donnant aux paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots, q_{k+p}$ des accroissements infiniment petits et arbitraires $dq_1, dq_2, \ldots, dq_k, dq_{k+1}, \ldots, dq_{k+p}$, ce qui donne :

$$(2) \qquad \begin{cases} \delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \delta q_2 + \ldots + \frac{\partial x}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial x}{\partial q_{k+1}} \delta q_{k+1} + \ldots + \frac{\partial x}{\partial q_{k+p}} \delta q_{k+p}, \\ \delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} \delta q_2 + \ldots + \frac{\partial y}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial y}{\partial q_{k+1}} \delta q_{k+1} + \ldots + \frac{\partial y}{\partial q_{k+p}} \delta q_{k+p}, \\ \delta z = \frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} \delta q_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial z}{\partial q_{k+1}} \delta q_{k+1} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial q_{k+p}} \delta q_{k+p}. \end{cases}$$

Supposons maintenant que nous ajoutons, aux liaisons finies ci-dessus, des liaisons nouvelles, dépendant du temps t, exprimées par p relations différentielles, non intégrables entre les paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots, q_{k+p}$ et soient ces relations, résolues par rapport à $dq_{k+1}, dq_{k+2}, \ldots, dq_{k+p}$, de la forme

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} dq_{k+1} = \alpha_1 dq_1 + \alpha_2 dq_2 + \ldots + \alpha_k dq_k + \alpha\, dt, \\ dq_{k+2} = \beta_1 dq_1 + \beta_2 dq_2 + \ldots + \beta_k dq_k + \beta\, dt, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dq_{k+p} = \lambda_1 dq_1 + \lambda_2 dq_2 + \ldots + \lambda_k dq_k + \lambda\, dt, \end{array}\right.$$

les coefficients de $dq_1, dq_2, \ldots, dq_k, dt$ étant en général des fonctions de $q_1, q_2, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots, q_{k+p}$. Pour un déplacement virtuel compatible avec ces liaisons au moment t, nous aurons

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \delta q_{k+1} = \alpha_1 \delta q_1 + \alpha_2 \delta q_2 + \ldots + \alpha_k \delta q_k, \\ \delta q_{k+2} = \beta_1 \delta q_1 + \beta_2 \delta q_2 + \ldots + \beta_k \delta q_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta q_{k+p} = \lambda_1 \delta q_1 + \lambda_2 \delta q_2 + \ldots + \lambda_k \delta q_k. \end{array}\right.$$

Alors nous obtiendrons un déplacement virtuel du système compatible aux deux sortes de liaisons, au moment t, si nous introduisons dans (2) les valeurs de $\delta q_{k+1}, \delta q_{k+2}, \ldots, \delta q_{k+p}$ de (4); donc, pour ce déplacement, nous aurons

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} \delta x = \left(\dfrac{\partial x}{\partial q_1} + \alpha_1 \dfrac{\partial x}{\partial q_{k+1}} + \beta_1 \dfrac{\partial x}{\partial q_{k+2}} + \ldots + \lambda_1 \dfrac{\partial x}{\partial q_{k+p}}\right)\delta q_1 \\ \qquad + \left(\dfrac{\partial x}{\partial q_2} + \alpha_2 \dfrac{\partial x}{\partial q_{k+1}} + \beta_2 \dfrac{\partial x}{\partial q_{k+2}} + \ldots + \lambda_2 \dfrac{\partial x}{\partial q_{k+p}}\right)\delta q_2 \\ \qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad + \left(\dfrac{\partial x}{\partial q_k} + \alpha_k \dfrac{\partial x}{\partial q_{k+1}} + \beta_k \dfrac{\partial x}{\partial q_{k+2}} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial x}{\partial q_{k+p}}\right)\delta q_k, \\ \delta y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta z = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

En tenant compte de toutes les liaisons imposées au système, sa position est à chaque instant complètement définie, si nous connaissons, pour ce moment, les paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_k$, parce que les autres p paramètres $q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_{k+p}$ se déterminent

par les équations (3); donc la position du système dépend de k paramètres indépendants $q_1, q_2, \ldots, q_k$.

L'équation générale de la Dynamique, déduite du principe de d'Alembert et du principe du travail virtuel, est

$$\Sigma m(x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z) = \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z).$$

x'', y'', z'' étant les secondes dérivées des coordonnées par rapport au temps, et X, Y, Z les projections d'une quelconque des forces directement appliquées.

Cette équation doit être satisfaite pour tous les déplacements (5) compatibles avec toutes les liaisons; elle se décompose donc en k équations de la forme

$$(6)\quad \Sigma m\left[x''\left(\frac{\partial x}{\partial q_1} + \alpha_1\frac{\partial x}{\partial q_{k+1}} + \beta_1\frac{\partial x}{\partial q_{k+2}} + \ldots + \lambda_1\frac{\partial x}{\partial q_{k+r}}\right)\right.$$
$$+ y''\left(\frac{\partial y}{\partial q_1} + \alpha_1\frac{\partial y}{\partial q_{k+1}} + \beta_1\frac{\partial y}{\partial q_{k+2}} + \ldots + \lambda_1\frac{\partial y}{\partial q_{k+r}}\right)$$
$$\left. + z''\left(\frac{\partial z}{\partial q_1} + \alpha_1\frac{\partial z}{\partial q_{k+1}} + \beta_1\frac{\partial z}{\partial q_{k+2}} + \ldots + \lambda_1\frac{\partial z}{\partial q_{k+r}}\right)\right] = Q_1,$$

Q_1 étant le coefficient de dq_1 dans l'expression de la somme des travaux virtuels des forces appliquées,

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \ldots + Q_k\delta q_k.$$

Transformons la partie gauche de l'équation (6) que nous désignerons par P_1. Nous avons

$$P_1 = \frac{d}{dt}\Sigma m\left[x'\left(\frac{\partial x}{\partial q_1} + \alpha_1\frac{\partial x}{\partial q_{k+1}} + \beta_1\frac{\partial x}{\partial q_{k+2}} + \ldots + \lambda_1\frac{\partial x}{\partial q_{k+r}}\right)\right.$$
$$+ y'\left(\frac{\partial y}{\partial q_1} + \alpha_1\frac{\partial y}{\partial q_{k+1}} + \beta_1\frac{\partial y}{\partial q_{k+2}} + \ldots + \lambda_1\frac{\partial y}{\partial q_{k+r}}\right)$$
$$\left. + z'\left(\frac{\partial z}{\partial q_1} + \alpha_1\frac{\partial z}{\partial q_{k+1}} + \beta_1\frac{\partial z}{\partial q_{k+2}} + \ldots + \lambda_1\frac{\partial z}{\partial q_{k+r}}\right)\right]$$
$$- \Sigma m\left\{x'\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right) + \frac{d}{dt}\left(\alpha_1\frac{\partial x}{\partial q_{k+1}}\right) + \frac{d}{dt}\left(\beta_1\frac{\partial x}{\partial q_{k+2}}\right) + \ldots + \frac{d}{dt}\left(\lambda_1\frac{\partial x}{\partial q_{k+r}}\right)\right]\right.$$
$$+ y'\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right) + \frac{d}{dt}\left(\alpha_1\frac{\partial y}{\partial q_{k+1}}\right) + \frac{d}{dt}\left(\beta_1\frac{\partial y}{\partial q_{k+2}}\right) + \ldots + \frac{d}{dt}\left(\lambda_1\frac{\partial y}{\partial q_{k+r}}\right)\right]$$
$$\left. + z'\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right) + \frac{d}{dt}\left(\alpha_1\frac{\partial z}{\partial q_{k+1}}\right) + \frac{d}{dt}\left(\beta_1\frac{\partial z}{\partial q_{k+2}}\right) + \ldots + \frac{d}{dt}\left(\lambda_1\frac{\partial z}{\partial q_{k+r}}\right)\right]\right\}.$$

Des équations (1), nous obtenons

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} x' &= \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial q_1}q'_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}q'_2 + \ldots + \frac{\partial x}{\partial q_k}q_k + \frac{\partial x}{\partial q_{k+1}}q'_{k+1} + \ldots + \frac{\partial x}{\partial q_{k+p}}q'_{k+p}, \\ y' &= \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial q_1}q'_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}q'_2 + \ldots + \frac{\partial y}{\partial q_k}q'_k + \frac{\partial y}{\partial q_{k+1}}q'_{k+1} + \ldots + \frac{\partial y}{\partial q_{k+p}}q'_{k+p}, \\ z' &= \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial q_1}q'_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2}q'_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial q_k}q'_k + \frac{\partial z}{\partial q_{k+1}}q'_{k+1} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial q_{k+p}}q'_{k+p}. \end{aligned}\right.$$

Les équations (3) donnent

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} q'_{k+1} &= \alpha_1 q'_1 + \alpha_2 q'_2 + \ldots + \alpha_k q'_k + \alpha, \\ q'_{k+2} &= \beta_1 q'_1 + \beta_2 q'_2 + \ldots + \beta_k q'_k + \beta, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q'_{k+p} &= \lambda_1 q'_1 + \lambda_2 q'_2 + \ldots + \lambda_k q'_k + \lambda. \end{aligned}\right.$$

Alors, en vertu de (7) et (8), nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial q'_1} &= \frac{\partial x}{\partial q_1} + \alpha_1\frac{\partial x}{\partial q_{k+1}} + \beta_1\frac{\partial x}{\partial q_{k+2}} + \ldots + \lambda_1\frac{\partial x}{\partial q_{k+p}}, \\ \frac{\partial y'}{\partial q'_1} &= \frac{\partial y}{\partial q_1} + \alpha_1\frac{\partial y}{\partial q_{k+1}} + \beta_1\frac{\partial y}{\partial q_{k+2}} + \ldots + \lambda_1\frac{\partial y}{\partial q_{k+p}}, \\ \frac{\partial z'}{\partial q'_1} &= \frac{\partial z}{\partial q_1} + \alpha_1\frac{\partial z}{\partial q_{k+1}} + \beta_1\frac{\partial z}{\partial q_{k+2}} + \ldots + \lambda_1\frac{\partial z}{\partial q_{k+p}}, \end{aligned}$$

et la fonction P_1 prend la forme

$$\begin{aligned} P_1 = {} & \frac{d}{dt}\Sigma m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q'_1} + y'\frac{\partial y'}{\partial q_1} + z'\frac{\partial z'}{\partial q_1}\right) \\ & - \Sigma m\left[x'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right) + y'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right) + z'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)\right] \\ & - \Sigma m\left[x'\frac{d}{dt}\left(\alpha_1\frac{\partial x}{\partial q_{k+1}} + \beta_1\frac{\partial x}{\partial q_{k+2}} + \ldots + \lambda_1\frac{\partial x}{\partial q_{k+p}}\right)\right. \\ & \quad + y'\frac{d}{dt}\left(\alpha_1\frac{\partial y}{\partial q_{k+1}} + \beta_1\frac{\partial y}{\partial q_{k+2}} + \ldots + \lambda_1\frac{\partial y}{\partial q_{k+p}}\right) \\ & \quad \left. + z'\frac{d}{dt}\left(\alpha_1\frac{\partial z}{\partial q_{k+1}} + \beta_1\frac{\partial z}{\partial q_{k+2}} + \ldots + \lambda_1\frac{\partial z}{\partial q_{k+p}}\right)\right]. \end{aligned}$$

Dans les équations (1), x, y, z sont des fonctions de t, q_1, q_2, ..., q_k, q_{k+1}, ..., q_{k+p}; donc $\frac{\partial x}{\partial q_1}$, $\frac{\partial y}{\partial q_1}$, $\frac{\partial z}{\partial q_1}$ sont des fonctions des mêmes paramètres; prenant les dérivées par rapport au temps de ces der-

nières quantités, et en tenant compte des équations (8), nous aurons

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right) = {} & \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial t} + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2} q_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_2} q_2 + \ldots + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_k} q_k \\
& + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_{k+1}} (\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \ldots + \alpha_k q_k + \alpha) \\
& + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_{k+2}} (\beta_1 q_1 + \beta_2 q_2 + \ldots + \beta_k q_k + \beta) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_{k+p}} (\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + \ldots + \lambda_k q_k + \lambda), \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right) = {} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right) = {} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

D'autre part, prenant les dérivées partielles, par rapport à q_1, de x', y', z', données par les équations (7), et en tenant compte des équations (8), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x'}{\partial q_1} = {} & \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial t} + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2} q_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_2} q_2 + \ldots + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_k} q_k \\
& + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_{k+1}} (\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \ldots + \alpha_k q_k + \alpha) \\
& + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_{k+2}} (\beta_1 q_1 + \beta_2 q_2 + \ldots + \beta_k q_k + \beta) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_{k+p}} (\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + \ldots + \lambda_k q_k + \lambda) \\
& + \frac{\partial x}{\partial q_{k+1}} \frac{\partial q_k}{\partial q_1} + \frac{\partial x}{\partial q_{k+2}} \frac{\partial q_{k+2}}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial x}{\partial q_{k+p}} \frac{\partial q_{k+p}}{\partial q_1}, \\
\frac{\partial y'}{\partial q_1} = {} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{\partial z'}{\partial q_1} = {} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial x'}{\partial q_1} + \left(\frac{\partial x}{\partial q_{k+1}}\frac{\partial q'_{k+1}}{\partial q_1} + \frac{\partial x}{\partial q_{k+2}}\frac{\partial q'_{k+2}}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial x}{\partial q_{k+p}}\frac{\partial q'_{k+p}}{\partial q_1}\right),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial y'}{\partial q_1} + \left(\frac{\partial y}{\partial q_{k+1}}\frac{\partial q'_{k+1}}{\partial q_1} + \frac{\partial y}{\partial q_{k+2}}\frac{\partial q'_{k+2}}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial y}{\partial q_{k+p}}\frac{\partial q'_{k+p}}{\partial q_1}\right),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial z'}{\partial q_1} + \left(\frac{\partial z}{\partial q_{k+1}}\frac{\partial q'_{k+1}}{\partial q_1} + \frac{\partial z}{\partial q_{k+2}}\frac{\partial q'_{k+2}}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial q_{k+p}}\frac{\partial q'_{k+p}}{\partial q_1}\right).$$

En tenant compte de ces expressions pour $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)$ et que des équations (8) nous avons

$$\frac{\partial q'_{k+1}}{\partial q_1} = \alpha_1, \qquad \frac{\partial q'_{k+2}}{\partial q_1} = \beta_1, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial q'_{k+p}}{\partial q_1} = \lambda_1,$$

et des équations (7)

$$\frac{\partial x'}{\partial q_{k+1}} = \frac{\partial x}{\partial q_{k+1}}, \qquad \frac{\partial x'}{\partial q_{k+2}} = \frac{\partial x}{\partial q_{k+2}}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial x'}{\partial q_{k+p}} = \frac{\partial x}{\partial q_{k+p}},$$

$$\frac{\partial y'}{\partial q_{k+1}} = \frac{\partial y}{\partial q_{k+1}}, \qquad \frac{\partial y'}{\partial q_{k+2}} = \frac{\partial y}{\partial q_{k+2}}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial y'}{\partial q_{k+p}} = \frac{\partial y}{\partial q_{k+p}},$$

$$\frac{\partial z'}{\partial q_{k+1}} = \frac{\partial z}{\partial q_{k+1}}, \qquad \frac{\partial z'}{\partial q_{k+2}} = \frac{\partial z}{\partial q_{k+2}}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial z'}{\partial q_{k+p}} = \frac{\partial z}{\partial q_{k+p}},$$

la fonction P prend la forme

$$\begin{aligned}
P_1 = {} & \frac{d}{dt}\Sigma m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q_1} + y'\frac{\partial y'}{\partial q_1} + z'\frac{\partial z'}{\partial q_1}\right) \\
& - \Sigma m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q_1} + y'\frac{\partial y'}{\partial q_1} + z'\frac{\partial z'}{\partial q_1}\right) \\
& + \Sigma m\left[x'\left(\frac{\partial x'}{\partial q_{k+1}}\frac{\partial q'_{k+1}}{\partial q_1} + \frac{\partial x'}{\partial q_{k+2}}\frac{\partial q'_{k+2}}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial x'}{\partial q_{k+p}}\frac{\partial q'_{k+p}}{\partial q_1}\right)\right. \\
& \quad + y'\left(\frac{\partial y'}{\partial q_{k+1}}\frac{\partial q'_{k+1}}{\partial q_1} + \frac{\partial y'}{\partial q_{k+2}}\frac{\partial q'_{k+2}}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial y'}{\partial q_{k+p}}\frac{\partial q'_{k+p}}{\partial q_1}\right) \\
& \quad \left. + z'\left(\frac{\partial z'}{\partial q_{k+1}}\frac{\partial q'_{k+1}}{\partial q_1} + \frac{\partial z'}{\partial q_{k+2}}\frac{\partial q'_{k+2}}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial z'}{\partial q_{k+p}}\frac{\partial q'_{k+p}}{\partial q_1}\right)\right] \\
& - \Sigma m\left[x\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_{k+1}}\frac{\partial q'_{k+1}}{\partial q_1} + \frac{\partial x'}{\partial q_{k+2}}\frac{\partial q'_{k+2}}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial x'}{\partial q_{k+p}}\frac{\partial q'_{k+p}}{\partial q_1}\right)\right. \\
& \quad + y\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_{k+1}}\frac{\partial q'_{k+1}}{\partial q_1} + \frac{\partial y'}{\partial q_{k+2}}\frac{\partial q'_{k+2}}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial y'}{\partial q_{k+p}}\frac{\partial q'_{k+p}}{\partial q_1}\right) \\
& \quad \left. + z\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_{k+1}}\frac{\partial q'_{k+1}}{\partial q_1} + \frac{\partial z}{\partial q_{k+2}}\frac{\partial q'_{k+2}}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial z'}{\partial q_{k+p}}\frac{\partial q'_{k+p}}{\partial q_1}\right)\right]
\end{aligned}$$

En désignant, pour un moment, par M la dernière somme de la fonction P_1, nous aurons

$$
\begin{aligned}
M = \frac{d}{dt}\Sigma m \Bigg| \; & x'\left(\frac{\partial x'}{\partial q_{k+1}}\frac{\partial q_{k+1}}{\partial q_1} + \frac{\partial x'}{\partial q_{k+2}}\frac{\partial q_{k+2}}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial x'}{\partial q_{k+p}}\frac{\partial q_{k+p}}{\partial q_1}\right) \\
& + y'\left(\frac{\partial y'}{\partial q_{k+1}}\frac{\partial q_{k+1}}{\partial q_1} + \frac{\partial y'}{\partial q_{k+2}}\frac{\partial q_{k+2}}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial y'}{\partial q_{k+p}}\frac{\partial q_{k+p}}{\partial q_1}\right) \\
& + z'\left(\frac{\partial z}{\partial q_{k+1}}\frac{\partial q_{k+1}}{\partial q_1} + \frac{\partial z}{\partial q_{k+2}}\frac{\partial q_{k+2}}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial q_{k+p}}\frac{\partial q_{k+p}}{\partial q_1}\right) \Bigg| \\
- \Sigma m \Bigg| \; & x\left(\frac{\partial x}{\partial q_{k+1}}\frac{\partial q_{k+1}}{\partial q_1} + \frac{\partial x}{\partial q_{k+2}}\frac{\partial q_{k+2}}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial x}{\partial q_{k+p}}\frac{\partial q_{k+p}}{\partial q_1}\right) \\
& + y\left(\frac{\partial y}{\partial q_{k+1}}\frac{\partial q_{k+1}}{\partial q_1} + \frac{\partial y}{\partial q_{k+2}}\frac{\partial q_{k+2}}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial y}{\partial q_{k+p}}\frac{\partial q_{k+p}}{\partial q_1}\right) \\
& + z\left(\frac{\partial z}{\partial q_{k+1}}\frac{\partial q_{k+1}}{\partial q_1} + \frac{\partial z}{\partial q_{k+2}}\frac{\partial q_{k+2}}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial q_{k+p}}\frac{\partial q_{k+p}}{\partial q_1}\right) \Bigg| .
\end{aligned}
$$

Mais la dernière somme de cette expression pour M peut prendre une autre forme, en tenant compte que des équations (7) et (8) nous avons

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial x}{\partial q_{k+1}} = \frac{\partial x}{\partial q''_{k+1}}, \quad \frac{\partial x}{\partial q_{k+2}} = \frac{\partial x}{\partial q''_{k+2}}, \quad \ldots \quad \frac{\partial x}{\partial q_{k+p}} = \frac{\partial x}{\partial q''_{k+p}}, \\
& \frac{\partial y}{\partial q_{k+1}} = \frac{\partial y''}{\partial q_{k+1}}, \quad \frac{\partial y}{\partial q_{k+2}} = \frac{\partial y''}{\partial q_{k+2}}, \quad \ldots \quad \frac{\partial y'}{\partial q_{k+p}} = \frac{\partial y''}{\partial q_{k+p}}, \\
& \frac{\partial z}{\partial q_{k+1}} = \frac{\partial z}{\partial q_{k+1}}, \quad \frac{\partial z}{\partial q_{k+2}} = \frac{\partial z}{\partial q_{k+2}}, \quad \ldots \quad \frac{\partial z'}{\partial q_{k+p}} = \frac{\partial z''}{\partial q_{k+p}}, \\
& \frac{\partial q_{k+1}}{\partial q_1} = \frac{\partial q_{k+1}}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial q_{k+2}}{\partial q_1} = \frac{\partial q_{k+2}}{\partial q_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial q_{k+p}}{\partial q_1} = \frac{\partial q_{k+p}}{\partial q''_1}.
\end{aligned}
$$

Alors pour P_1, nous aurons

$$
\begin{aligned}
P_1 = \; & \frac{d}{dt}\Sigma m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q_1} + y'\frac{\partial y'}{\partial q_1} + z'\frac{\partial z}{\partial q_1}\right) \\
& - \Sigma m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q_1} + y'\frac{\partial y'}{\partial q_1} + z\frac{\partial z'}{\partial q_1}\right) \\
& + \Sigma m\Bigg[\; x'\left(\frac{\partial x'}{\partial q_{k+1}}\frac{\partial q_{k+1}}{\partial q_1} + \frac{\partial x'}{\partial q_{k+2}}\frac{\partial q_{k+2}}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial x}{\partial q_{k+p}}\frac{\partial q_{k+p}}{\partial q_1}\right) \\
& \quad + y'\left(\frac{\partial y'}{\partial q_{k+1}}\frac{\partial q_{k+1}}{\partial q_1} + \frac{\partial y'}{\partial q_{k+2}}\frac{\partial q_{k+2}}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial y'}{\partial q_{k+p}}\frac{\partial q_{k+p}}{\partial q_1}\right) \\
& \quad + z'\left(\frac{\partial z'}{\partial q_{k+1}}\frac{\partial q_{k+1}}{\partial q_1} + \frac{\partial z'}{\partial q_{k+2}}\frac{\partial q_{k+2}}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial q_{k+p}}\frac{\partial q_{k+p}}{\partial q_1}\right)\Bigg] \\
& - \frac{d}{dt}\Sigma m\Bigg[\; x'\left(\frac{\partial x'}{\partial q_{k+1}}\frac{\partial q_{k+1}}{\partial q_1} + \frac{\partial x'}{\partial q_{k+2}}\frac{\partial q_{k+2}}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial x'}{\partial q_{k+p}}\frac{\partial q_{k+p}}{\partial q_1}\right) \\
& \quad + y'\left(\frac{\partial y'}{\partial q_{k+1}}\frac{\partial q_{k+1}}{\partial q_1} + \frac{\partial y'}{\partial q_{k+2}}\frac{\partial q_{k+2}}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial y'}{\partial q_{k+p}}\frac{\partial q_{k+p}}{\partial q_1}\right) \\
& \quad + z'\left(\frac{\partial z'}{\partial q_{k+1}}\frac{\partial q_{k+1}}{\partial q_1} + \frac{\partial z'}{\partial q_{k+2}}\frac{\partial q_{k+2}}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial q_{k+p}}\frac{\partial q_{k+p}}{\partial q_1}\right)\Bigg] \\
& + \Sigma m\Bigg[\; x''\left(\frac{\partial x''}{\partial q_{k+1}}\frac{\partial q''_{k+1}}{\partial q''_1} + \frac{\partial x''}{\partial q_{k+2}}\frac{\partial q''_{k+2}}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial x''}{\partial q_{k+p}}\frac{\partial q''_{k+p}}{\partial q''_1}\right) \\
& \quad + y''\left(\frac{\partial y''}{\partial q_{k+1}}\frac{\partial q''_{k+1}}{\partial q''_1} + \frac{\partial y''}{\partial q''_{k+2}}\frac{\partial q''_{k+2}}{\partial q''_1} + \ldots + \frac{\partial y''}{\partial q_{k+p}}\frac{\partial q''_{k+p}}{\partial q''_1}\right) \\
& \quad + z''\left(\frac{\partial z''}{\partial q''_{k+1}}\frac{\partial q''_{k+1}}{\partial q''_1} + \frac{\partial z''}{\partial q''_{k+2}}\frac{\partial q''_{k+2}}{\partial q''_1} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial q_{k+p}}\frac{\partial q''_{k+p}}{\partial q''_1}\right)\Bigg]
\end{aligned}
$$

et l'équation (6) est de la forme

$$P_1 = Q_1. \tag{6'}$$

Désignons par T la demi-force vive du système, en tenant compte des liaisons finies et différentielles, qui lui sont imposées, et par T_0, la demi-force vive du système en ne tenant compte que des liaisons finies. La fonction T s'obtient de T_0 en substituant dans celle-ci aux $q_{k+p}, q_{k+2}, \ldots, q_{k+1}$ leurs valeurs définies par les équations (8). La fonction T_0 se compose de deux parties : l'une contient des termes qui dépendent de $q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_{k+p}$, nous la désignerons par T_1; l'autre qui contient les autres termes, nous la désignerons par T_0; de cette manière nous avons

$$T_0 = T_1 = T_0.$$

D'autre part, désignons par S_0 la demi-énergie de l'accélération du système en ne tenant compte que des liaisons finies, et par S_1 la fonction obtenue de S_0 en ne retenant que les termes qui contiennent les quantités $q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_{k+l}$, définies aussi par les équations (8) en les dérivant par rapport à t.

Alors l'équation du mouvement (6') prend la forme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial T_1}{\partial q_1} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_2}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial S}{\partial q_1} = Q_1$$

ou bien

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_0}{\partial q_1}\right) - \frac{\partial T_0}{\partial q_1} + \frac{\partial S_1}{\partial q_1} = Q_1.$$

Donc les équations du mouvement du système sont

$$(9) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial T_1}{\partial q_\alpha} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_2}{\partial q_\alpha}\right) + \frac{\partial S_1}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k)$$

ou

$$(10) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_0}{\partial q_\alpha}\right) - \frac{\partial T_0}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial S_1}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k).$$

T_0 n'étant une fonction que des vrais paramètres indépendants $q_1, q_2, \ldots, q_k$ et de leurs dérivées; et S_1 n'étant une fonction que des secondes dérivées des paramètres dépendants, lesquelles se déterminent en fonction des secondes dérivées des paramètres indépendants au moyen des équations (8).

Les fonctions T_0 et S_1 dans la plupart des cas se déterminent plus facilement que la partie de la fonction S, introduite par M. Appell, laquelle donne la demi-énergie d'accélération en tenant compte de toutes les liaisons imposées au système.

Ce que nous allons éclaircir avec quelques exemples presentant des systèmes non holonomes.

En écrivant les équations différentielles du mouvement sous la forme (9), nous déduisons les corollaires suivants :

1° Si quelqu'un des paramètres indépendants ne figure pas dans l'équation (8), l'équation différentielle pour ce paramètre s'obtient par la méthode de Lagrange.

Mais, par la méthode de Lagrange, on peut obtenir aussi l'équation différentielle pour quelqu'un des paramètres indépendants,

par exemple q_s qui figure dans les équations (8), pourvu que nous ayons

$$\frac{\partial T_1}{\partial q_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial q_s'}\right) = \frac{\partial S_1}{\partial q_s}.$$

2° L'expression

$$\frac{\partial T_1}{\partial p_\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial q_\alpha'}\right) - \frac{\partial S_1}{\partial q_\alpha}$$

contient les termes qu'il faut ajouter à la partie gauche de l'équation du mouvement, déduite pour le paramètre q_α par la méthode de Lagrange, pour avoir la vraie équation différentielle du mouvement, répondant à ce paramètre.

3. *Exemple I.* — Une circonférence de rayon a et de masse unité roule, sans frottement ni glissement, sur un plan horizontal fixe (cerceau) [1].

Dans le plan horizontal xOy, prenons deux axes fixes Ox et Oy, et par le point O, menons un troisième axe Oz, perpendiculaire au plan et dirigé vers le haut. Par le centre de gravité G de la circonférence, menons trois axes $Gx'y'z'$ parallèles aux axes $Oxyz$. Soit GX l'intersection du plan de la circonférence avec le plan $x'Gy'$, désignons par GY l'axe passant par G et le point de contact H de la circonférence et du plan xOy, et enfin soit GZ l'axe du cerceau. Si nous désignons par GD une droite invariablement liée avec la circonférence, située dans son plan, la position de la circonférence autour de G est définie par les angles

$$x'X = \psi, \qquad XD = \varphi, \qquad z'Z = \theta.$$

Les projections de la rotation instantanée du trièdre rectangulaire GXYZ sur les axes GX, GY, GZ sont

$$(11) \qquad P = \psi', \qquad Q = \psi' \sin\theta, \qquad R = \psi' \cos\theta$$

et celles de la rotation instantanée du corps solide pour le mouvement autour de G sont

$$(12) \qquad p = \varphi', \qquad q = \psi' \sin\theta, \qquad r = \psi' \cos\theta + \theta'.$$

[1] Paul Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. II, p. 341, 372, 381.

alors

$$(13) \qquad P = p, \qquad Q = q, \qquad R = q \cos \operatorname{tang} \theta.$$

Si u, v, w sont les projections de la vitesse V^0 du point G sur les axes GXYZ, pour écrire que la circonférence roule sans glisser sur le plan yOx, il faut exprimer que la vitesse du point matériel H $(0, -a, 0)$ est égale à zéro; donc nous avons

$$u + ar = 0, \qquad v = 0, \qquad w - ap = 0;$$

ces équations sont les équations (8)

θ, ψ, φ étant les paramètres indépendants, la fonction T_0 dans ce cas est la demi-force vive pour le mouvement autour de G

$$T_0 = \frac{1}{2}[A(p^2 + q^2) + Cr^2];$$

et la fonction S_1 est la demi-énergie de l'accélération de toute la masse de la circonférence concentrée en G; évidemment, cette fonction est

$$S_1 = \frac{1}{2}[(u' + Qw)^2 + (w' + Qu)^2] + \ldots$$

La force appliquée, le poids Mg dérive de la fonction de force

$$u = -Mga \sin \theta.$$

Alors l'équation pour φ est

$$\frac{d}{dt}(Cr + (u' + Qw)(-a)) = 0$$

ou

$$(I) \qquad (C + a^2)r' - a^2 pq = 0$$

L'équation pour θ est

$$\frac{d}{dt}(Aq \sin \theta + Cr \cos \theta) + (u' + Qw)(a \cos \theta) = 0$$

ou, en tenant compte de (I), nous aurons

$$(II) \qquad Aq' + (AR - Cr)p = 0.$$

Enfin, l'équation pour θ sera

$$\frac{d}{dt}(Ap) + Ag\psi\cos\theta + Cr\psi\sin\theta + (w - Qu)a = -ag\cos\theta,$$

ou

$$\text{(III)} \qquad (A + a^2)p + (AR - Cr)q + a^2qr = -ag\cos\theta,$$

les équations (I), (II), (III) sont les équations du mouvement.

Il est facile de voir que la méthode de Lagrange, appliquée pour le paramètre θ, donne l'équation (III). En effet, la fonction T dans ce cas est

$$T = \frac{1}{2}[(A + a^2)p^2 + Ag^2 + (C + a^2)r^2],$$

et la fonction

$$T_1 = \frac{1}{2}(u^2 + w^2);$$

évidemment, nous aurons

$$\frac{\partial T_1}{\partial\theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial S_1}{\partial\theta} = 0.$$

4. *Exemple II.* — Un corps solide pesant de révolution, homogène, roule sans glisser sur un plan horizontal mobile, qui tourne uniformément autour d'un axe vertical fixe [1].

Soient Ox et Oy deux axes perpendiculaires dans le plan horizontal mobile, et OZ un troisième axe qui se confond avec l'axe vertical fixe et dirigé vers le haut.

Le mouvement relatif du corps est connu, si nous connaissons celui de son centre de gravité G et son mouvement autour de G.

Le mouvement de G est défini, si nous connaissons en fonction du temps les coordonnées ξ, η, ζ de ce point par rapport aux axes $Oxyz$.

Le point G du corps est situé sur l'axe de rotation que nous désignerons par GZ.

Le mouvement relatif autour de G, c'est-à-dire autour des

[1] Iv. Isénoff, *Mouvement sans frottement d'un corps solide pesant de révolution sur un plan horizontal* (*Annuaire de l'Université de Sofia*, 1916, 1917, 1918).

axes $Gx'y'z'$ parallèles aux axes $Oxyz$, est un mouvement d'un corps autour d'un point fixe.

Prenons un axe horizontal GX, perpendiculaire au plan vertical Z'GZ, et un autre axe GY, perpendiculaire au plan XGZ. De cette manière, nous déterminons un trièdre rectangulaire GXYZ dont la position par rapport au trièdre $Gx'y'z'$ est déterminée par les angles $\psi = \widehat{XGx'}$, $\theta = \widehat{z'GZ}$.

Le mouvement relatif du corps autour de G est défini par les angles

$$\psi, \theta, \varphi = \widehat{XGD},$$

GD étant une droite liée au corps et située dans le plan XGY.

La condition que le corps touche le plan horizontal mobile s'exprime par la liaison finie

$$\zeta = f(\xi, \eta),$$

f étant une fonction donnée.

Les paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots, q_n$ dans ce cas sont

$$\varphi, \psi, \theta, \xi, \eta.$$

Les composantes de la rotation du trièdre GXYZ et celles de la rotation du corps pour son mouvement autour de G sont données respectivement par les équations (11) et (12).

Le corps roule sur le plan horizontal, si la vitesse relative du point matériel du contact est nulle. Trouvons les coordonnées de ce point. La courbe méridienne, qui engendre la surface de révolution, est située dans le plan vertical YGZ. On l'obtient comme l'enveloppe de la tangente. L'équation de la tangente en H est

$$-y \sin\theta - z \cos\theta = \zeta;$$

alors, de cette équation et de l'équation

$$-y \cos\theta + z \sin\theta = \zeta',$$

nous obtenons, pour les coordonnées du point M par rapport aux axes GXYZ,

$$(14) \qquad \begin{cases} x = 0, \\ y = -f(\xi, \eta) \sin\theta - f'(\xi, \eta) \cos\theta, \\ z = -f(\xi, \eta) \cos\theta + f'(\xi, \eta) \sin\theta; \end{cases}$$

la vitesse relative de ce point est la résultante de la vitesse de translation des axes Gx', y', z' et de la vitesse due à la rotation du corps autour de G; alors les projections de cette vitesse sur les axes GXYZ sont

$$\begin{aligned}
&\xi' \cos\psi - \eta' \sin\psi + q(z - r\psi) = 0,\\
&-\xi' \sin\psi \cos\theta - \eta' \cos\psi \cos\theta + f' p \sin\theta - p(z + r\psi) = 0,\\
&\xi' \sin\psi \sin\theta - \eta' \cos\psi \sin\theta - f' p \cos\theta + p(y) = 0
\end{aligned}$$

ou, en tenant compte des valeurs de y et z, ces trois équations se réduisent aux deux suivantes :

$$\begin{aligned}
\xi' &= q \cos\psi (f \cos\theta - f' \sin\theta) - r \cos\psi (f \sin\theta - f' \cos\theta) - pf' \sin\psi,\\
\eta' &= q \sin\psi (f \cos\theta - f' \sin\theta) - r \sin\psi (f \sin\theta - f' \cos\theta) - pf' \cos\psi
\end{aligned}$$

qui correspondent aux équations (8).

Les paramètres indépendants sont φ, θ, ψ, les dépendants ξ, η.

La fonction T_0 dans ce cas se trouve immédiatement : elle est

$$T'_0 = \frac{1}{2} [A(p^2 + A(q + \mu \sin\theta)^2 + C(r - \mu \cos\theta)^2] = \frac{1}{2} M(\xi^2 + \eta^2),$$

μ étant la vitesse avec laquelle le plan horizontal tourne autour de l'axe vertical fixe; la fonction S_1 présente la partie suivante de l'énergie de l'accélération absolue de G_1, laquelle fonction se trouve aussi très facile :

$$S_1 = \frac{1}{2} M [\xi'^2 + \eta'^2 + (\xi + \eta\xi)^2 + 2\mu\xi\eta' + \mu^2\xi^2 + 2\eta'(\mu\xi - \mu\eta)].$$

Alors l'équation pour φ sera

$$\frac{d}{dt} C(r + \mu(\cos\theta)) - \frac{\partial S_1}{\partial \xi'} \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{dr}{\partial \varphi} - \frac{\partial S_1}{\partial \eta'} \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{dr}{\partial \varphi} = 0$$

ou

$$\begin{aligned}
(1)\quad C(r + \mu \sin\theta p) &- M[\xi - 2\mu\eta' - \mu^2\xi](\cos\psi(f \sin\theta - f' \cos\theta)\\
&+ M[\eta' + 2\mu\xi + \mu^2\eta](\sin\psi(f \sin\theta - f' \cos\theta)) = 0.
\end{aligned}$$

L'équation pour ψ sera

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} [A(q + \mu \sin\theta)(\sin\theta) + C(r + \mu \cos\theta)(\cos\theta)]\\
&+ \frac{\partial S_1}{\partial \xi'} \left(\frac{\partial \xi}{\partial q} \frac{dq}{\partial \psi}\right) + \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{dr}{\partial \psi}\Big) + \frac{\partial S_1}{\partial \eta'} \left(\frac{\partial \eta}{\partial q} \frac{dq}{\partial \psi} + \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{dr}{\partial \psi}\right) = 0
\end{aligned}$$

ou, en tenant compte de l'équation (I), nous obtenons

$$(\mathrm{II})\quad Aq' + (Aq\cot\theta - Cr)p + (2A - C)\mu p\cos\theta$$
$$+ (f\cos\theta - f'\sin\theta)[M(\xi'' - 2\mu\eta'' - \mu^2\xi'')\cos\psi + M(\eta'' + 2\mu\xi'' - \mu^2\eta'')\sin\psi] = 0.$$

Enfin l'équation pour θ sera

$$\frac{d}{dt}(A + Mf'^2)p - A(q + \mu\sin\theta)(\psi'\cos\theta + \mu\cos\theta) - Cr(r + \mu\cos\theta)(-\psi'\sin\theta - \mu\sin\theta)$$
$$- Mf'f''p^2 + \frac{\partial S_1}{\partial \xi''}\frac{\partial \xi''}{\partial p'} + \frac{\partial S_1}{\partial \eta''}\frac{\partial \eta''}{\partial p'} = -Mgf'$$

ou

$$(\mathrm{III})\quad (A + Mf'^2)p' + Mf'f''p^2 - A(q + \mu\sin\theta)(q\cot\theta - \mu\cos\theta) + Cr(r + \mu\cos\theta)(q - \mu\sin\theta)$$
$$+ M(\xi'' - 2\mu\eta'' - \mu^2\xi'')f'\sin\psi - M(\eta'' + 2\mu\xi'' - \mu^2\eta'')f'\cos\psi = -Mgf'.$$

Dans le cas où le plan est fixe, nous avons le problème suivant : *Un corps solide pesant, de révolution, roule sans glisser sur un plan horizontal fixe* (¹).

Les équations du mouvement s'obtiennent de (I), (II), (III) en y posant $\mu = 0$: elles sont

$$Cr' - (f\sin\theta - f'\cos\theta)(M(\xi''\cos\psi + \eta''\sin\psi)) = 0,$$
$$Aq' + (Aq\cot\theta - Cr)p + (f\cos\theta - f'\sin\theta)(M(\xi''\cos\psi + \eta''\sin\psi)) = 0,$$
$$(A + Mf'^2)p' + Mf'f''p^2 - (Aq\cot\theta - Cr)q - Mf'(\xi''\sin\psi - \eta''\cos\psi) = -Mgf';$$

mais en vertu des équations (I), nous avons, pour les deux premières équations,

$$Cr' + My(\xi''\cos\psi + \eta''\sin\psi) = 0,$$
$$Aq' + (Aq\cot\theta - Cr)p - Mz(\xi''\cos\psi + \eta''\sin\psi) = 0.$$

M. Appell donne une autre forme à ces deux équations en introduisant les projections u, v, w de la vitesse du centre de gravité G sur les axes GX, GY, GZ.

Trouvons ces équations. La fonction T_0' sera

$$2T_0' = M(u^2 + v^2 + w^2) + A(p^2 + q^2) + Cr^2.$$

Les équations exprimant la condition que le corps roule seront

$$u + qz - ry = 0, \qquad v - pz = 0, \qquad w + py = 0;$$

(¹) Paul Appell, *Développement sur une forme nouvelle des équations de la Dynamique* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1900, p. 33).

d'où

$$u = ry - qz, \quad v = pz, \quad w = -py,$$

ces équations correspondent aux équations (8).

Alors

$$T_0 = \frac{1}{2}[A(p^2 + q^2) + Cr^2]\,\omega,$$

se réduit seulement à la demi-force vive pour le mouvement autour de G.

La fonction S_1 est la demi-énergie de l'accélération de toute la masse, concentrée en G :

$$S_1 = \frac{1}{2}M[(u' + qw - Rv)^2 + (v' + Ru - pw)^2 + (w' + pv - qu)^2].$$

L'équation pour φ est

$$\frac{d}{dt}(Cr) + M(u' + qw - Rv)y = 0$$

ou

$$\text{(IV)} \qquad Cr' + Mu'y + M(qy + Rz)w = 0.$$

L'équation pour ψ est

$$\frac{d}{dt}(Aq\sin\theta + Cr\cos\theta) + M(u' + qw - Rv)(y\cos\theta - z\sin\theta) = 0$$

ou

$$Aq'\sin\theta + Cr'\cos\theta + Apq\cos\theta - Crp\sin\theta$$
$$+ M(u' + qw - Rv)y\cos\theta - M(u' - qw - Rv)y\cos\theta - M(u' - qw - Rv)\sin\theta = 0$$

ou enfin, en tenant compte de l'équation (IV) et en divisant les deux parties par $\sin\theta$, nous obtenons

$$\text{(V)} \qquad Aq' + (Aq\cot\theta)^2 - Crp - Mu'z + M(qy + Rz)w = 0;$$

(IV) et (V) sont les équations cherchées.

L'équation ci-dessus pour θ peut être remplacée par l'intégrale des forces vives.

5. *Exemple III.* — Une sphère roule sans glisser sur un plan

horizontal qui tourne avec une vitesse angulaire constante μ autour d'un axe vertical [1].

Ce problème est un cas particulier du précédent. Ici $\zeta = a$, a étant le rayon de la sphère. Si nous tenons φ, ψ, θ comme paramètres indépendants, nous travaillerons comme dans **4**. Mais nous prendrons comme paramètres indépendants ξ, η, ψ.

Si nous égalons à zéro les projections sur les axes Gx', y', z' de la vitesse relative du point de contact H de coordonnées o, o, $-a$, nous aurons, comme équations (8), les équations suivantes :

$$\xi - aq = 0,$$
$$\eta + ap = 0,$$

où

$$p = \theta' \cos\psi + \varphi' \sin\theta \sin\psi,$$
$$q = \theta' \sin\psi - \varphi' \sin\theta \cos\psi.$$

Pour trouver les fonctions T_0 et S_1, il faut nécessairement calculer complètement T_0 et S_0.

La force vive absolue T_0 et l'énergie de l'accélération absolue S_0 de la sphère, en ne tenant compte que de la liaison finie $\zeta = a$, se calculent très facilement. Ces fonctions sont respectivement

$$2T_0 = M[(\xi - \mu\eta)^2 + (\eta + \mu\xi)^2] + A[p^2 + q^2 + (r + \mu)^2],$$
$$S_0 = M[(\xi - 2\mu\eta - \mu^2\xi)^2 + (\eta - 2\mu\xi - \mu\eta)^2] + A[p^2 + q^2 + r^2 + 2\mu(pq - qp)] + \ldots$$

où

$$r = \psi + \varphi \cos\theta \quad (1).$$

Alors

$$2T_0 = M[(\xi - \mu\eta)^2 + (\eta + \mu\xi)^2] + A(r + \mu)^2;$$

nous omettons le terme $A(p^2 + q^2)$, parce qu'il est égal à $A(\theta'^2 + \varphi'^2 \sin^2\theta)$, et

$$2S_1 = A[p^2 + q^2 + 2\mu(pq - qp)].$$

L'équation pour ξ est

$$\frac{d}{dt} M(\xi - \mu\eta) - M(\eta + \mu\xi)\mu + \frac{A}{a} q + 2\frac{A}{a}\mu p = 0.$$

---

[1] Iv. Isénoff, *Mouvement sans frottement, etc.* (*Annuaire de l'Université de Sofia*, 1916, 1917, 1918).

[2] Les expressions p, q, r sont les projections de la vitesse angulaire instantanée relative de la sphère sur les axes Gx', y', z'.

ou

$$\frac{7}{5}\xi - \frac{12}{15}\rho\eta - \rho^2\xi = 0. \tag{15}$$

L'équation pour η est

$$\frac{d}{dt}M(\eta + \rho\xi) - M\xi = \rho\eta(\rho - \frac{A}{a}\rho^2) + \frac{A}{a}\rho\xi = 0$$

ou

$$\frac{7}{5}\eta - \frac{12}{5}\rho\xi - \rho^2\eta = 0. \tag{16}$$

Enfin l'équation pour ψ est

$$\frac{d}{dt}A(\eta + \rho) = 0$$

ou

$$\eta' = 0.$$

Cette équation s'obtient par la méthode de Lagrange, parce que ψ' ne figure pas dans $\xi' = aq$, $\eta' = -ap$.

Les intégrales générales du système d'équations (15) et (16), sont

$$\xi = A\cos(\rho t + \alpha) + B\cos\left(\frac{5}{7}\rho t + \beta\right),$$

$$\eta = A\sin(\rho t + \alpha) - B\sin\left(\frac{5}{7}\rho t + \beta\right).$$

Ces équations donnent la loi du mouvement du centre de gravité de la sphère.

La trajectoire absolue de la projection de G sur un plan horizontal fixe est une circonférence.

Sur quelques lignes brisées;

PAR CAMILLE JORDAN.

Soient donnés n points dans un plan, et dont il n'y en ait pas trois en ligne droite. Joignons par des segments de droites le premier au second, celui-ci au troisième, etc., jusqu'à ce qu'on arrive au dernier. La ligne brisée L ainsi formée réunira tous les points donnés, dont deux seront à ses extrémités. Chacun des autres est le point de jonction de deux segments (et pas davantage).

En faisant varier l'ordre de succession des points donnés, nous obtiendrons $\frac{1}{2}n!$ lignes L distinctes, décrites chacune dans les deux sens. Quelques-unes d'elles pourront offrir des points multiples si des segments non contigus se coupent. Celles où cette particularité ne se présente pas semblent plus intéressantes et l'on peut se proposer d'en déterminer le nombre N.

Ce nombre dépend de la position relative des points donnés, et notamment de la nature du *polygone principal*. (Nous donnons ce nom à un polygone convexe ayant pour sommets soit tous les points donnés, soit une partie seulement d'entre eux, les autres lui étant intérieurs.)

Nous déterminerons le nombre N dans les trois cas suivants :

1° Les n points sont les sommets d'un polygone convexe;

2° n est au plus égal à 6;

3° n étant égal à 7, le polygone principal a 6 côtés.

La discussion complète d'autres cas entraînerait trop de longueurs.

Cas où le polygone principal a n sommets.

1. Soit l une portion d'une des lignes L sans point multiple qu'il s'agit de construire, telle que ses deux extrémités P et Q soient des sommets du polygone principal. Elle partagera l'intérieur de ce polygone en deux régions distinctes R_1, R_2.

Si nous supposons que parmi les points donnés il y en ait dans chacune de ces deux régions (ce qui aura nécessairement lieu si P et Q ne sont pas deux sommets consécutifs du polygone principal), la ligne L ne pourra se terminer ni à P ni à Q.

En effet une portion l_1 de L doit se trouver dans R_1, une autre l_2 dans R_2. La ligne L n'ayant pas de point multiple, la jonction entre l_1 et l_2 ne pourra se faire que par l'intermédiaire de l. Donc l_1 doit rejoindre l en l'un des deux points P et Q et l_2 aboutir à l'autre.

Ce lemme général est fort utile. Dans le cas présent, nous en déduirons aisément la valeur de N.

2. Soient A, B, C, ..., K les sommets consécutifs du n-gone.

Théorème. — *Le nombre des lignes cherchées qui commencent à un quelconque* A *des sommets donnés est égal à* 2^{n-2}.

Cette proposition est évidente si $n = 3$, car on a les deux solutions ABC, ACB.

Supposons-la établie pour un $(n-1)$-gone et passons au cas du n-gone.

Le premier côté de la ligne cherchée, ne pouvant être une diagonale, sera AB ou AK. Si c'est AB, la suite de L sera une ligne analogue, issue de B et relative au $(n-1)$-gone convexe BC...K. Elle peut donc être déterminée de 2^{n-3} manières.

Si le premier côté de L était AK, le résultat serait le même.

Le nombre des solutions est donc bien 2^{n-2}.

Corollaire. $N = n.2^{n-1}$.

Car le polygone a n sommets à considérer successivement; mais si l'on fait la somme, chacune des lignes cherchées ayant deux bouts y figurera deux fois.

3. Le cas où le polygone principal est un $(n-1)$-gone avec un point intérieur a est plus complexe. Nous nous bornerons à déterminer le nombre N_0 de celles des lignes cherchées qui ne contiennent aucune diagonale du polygone principal.

La ligne cherchée doit se composer de $n-1$ segments dont un au moins et deux au plus joignent le point a aux sommets du polygone.

S'il n'y a qu'un segment de jonction, l'un des $n-1$ côtés du polygone, AB par exemple, manquera dans L; et la ligne de jonction sera aB ou aA. Cette hypothèse donne donc $2(n-1)$ solutions.

S'il y a deux lignes de jonction, deux côtés du polygone manqueront. S'ils sont consécutifs, tels que AB et BC, l'une des lignes de jonction sera nécessairement Ba, l'autre Aa ou Ca. D'ailleurs, on peut prendre pour AB chacun des $n-1$ côtés successivement; d'où ici encore $2(n-1)$ solutions.

Si les côtés manquants, AB et DE par exemple, ne sont pas consécutifs (ce qui peut avoir lieu de $\frac{(n-1)(n-4)}{2}$ manières), l'une des lignes de jonction pourra être Ba, ou Da, l'autre Aa ou Ea, d'où quatre combinaisons distinctes.

Réunissant ces résultats, on aura

$$N_0 = 2(n-1) + 2(n-1) + 4\frac{(n-1)(n-4)}{2} = 2(n-1)(n-2).$$

Cas où $n = 4$.

4. Si le polygone principal est un quadrilatère ABCD, on aura, d'après le n° **2**, $N = 8$; et chacun des sommets sera l'origine de quatre lignes L sans point double.

5. Si c'est un triangle ABC avec un point intérieur a, les droites qui joignent deux à deux les quatre points donnés ne se coupant nulle part, aucune des lignes L que l'on peut former n'aura de point double. On aura donc

$$N = \frac{1}{2}(4) = 2.$$

L'un quelconque A des points donnés sera l'origine de six de ces lignes. Soit ABCa l'une d'elles. Les autres s'obtiendront par permutation des lettres B, C, a.

Cas où $n = 5$.

6. 1° Si le polygone principal est un pentagone, on aura

$$N = 5 . 2^2 = 20.$$

7. 2° Si c'est un quadrilatère ABCD avec un point intérieur a, on aura, d'après le n° **5**,

$$N = 2 . \tfrac{1}{2} . 3 = 12.$$

Mais il reste à examiner celles des lignes L qui contiennent l'une ou l'autre des diagonales, par exemple AC.

Cette diagonale partage le quadrilatère en deux triangles ABC et ACD. Supposons pour fixer les idées que a soit dans ABC. Pour achever la ligne cherchée il faudra joindre à la ligne AC déjà donnée, soit

CD et l'une des deux lignes ABCa, AaCB.

soit

AD et l'une des deux lignes CBa, CaB.

On obtient ainsi quatre solutions différentes.

La seconde diagonale BD en donnera autant. Donc

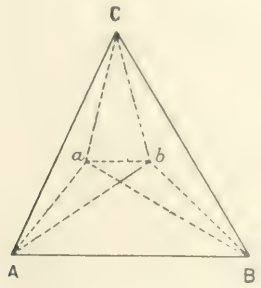
$$N = 12 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 20.$$

8. 3° Si le polygone est un triangle ABC avec deux points intérieurs a, b, nous pourrons admettre pour fixer les idées que les côtés coupés par le prolongement de ab soient AC et BC.

Parmi les segments qui joignent deux à deux les points A, B, C, a, b, les seuls qui se coupent sont Ab et Ba (*fig.* 11). Donc parmi les $\frac{1}{2} . 5! = 60$ lignes L qu'ils peuvent former, les seules à exclure comme ayant un point double sont celles qui contiennent à la fois ces deux segments. Chacune d'elles peut être supposée décrite dans un sens tel que A y précède b. Soit AbBaC l'une d'elles. Les

autres s'en déduisent par les permutations des éléments Ab, Ba, C combinées avec l'échange de B avec a; ce qui porte à 12 le

Fig. 1.



nombre des lignes à rejeter. Donc

$$N = 60 - 12 = 48$$

Cas où $n = 6$.

I.

9. Si le polygone principal est un hexagone, on aura

$$N = 6.2^4 = 48.$$

10. Si c'est un pentagone ABCDE avec un point intérieur a, on aura

$$N = N_0 + N_1 + N_2,$$

N_i désignant le nombre des lignes cherchées qui contiennent précisément i diagonales.

Nous avons trouvé déjà (**5**) la valeur de N_0,

$$N_0 = 2.5.4 = 40.$$

11. Pour calculer N_1 considérons une diagonale déterminée telle que AD (*fig.* 2). Elle partage le polygone en un triangle ADE et un quadrilatère ABCD.

Si a est dans le triangle il faudra, pour achever la ligne L cherchée,

adjoindre à la diagonale AD, soit

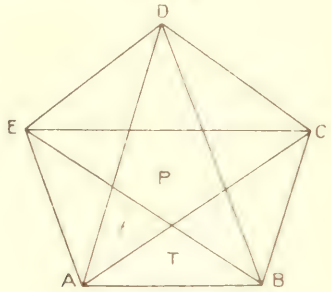
ABC avec une des deux lignes $DE\alpha$, $D\alpha E$,

soit

DCB avec une des deux lignes $AE\alpha$, $A\alpha E$,

ce qui donne quatre solutions.

Fig. 2.



Si α est dans le quadrilatère, les lignes à adjoindre seront

AE avec une des quatre lignes $D\alpha BC$, $D\alpha CB$, $DC\alpha B$, $DCB\alpha$

ou

DE avec une des quatre lignes $A\alpha BC$, $A\alpha CB$, $AC\alpha B$, $ACB\alpha$,

d'où huit solutions.

Si donc parmi les cinq diagonales il y en a z qui laissent α dans le quadrilatère correspondant, on aura

$$N_1 = 8z + 4(5 - z) = 20 + 4z.$$

12. Passons au calcul de N_2.

Soit AD, BD (*fig.* 2) un couple de diagonales qui ne se coupent pas. Si le point α est en dehors de l'angle ADB, par exemple dans le triangle ADE, on pourra, pour achever le quadrilatère, adjoindre à ADB,

BC avec une des deux lignes $A\alpha E$, $AE\alpha$,

d'où deux solutions. Mais on n'en aura aucune si α est dans l'angle ADB.

Or il existe cinq couples de diagonales tels que celui que nous venons de considérer. Si pour β d'entre eux α n'est pas compris dans l'angle correspondant, on aura $N_2 = 2\beta$, et par suite

$$N = N_1 + N_2 = N_1 + 2\beta = 20 + 4z + 2\beta.$$

13. Reste à déterminer α et β.

A cet effet, menons les cinq diagonales du pentagone (*fig.* 1). Elles en partagent l'intérieur en onze régions, à savoir :

Un pentagone central P;

Cinq triangles T ayant un côté commun avec le pentagone principal;

Cinq triangles t ayant un côté commun avec P.

Or, à l'inspection de la figure, on voit immédiatement que, si a est dans P, on aura

$$\alpha = 5, \qquad \beta = 0;$$

s'il est dans un triangle T,

$$\alpha = 3, \qquad \beta = 1;$$

s'il est dans un triangle t,

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 2.$$

Dans toutes ces hypothèses, N aura la même valeur 80.

II.

14. Passons au cas où le polygone principal est un quadrilatère ABCD avec deux points intérieurs a, b.

Soient respectivement N_{01}, N_{02}, N_{03} les nombres de lignes L (sans point multiple) qui contiennent 1, 2, 3 côtés du polygone, sans aucune diagonale; N_1 celui de ces lignes où figure une diagonale. On aura

$$N_0 = N_{01} + N_{02} + N_{03}, \qquad N = N_0 + N_1.$$

D'ailleurs les N_{02} lignes qui contiennent deux côtés sont de deux sortes : celles où figurent deux côtés opposés, en nombre M; et celles où figurent deux côtés contigus, en nombre M'. On aura donc

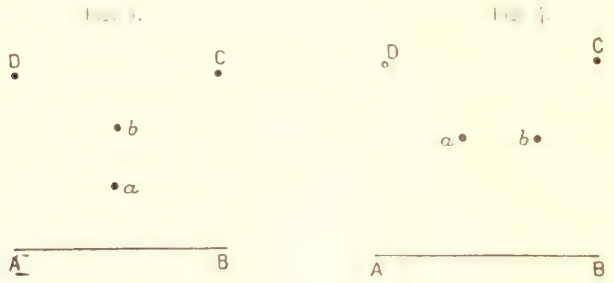
$$N_{02} = M + M'.$$

15. Pour la détermination successive de ces nombres, on doit distinguer plusieurs cas :

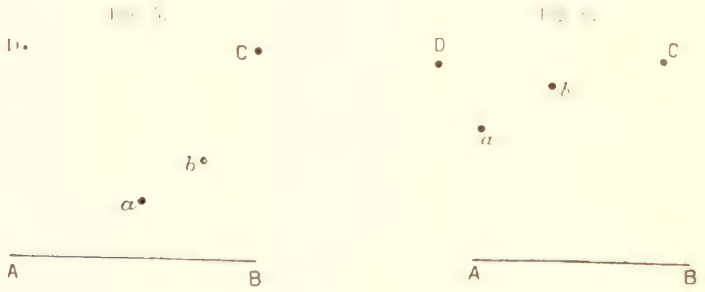
Cas I. — La droite ab prolongée traverse deux côtés opposés du quadrilatère et par suite les deux diagonales. Mais le nombre de ses points de rencontre avec celles-ci compris entre a et b peut être égal à 0, 1, 2, d'où trois *sous-cas*, que nous représenterons respectivement par I_0, I_1, I_2.

Cas II. — La droite ab prolongée traverse deux côtés adjacents du quadrilatère, et par suite une seule diagonale. Son point de rencontre avec celle-ci peut être extérieur ou intérieur au segment ab; d'où deux nouveaux sous-cas, II_0 et II_1.

16. Calcul de N_{01}. — Soit AB le côté du quadrilatère que L



doit contenir. On peut faire au sujet de la ligne ab quatre hypo-



thèses différentes représentées par les figures schématiques 3, 4, 5, 6.

Première hypothèse. — ab prolongé coupe AB et le côté opposé CD (lequel ne devant pas être utilisé n'a pas été tracé sur la figure),

Pour achever la construction de L, on devra adjoindre à AB l'une des lignes

$$AaDbC;\quad AaCbD;\quad BaCbD;\quad BaDbC$$

ou l'un des couples de lignes suivants :

$$AaD \text{ et } BbC;\quad AbD \text{ et } BaC.$$

ce qui donne six solutions.

Deuxième hypothèse. — ab prolongé ne coupe ni AB ni CD. Les lignes à adjoindre à AB seront

$$AaDbc;\quad AbCaD;\quad BaDbC;\quad BbCaD$$

ou le couple AaD et BbC.

Soit cinq solutions.

Troisième hypothèse. — ab prolongé coupe AB, mais non CD. On pourra adjoindre à AB les lignes suivantes :

$$AaDbC;\quad BaDbC;\quad BbCaD;\quad AaD \text{ et } BbC.$$

On n'a plus que quatre solutions.

Quatrième hypothèse. — ab prolongé ne coupe pas AB, mais coupe CD.

On aura cinq solutions :

$$AaDbC,\quad AaCbD;\quad BaDbC,\quad BaCbD;\quad AaD \text{ et } BbC.$$

Prenons successivement pour l'introduire dans L chacun des quatre côtés du quadrilatère et ajoutons les résultats obtenus. Dans le cas I, les première et deuxième hypothèses ayant été réalisées chacune deux fois, on aura

$$N_{a1} = 2.6 + 2.5 = 22.$$

Dans le cas II, ce sont les troisième et quatrième hypothèses qui auront été réalisées; on aura donc

$$N_{a1} = 2.4 + 2.5 = 18$$

17. Calcul de M. — Soient AB, CD les deux côtés opposés qui doivent figurer dans L.

Nous pourrons distinguer les mêmes hypothèses que dans le calcul précédent et nous servir des mêmes figures à condition d'y rétablir mentalement le côté CD qui maintenant doit être utilisé.

Dans la première hypothèse, on pourra compléter L par l'adjonction à AB et à CD de l'une des six lignes suivantes :

$$AabD;\quad AabC;\quad AbaC;\quad BabC;\quad BabD;\quad BbaD$$

ou de l'un des six couples

$$AaC \text{ et } Db;\quad AaD \text{ et } Cb;\quad AbD \text{ et } Ca.$$
$$BaD \text{ et } Cb;\quad BaC \text{ et } Db;\quad BaC \text{ et } Ab.$$

Soit en tout douze solutions.

La seconde hypothèse en donnera seize, par les huit lignes :

$$AabC;\quad AabD;\quad AbaC;\quad AbaD.$$
$$BabC;\quad BabD;\quad BbaC;\quad BbaD$$

ou les huit couples

$$AaD \text{ et } Cb;\quad AaD \text{ et } Bb;\quad AaC \text{ et } Bb;\quad AbC \text{ et } Da,$$
$$BbC \text{ et } Da;\quad BbC \text{ et } Aa;\quad BbD \text{ et } Aa;\quad BaD \text{ et } Cb.$$

La troisième en donne treize, par les six lignes

$$AabC;\quad AabD;\quad BabC;\quad BbaC;\quad BabD;\quad BbaD$$

ou l'un des sept couples

$$AaC \text{ et } Bb;\quad AaD \text{ et } Bb;\quad AaD \text{ et } Cb;\quad AbC \text{ et } Ba;$$
$$AbD \text{ et } Ba;\quad Aa \text{ et } BbC;\quad Aa \text{ et } BbD.$$

La quatrième hypothèse se ramenant à la troisième par l'échange des côtés AB et CD donnera également treize solutions.

Or le polygone ABCD présente deux couples de côtés opposés. Prenons-les successivement pour faire partie de L, et ajoutons les nombres de solutions correspondants.

Dans le cas I, les hypothèses I et II ayant été réalisées chacune une fois, on aura

$$M = 12 + 16 = 28.$$

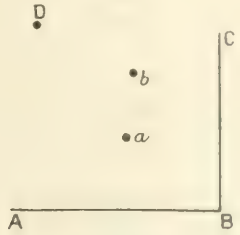
Dans le cas II, les hypothèses réalisées étant III et IV, on aura

$$M = 13 + 13 = 26.$$

18. Calcul de M′. — Soient AB, BC les deux côtés consécutifs qu'on suppose appartenir à L. Nous distinguerons trois hypothèses.

Hypothèse I (*fig.* 7). — La ligne *ab* prolongée coupe un seul des

Fig. 7.



côtés AB, BC, par exemple AB. On pourra achever L en ajoutant à ABC l'une des lignes

$$AabD;\quad AaDb;\quad CabD;\quad CaDb;\quad CbaD;\quad CbDa$$

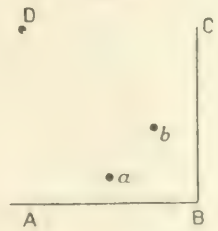
ou l'un des trois couples

$$AaD \text{ et } Cb;\quad AbD \text{ et } Ca;\quad CbD \text{ et } Aa.$$

Soit en tout neuf solutions.

Hypothèse II. — La ligne *ab* prolongée coupe les deux côtés AB, BC (*fig.* 8).

Fig. 8.



On aura six solutions

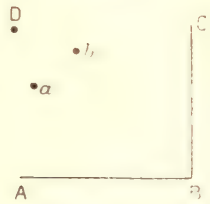
$$AabD;\quad AaDb;\quad CbaD;\quad CbDa;$$
$$AaD \text{ et } Cb;\quad CbD \text{ et } Aa.$$

Hypothèse III. — ab prolongée ne coupe ni AB ni BC (*fig.* 9). On aura dix solutions

$$\begin{gathered} AabD;\quad AaDb;\quad AbaD;\quad AbDa;\\ CabD;\quad CaDb;\quad CbaD;\quad CbDa;\\ AaD \text{ et } Cb;\quad CbD \text{ et } Aa. \end{gathered}$$

Prenons successivement pour faire partie de L chacun des

Fig. 9.



quatre systèmes de deux côtés consécutifs et ajoutons les résultats.

Dans le cas I, l'hypothèse I ayant été réalisée constamment, on aura

$$M = 4.9 = 36.$$

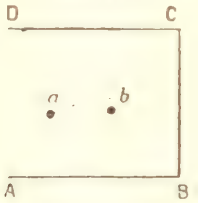
Dans le cas II, cette hypothèse aura été réalisée deux fois, les deux autres chacune une fois. Donc

$$M = 2.9 + 6 + 10 = 34.$$

19. Calcul de $N_{0,2}$. — Soient AB, BC, CD les trois côtés du quadrilatère que L contient. Deux hypothèses seront à distinguer :

Hypothèse I. — ab prolongé coupe le côté DA (*fig.* 10). Nous

Fig. 10.



aurons six solutions en adjoignant aux côtés donnés l'une des lignes.

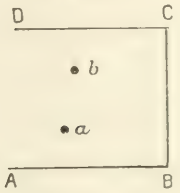
$$Aab;\quad Aba,\quad Dab,\quad Dba$$

ou l'un des couples

$$Aa \text{ et } Db; \quad Ab \text{ et } Da.$$

Hypothèse II. — ab prolongé ne coupe pas DA (*fig.* 11). Les

Fig. 11.



solutions seraient les mêmes que dans la première hypothèse, sauf que les segments Ab, Da se coupant, celle où ils figurent tous deux doit être rejetée. Il reste donc cinq solutions.

Le côté du quadrilatère que L ne contient pas peut être choisi de quatre manières différentes. Faisant la somme des solutions correspondantes et remarquant que sur les quatre côtés il y en a toujours deux coupés par ab prolongé, il viendra

$$N_{03} = 2.6 + 2.5 = 22.$$

On aura donc d'après tout ce qui précède :

Dans le cas I,

$$N_0 = 22 + 28 + 36 + 22 = 108;$$

Dans le cas II,

$$N_0 = 18 + 26 + 34 + 22 = 100.$$

Il ne reste plus qu'à déterminer N_1.

20. Calcul de N_1. — Soit AC la diagonale qu'on suppose appartenir à L. Elle partage le quadrilatère en deux triangles ABC, ADC; et l'on pourra distinguer trois hypothèses :

Hypothèse I. — Les points a, b sont séparés par la diagonale (*fig.* 12). On pourra adjoindre à AC soit une des lignes

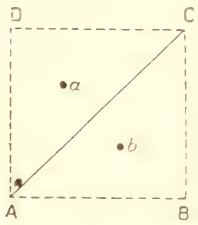
$$AaD \text{ ou } ADa \text{ avec } CbB \text{ ou } CBb.$$

soit une des lignes

$$CaD \text{ ou } CDa \quad \text{avec} \quad AbB \text{ ou } ABb,$$

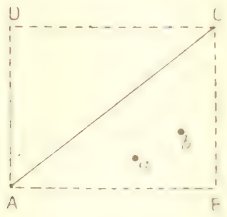
ce qui donne en tout huit solutions.

Fig. 12.



Hypothèse II. — Les points a, b sont du même côté de la diagonale, dans le triangle ABC par exemple. La ligne ab prolongée coupe les deux côtés AB et BC (*fig.* 13).

Fig. 13.



On pourra achever la ligne L en adjoignant à AC, soit CD avec l'une des six lignes

$$AabB; \quad AbaB; \quad AaBb; \quad AbBa, \quad ABab; \quad ABba,$$

soit AD avec une des lignes

$$CabB; \quad CbaB; \quad CaBb \quad CbBa, \quad CBab \quad CBba,$$

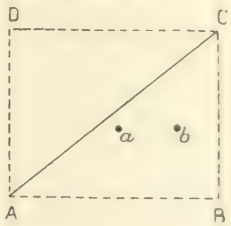
ce qui donne douze solutions.

Hypothèse III. — Les points a, b étant encore dans le même triangle ABC, la ligne ab prolongée coupe la diagonale AC (et le côté BC par exemple) (*fig.* 14).

Les solutions sont les mêmes que dans l'hypothèse II, sauf

qu'ici les segments Ab, Ba se coupant on doit rejeter les solutions AbBa, A$b$$a$B qui les contiennent tous deux. Le nombre des solutions est donc réduit à dix.

Fig. 14.



Considérons successivement les deux diagonales comme pouvant appartenir à L et faisons la somme des solutions. Dans le cas I, le prolongement de ab coupe les deux diagonales. Si donc elles ne séparent pas les deux points a, b (sous-cas I_0), chacune d'elles fournira dix solutions; d'où $N_1 = 20$. Si l'une d'elles les sépare (sous-cas I_1), elle ne donne plus que huit solutions; d'où $N_1 = 18$. Si toutes deux les séparent (sous-cas I_2), chacune d'elles en donnant huit, $N_1 = 16$.

Dans le cas II, celle des deux diagonales que ab prolonge ne coupe pas donnera douze solutions. L'autre en donnera dix si elle ne sépare pas a de b (sous-cas II_0); et huit seulement si elle les sépare (sous-cas II_1).

21. Le Tableau suivant résume les résultats ci-dessus :

Sous-cas.....	I_0	I_1	I	II	II
N_0.....	108	108	108	100	100
N_1.....	20	18	16	20	20
N.....	128	126	124	120	120

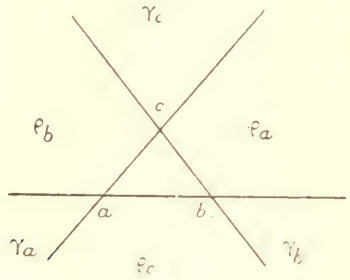
III.

22. Il reste à examiner le cas où le polygone principal est un triangle ABC contenant à son intérieur les trois autres points a, b, c.

Nous distinguerons six cas, d'après la répartition des points A.

B, C, entre les diverses régions déterminées à l'extérieur du triangle *abc* par les prolongements de ses côtés (*fig.* 15).

Fig. 15.



Ces régions, au nombre de six, sont de deux sortes : trois secteurs r, et trois régions ρ opposées à ces secteurs, ayant chacune un côté commun avec le triangle.

Cas I. — Les deux points A, B sont dans une même région r, qu'on peut dénommer r_c. Pour que *abc* soit intérieur a ABC, il est nécessaire que C soit dans la région opposée ρ_c.

Cas II. — A, B sont dans une même région ρ_c et C dans r_c.

Cas III. — A, B, C sont dans des régions r différentes, qu'on peut dénommer respectivement r_a, r_b, r_c.

Cas IV. — A, B, C sont respectivement dans les régions ρ_a, ρ_b, ρ_c.

Cas V. — A, B sont dans les régions r_a, r_b et C dans une région ρ (nécessairement différente de ρ_c) qu'on peut dénommer ρ_a.

Cas VI. — A, B, C sont dans les régions ρ_a, ρ_b, r_a.

23. Les segments qui peuvent figurer dans la construction des lignes L sont les côtés des triangles ABC, *abc* et les neuf lignes de jonction A*a*, A*b*, ..., C*c* qui réunissent les sommets de deux triangles différents.

Ces lignes L (avec ou sans point multiple) sont au nombre de $\frac{1}{2}.6! = 360$; on peut les répartir entre cinq classes :

Classe I. — Lignes où ne figure qu'une seule ligne de jonction, à savoir la ligne

$$ABCabc$$

et ses *similaires*, obtenues en permutant les symboles A, B, C d'une part, a, b, c d'autre part. Elles sont au nombre de 36.

Classe II. — Lignes où figurent deux lignes de jonction (n'ayant pas d'extrémité commune), à savoir :

$$AabcBC, \quad aABCbc$$

et leurs similaires; leur nombre est $2.36 = 72$.

Classe III. — Lignes contenant comme partie intégrante $AabB$ ou l'une des 18 lignes similaires, à savoir :

$$AabBCc, \quad AabBcC, \quad cAabBC$$

et leurs similaires. Leur nombre est 3.36. Elles contiennent trois ou quatre lignes de jonction.

Classe IV. — Lignes ne contenant aucune ligne partielle similaire à $AabB$, mais une seule ligne partielle similaire à AcB. Ce sont les lignes

$$AcBCab, \quad CAcBab, \quad aCAcBb$$

et leurs similaires, au nombre de 3.36. Elles contiennent encore trois ou quatre lignes de jonction.

Classe V. — Lignes formées exclusivement de lignes de jonction, à savoir

$$AaBbCc$$

et ses similaires. Leur nombre est 36. Chacune d'elles contient deux lignes partielles similaires à AcB (AaB et BbC, par exemple).

Soient respectivement $N_1, \ldots, N_5$ les nombres de lignes L sans point double que contiennent ces diverses classes; nous aurons

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5.$$

24. Calcul de N_1. — Une ligne de jonction donnée, telle que

Ca figure dans quatre lignes de la classe I, à savoir :

$$ABCabc, \quad BACabc, \quad ABCacb, \quad BACacb.$$

Mais ces solutions devront toutes être rejetées si Ca entre dans le triangle abc, car ce serait en traversant le côté bc, cc qui donnerait un point double. Dans le cas contraire elles devront être conservées. On aura donc

$$N_1 = 36 + 4\alpha,$$

α étant le nombre des lignes de jonction qui pénètrent dans le triangle abc.

Or de chacun des sommets A, B, C sont issues trois lignes de jonction. Aucune ne pénètre dans le triangle abc si le sommet considéré est dans une région r; une seule y entre, s'il est dans une région ρ. Donc α est le nombre des sommets situés dans une région ρ. Il est donné dans chaque cas par la définition. On peut donc former le Tableau suivant :

Cas	I	II.	III	IV	V.	VI
α	1	2	0	3	1	2
N_1	42	28	36	24	40	28

25. Calcul de N_2. — A chaque ligne de jonction, telle que Aa, on peut en associer quatre autres n'ayant aucun sommet commun avec elle. Le nombre des couples ainsi formés sera donc $\frac{9.4}{2} = 18$ et l'un quelconque d'entre eux, tel que Aa, Cc par exemple, figurera dans quatre lignes de la classe II, à savoir

$$AabcCB, \quad BAabcC, \quad aABCcb, \quad baABCc.$$

Elles doivent être rejetées toutes si Aa coupe Cc. Elles doivent au contraire être conservées si Aa ne coupant pas Cc, ni Aa ni Cc ne pénètrent dans le triangle abc, car elles ne pourront couper ni ab ni bc. Mais si Aa, par exemple, pénètre dans le triangle, elle coupera le côté bc opposé à a. On devra donc rejeter les trois lignes L qui contiennent ce segment et ne conserver que la dernière. Enfin si Aa et Cc pénétraient toutes deux dans le triangle,

ces deux lignes se couperaient. Cette dernière hypothèse est donc contradictoire.

On aura donc

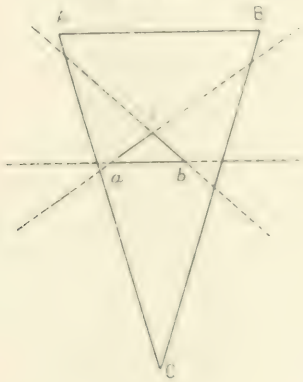
$$N_1 = 7 + 4\beta - \gamma,$$

β étant le nombre des couples de lignes de jonction dont les deux lignes se coupent ; γ le nombre des couples où ces lignes ne se coupant pas, l'une d'elles pénètre dans le triangle.

26. Les nombres β, γ peuvent se lire immédiatement sur la figure qui indique dans chaque cas la situation des points A, B, C par rapport au triangle *abc*. Car on peut y voir de suite sans avoir besoin d'y tracer effectivement les lignes de jonction (ce qui pourrait même nuire à la clarté) quelles sont celles de ces lignes qui se coupent, ou entrent dans le triangle.

Cas I (*fig.* 16). — Les trois couples Ac, Bc, Bc, Ab, Ab, Ba

Fig. 16.

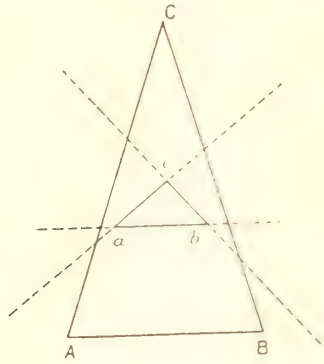


sont les seuls dont les lignes se coupent. Donc $\beta = 3$. D'autre part, la ligne de jonction Cc, qui seule entre dans le triangle *abc*, peut être associée successivement aux quatre lignes Aa, Ab, Ba, Bb qui ne la coupent pas. Donc $\gamma = 4$.

Cas II (*fig.* 17). — Les couples dont les droites se coupent sont les mêmes que dans le cas précédent. Donc $\beta = 3$.

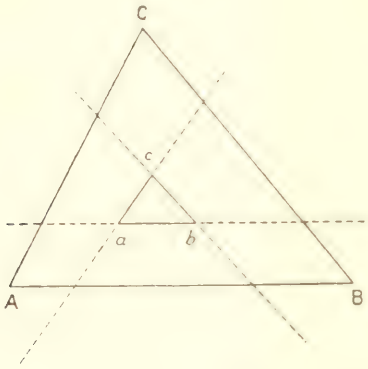
D'autre part, Aa, qui pénètre dans le triangle, peut être associée à Bb, Ca, Cb qui ne la coupent pas. De même Bc peut être associée à Aa, Ca ou Cb. Donc $\gamma = 6$.

Fig. 17.



Cas III (*fig.* 18). — Les couples dont les droites se coupent sont

Fig. 18.

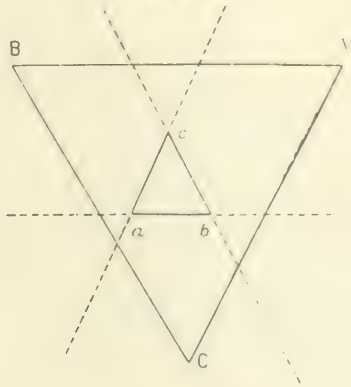


(Ab, Ba), (Bc, Cb), (Ca, Ac). D'ailleurs aucune des lignes de jonction n'entre dans abc. Donc $\beta = 3$, $\gamma = 0$.

Cas IV (*fig.* 19). — Les couples dont les lignes se coupent sont (Aa, Bb), (Bb, Cc), (Cc, Aa). Donc $\beta = 3$. D'autre part, Aa qui entre dans le triangle peut encore être associée à Bc ou à Cb. On

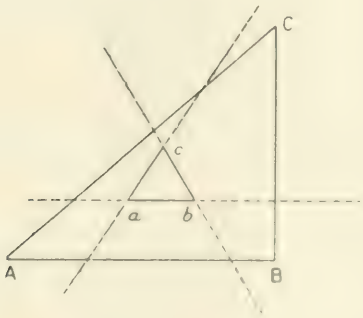
pourra associer de même Bb à Ac ou à Ca; Cc à Ab ou à Ba; d'où $\gamma = 6$.

Fig. 19.



Cas V (*fig.* 20). — Les couples dont les lignes se coupent sont (Ab, Ba), (Bc, Cb), (Bc, Ca). D'ailleurs Ca, qui pénètre dans

Fig. 20.



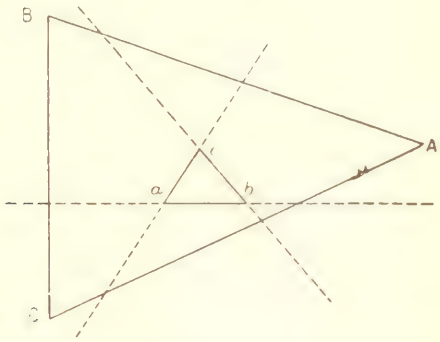
le triangle, peut être associée à trois autres lignes Ab, Ac, Bb. Donc $\beta = 3$, $\gamma = 3$.

Cas VI (*fig.* 21). — Les couples dont les lignes se coupent sont (Cc, Ba), (Cc, Bb), (Aa, Bb); d'où $\beta = 3$. D'ailleurs les lignes Aa et Bb entrent dans le triangle. La première peut encore être associée à Bc, Cb, Cc et la seconde à Ac ou Ca; d'où $\gamma = 5$.

Ces résultats sont résumés dans le Tableau suivant :

Cas.....	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
ξ.....	3	3	3	3	3	3
η.....	4	6	6	6	3	3
N_2.....	18	12	6	12	24	12

Fig. 4.



27. Calcul de N_3. — Les lignes L de la classe III contiennent toutes par définition la ligne partielle $AabB$ ou l'une de ses similaires. Celles-ci sont au nombre de 18, car les permutations des sommets donnent 36 combinaisons distinctes, mais dont deux telles que $AabB$ et $BbaA$ représentent la même ligne, sauf le changement du sens du parcours.

Soit l l'une d'elles. Parmi les lignes L qui la contiennent, soit $N_3(l)$ le nombre de celles qui n'ont pas de point double. On aura évidemment

$$N = \Sigma N_3(l),$$

la sommation s'étendant aux 18 lignes l.

Nous aurons donc à déterminer la valeur de chacun des termes de la somme.

28. Soit $l = AabB$. Les lignes L dont celle-ci fait partie sont les six suivantes :

$$AabBc, \quad AabBcC, \quad CAabB, \quad CAabBc,$$
$$CAabBc, \quad CAabBC.$$

Si les segments Aa, Bb se coupent, toutes les six devront être rejetées et l'on aura $N_3(AabB) = 0$.

Si ces deux segments ne se coupent pas, et que la ligne l ne rencontre ni Ac, ni Bc, ni Cc, on aura au contraire $N_3(AabB) = 6$.

Mais si l rencontre quelqu'un de ces trois segments on devra rejeter celles des six lignes qui le contiennent; d'où les résultats suivants (Aa et Bb ne se coupant pas) :

$N_3(AabB) = 6$ si $AabB$ ne coupe ni Ac, ni Bc, ni Cc
» $= 4$ si $AabB$ coupe Ac ou Bc;
» $= 2$ si elle les coupe toutes deux;
» $= 2$ si elle coupe Cc;
» $= 1$ si elle coupe Cc et Ac ou Bc.

Or il est aisé de constater sur celle des figures 16 à 21 qui correspond à chacun de nos six cas, laquelle des hypothèses précédentes se trouve réalisée.

29. On déterminera de même la valeur de $N_3(l)$ pour chacune des lignes l similaires de $AabB$, en opérant sur le système des lignes Ac, Bc, Cc à considérer la même permutation des sommets qui a fait passer de $AabB$ à l. Ainsi pour $l = BacC$ par exemple on devra regarder sur la figure si Ba coupe Cc et s'il ne le coupe pas, quelles sont celles des lignes Bb, Cb, Ab que l pourrait traverser.

On forme ainsi aisément le Tableau suivant :

	I	II.	III	IV.	V	VI
$N_3(AabB)$....	2	6	6	0	0	0
$N_3(AbaB)$....	0	0	0	2	0	2
$N_3(AbcB)$....	0	0	1	1	1	1
$N_3(AcbB)$....	1	1	2	1	2	2
$N_3(AcaB)$....	0	0	1	1	1	1
$N_3(AacB)$....	1	1	2	1	2	2
$N_3(BbcC)$....	6	6	6	0	1	0
$N_3(BcbC)$....	6	6	0	2	5	2
$N_3(BcaC)$....	2	2	1	1	0	1
$N_3(BacC)$....	2	2	2	1	1	1
$N_3(BabC)$....	1	2	1	1	2	1
$N_3(BbaC)$....	1	2	2	1	1	3
$N_3(CcaA)$....	0	6	0	2	2	0
$N_3(CacA)$....	0	6	0	2	2	2
$N_3(CabA)$....	2	1	1	1	1	1
$N_3(CbaA)$....	1	1	2	1	1	1
$N_3(CbcA)$....	1	2	1	1	2	1
$N_3(CcbA)$....	2	2	2	1	1	1
N_3.....	18	42	24	14	20	24

30. Calcul de N_4 et de N_5. — Les lignes L de la classe IV contiennent toutes une ligne partielle l similaire à AcB. Celles de la classe V en contiennent deux. Ces lignes l sont au nombre de 9. Considérons en particulier l'une d'elles. Soient, parmi les lignes L sans point double qui contiennent l, $N_4(l)$ celles qui sont de la classe IV, $N_5(l)$ celles qui sont de la classe V. On aura évidemment

$$N_4 = \Sigma N_4(l),$$

la somme étant étendue à toutes les lignes similaires à AcB dont le nombre est 9. Mais on aura d'autre part

$$N_5 = \frac{1}{2} \Sigma N_5(l),$$

car chacune des N_5 lignes de la classe V, contenant comme parties intégrantes deux des lignes l, apparaîtrait deux fois dans $\Sigma N_5(l)$.

Nous aurons donc à déterminer, pour chacune des lignes l, les nombres $N_4(l)$ et $N_5(l)$.

31. Considérons en particulier la ligne AcB; elle est contenue dans douze lignes L de la classe IV, à savoir :

(1) $AcBCab$.	(5) $abAcBC$.	(9) $aAcBCb$.
(2) $AcBCba$.	(6) $baAcBC$.	(10) $bAcBCa$.
(3) $abCAcB$.	(7) $aCAcBb$.	(11) $CAcBab$.
(4) $baCAcB$.	(8) $bCAcBa$.	(12) $CAcBba$.

et dans huit lignes de la classe V :

(13) $AcBaCb$,	(17) $aAcBbC$,
(14) $AcBbCa$,	(18) $bAcBaC$,
(15) $CaAcBb$,	(19) $aCbAcB$,
(16) $CbAcBa$,	(20) $bCaAcB$.

Dans chacune de ces lignes figurent, outre la partie AcB qui leur est commune, quelques-uns des segments

$$ab, \quad Aa, \quad Ab, \quad Ba, \quad Bb, \quad Ca, \quad Cb.$$

Il faudra rejeter toutes celles des lignes des Tableaux ci-dessus qui offrent des points doubles, soit que les segments que nous

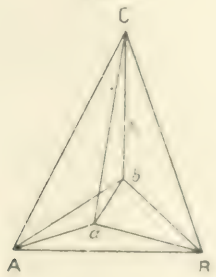
venons d'énumérer se coupent entre eux, soit qu'ils soient coupés par la ligne AcB; puis compter les lignes restantes.

Les intersections possibles dépendent de la situation des points a, b, c dans le triangle ABC. On peut faire à cet égard, en ce qui concerne les points a, b, deux hypothèses principales, dont chacune donnera lieu à des hypothèses secondaires d'après la situation du point c.

52. *Hypothèse I.* — La ligne ab prolongée coupe le côté AB (ou un autre côté du triangle ABC, que nous supposerons être BC).

Construisons la figure (22) formée par les segments ab, Aa, Ab,

Fig. [illegible].



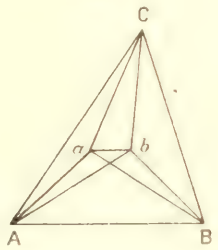
Ba, Bb, Ca, Cb. Elle présente un point double intersection de Ab et de Ca. Nous devrons donc rejeter les lignes (10), (18), (19), de sorte que N_4 (AcB) ne pourra surpasser (onze), ni N_5 (AcB) surpasser (six). Ces chiffres subiront d'ailleurs une nouvelle réduction si c est placé de telle sorte que la ligne AcB coupe quelques-uns des segments tracés sur la figure.

On obtient ainsi sept hypothèses secondaires. Le Tableau suivant donne pour chacune d'elles, avec l'indication des segments coupés, les nombres correspondants N_4 (AcB), N_5 (AcB) des lignes I, à conserver :

Hypothèses.	Segments coupés.	N_4 (AcB).	N_5 (AcB).
I_1	aucun	11	6
I_2	Aa ou Ba	9	5
I_3	Aa, Ab	8	4
I_4	Ba, Bb	8	3
I_5	Ca, ab	7	3
I_6	Ca, Ab, ab	5	2
I_7	Ca, Bb	5	2

33. *Hypothèse II.* — Le côté ab prolongé ne coupe pas AB. Les segments qui se coupent sont ici Ab et Ba, ce qui entraîne le rejet des lignes (16) et (18), toutes deux de la classe V. D'autres exclu-

Fig. 23.



sions seront nécessaires si AcB coupe quelques-uns des segments : d'où plusieurs hypothèses accessoires dont voici le Tableau :

Hypothèses.	Segments coupés.	$N_1(AcB)$	$N_3(AcB)$
H_1	aucun	12	6
H_2	Ab (ou Ba)	10	5
H_3	Aa, Ab (ou Ba, Bb)	8	2
H_4	Ab, Ba	8	4
H_5	Ab, Ba, ab	6	3
H_6	Ca, ab, Ab (ou Cb, ab, Ba)	2	2
H_7	Ca, Cb	4	0

34. Considérons maintenant une quelconque des lignes similaires à AcB, par exemple BbC. De même que $N_1(AcB)$, $N_3(AcB)$ dépendent des relations des lignes AB et AcB avec les lignes ab, Aa, Ab, Ba, Bb, Ca, Cb, $N_4(BbC)$, $N_5(BbC)$ dépendront des relations analogues entre BC, BbC et les lignes bc, Ba, Bc, Ca, Cc, Aa, Ac. Au sujet de ces relations on pourra faire les mêmes hypothèses que ci-dessus.

Cela posé, un coup d'œil jeté sur les figures 16 à 21 relatives à chacun de nos six cas montre quelles sont les hypothèses réalisées et par suite les valeurs de $N_1(l)$, $N_3(l)$ pour chacune des lignes l similaires à AcB. On formera ainsi les Tableaux suivants :

Cas I.

Lignes l.	Hypothèse réalisée.	Segments coupés.	$N_1(l)$.	$N_2(l)$.
AcB.....	H_1	aucun	12	6
AaB.....	H_2	Ab, Ac	8	2
AbB.....	H_3	Ba, Bc	[illegible]	[illegible]
BaC.....	I_7	Ab, Ac	[illegible]	[illegible]
BbC.....	I_1	aucun	11	6
BcC.....	I_2	Ab, ab	[illegible]	[illegible]
CbA.....	I_7	Ba, Bc	[illegible]	[illegible]
CcA.....	I_2	Ba, ab	[illegible]	[illegible]
CaA.....	I_1	aucun	11	6
			[illegible]	[illegible]

$N_1 = 62$. $N_2 = 15$.

Cas II.

Lignes l.	Hypothèse réalisée.	Segments coupés.	$N_1(l)$.	$N_2(l)$.
AcB.....	H_3	Ab, Ba, ab	[illegible]	[illegible]
AaB.....	H_2	Ab	10	[illegible]
AbB.....	H_2	Ba	[illegible]	[illegible]
BaC.....	I_7	Ab, Ac	[illegible]	0
BbC.....	I_1	aucun	11	6
BcC.....	I_2	Ab, ab	[illegible]	[illegible]
CbA.....	I_7	Ba, Bc	4	0
CcA.....	I_2	Ba, ab	[illegible]	[illegible]
CaA.....	I_1	aucun	11	6
			[illegible]	[illegible]

$N_1 = 55$. $N_2 = 15$.

Cas III.

Lignes l.	Hypothèse réalisée.	Segments coupés.	$N_1(l)$.	$N_2(l)$.
AcB.....	H_1	Ca, Cb	[illegible]	0
AaB.....	I_2	Ab	[illegible]	[illegible]
AbB.....	I_7	Ba	[illegible]	[illegible]
BaC.....	H_1	Ab, Ac	[illegible]	0
BbC.....	I_2	Bc	[illegible]	[illegible]
BcC.....	I_2	Cb	[illegible]	[illegible]
CbA.....	H_1	Bc, Ba	[illegible]	[illegible]
CcA.....	I_2	Ca	[illegible]	[illegible]
CaA.....	I_1	Ac	[illegible]	[illegible]
			[illegible]	[illegible]

$N_1 = 66$. $N_2 = 15$.

Cas IV.

Lignes l.	Hypothèse réalisée.	Segments coupés.	N_l	N_{l_1}
AcB.....	H_1	aucun	18	6
AaB.....	I_6	Cc, bc, Bb	2	1
AbB.....	I_6	Cc, ac, Aa	2	1
BaC.....	H_1	aucun	18	6
BbC.....	I_6	Aa, ca, Cc	2	1
BcC.....	I_6	Aa, bc, Bb	2	1
CbA.....	H_1	aucun	18	6
CcA.....	I_6	Bb, ab, Aa	2	1
CaA.....	I_1	Bb, ca, Cc	2	1
			66	24

$N_1 = 66$, $N_{l_1} = 12$.

Cas V.

Lignes l.	Hypothèse réalisée.	Segments coupés.	N_l	N_{l_1}
AcB.....	H_1	Ca, Cb	3	0
AaB.....	I_2	Ab	9	1
AbB.....	I_2	Ba	9	1
BaC.....	I_2	Ab, Ac	1	0
BbC.....	I_2	Ac, ac	2	2
BcC.....	I_3	aucun	11	6
CbA.....	H_1	Ba, Ac, ac	2	2
CcA.....	I_2	Ca, Cb	7	1
CaA.....	H_1	Ac	10	5
			48	24

$N_1 = 48$, $N_{l_1} = 12$.

Cas VI.

Lignes l.	Hypothèse réalisée.	Segments coupés.	N_l	N_{l_1}
AcB.....	H_1	aucun	18	6
AaB.....	I_1	Cc, Bb, bc	2	1
AbB.....	I_1	Cc, Aa, ac	2	1
BaC.....	H_1	aucun	18	6
BbC.....	H_1	Cc, Aa, ac	2	1
BcC.....	I_3	Ba, Bb	8	4
CbA.....	I_1	aucun	11	6
CcA.....	I_1	Ba, Bb	1	0
CaA.....	I_3	Bb, bc	2	2
			67	23

$N_1 = 67$, $N_{l_1} = 13$.

35. Récapitulant tous les résultats obtenus, nous aurons finalement :

	Cas					
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
N_1	52	58	36	24	52	28
N_2	48	42	60	42	54	42
N_3	58	52	54	54	56	54
N_4	62	56	66	66	58	67
N_5	13	15	12	12	12	13
N	213	193	228	198	201	207

Cas où $n = 7$.

36. Nous nous bornerons à traiter le cas où le polygone principal est un hexagone ABCDEF avec un point intérieur a.

Le nombre N_0 des lignes L (sans point double) qui ne contiennent aucune diagonale est, d'après le n° **5**,

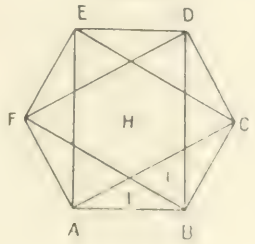
$$N_0 = 2.6.5 = 60.$$

Les diagonales sont d'ailleurs de deux sortes :

Celles de la première sorte, au nombre de trois, joignent deux sommets opposés et partagent l'intérieur de l'hexagone en deux quadrilatères.

Celles de la seconde sorte, au nombre de six, joignent les sommets

Fig. 24.



de deux en deux et partagent l'hexagone en un pentagone et un triangle.

L'ensemble de ces six lignes le partage en treize régions (*fig.* 24), à savoir :

Un hexagone central H;

Six triangles T ayant un côté commun avec le polygone principal;

Six autres triangles t.

D'où trois cas à considérer.

Les lignes cherchées pourront contenir :

1° Une seule diagonale de la seconde sorte;

2° Deux diagonales de la seconde sorte issues d'un même sommet;

3° Deux diagonales de la seconde sorte sans sommet commun;

4° Une seule diagonale, de la première sorte;

5° Deux diagonales, l'une de la première sorte et l'autre de la seconde;

6° Trois diagonales.

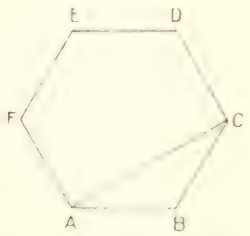
Soient respectivement M_1, M_2, ... M_6 les nombres de lignes L sans point double de chacune de ces six espèces, on aura

$$N = N_1 - M_1 + M_2 - \ldots - M_6.$$

Déterminons successivement ces divers nombres.

57. Calcul de M_1. — Soit AC la diagonale donnée. Deux hypothèses seront possibles.

Hypothèse I. — a est dans le triangle ABC (*fig.* 27). Les solu-



tions s'obtiendront en ajoutant à la diagonale :

Soit la ligne FEDC avec une des deux lignes ABa, AaB;

Soit la ligne DEFA avec une des deux lignes CBa, CaB.

On a ainsi quatre solutions.

Hypothèse II. — a est dans le pentagone ACDEF.

Il faudra ajouter à la diagonale : soit BC avec une des six lignes

$$AFED\alpha,\quad AFE\alpha D,\quad AF\alpha ED,\quad AE\alpha DF,\quad A\alpha FED,\quad A\alpha DEF;$$

soit BA avec une des six lignes

$$CDEF\alpha,\quad CDE\alpha F,\quad \ldots\ldots\quad C\alpha FED.$$

On a ainsi douze solutions.

Considérons successivement les six diagonales. Si a est dans II, l'hypothèse I n'étant jamais réalisée, on aura

$$M_1 = 6.12 = 72.$$

S'il est dans une région t, cette hypothèse étant réalisée pour une diagonale, on aura

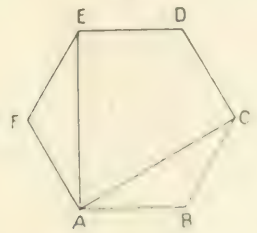
$$M_1 = 5.12 + \tfrac{1}{4} = 61\tfrac{1}{4}.$$

S'il est dans une région T, elle le sera pour deux diagonales : d'où

$$M_1 = \tfrac{1}{4}.12 + 2\tfrac{1}{4} = 56.$$

38. Calcul de M_2. — Soient AC, AE (*fig.* 26) les deux diagonales données. Deux hypothèses sont possibles :

Fig. 26.



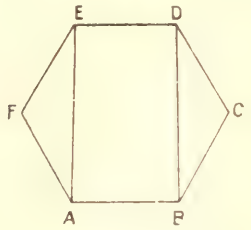
1° a est dans l'un des deux triangles ABC, AEF (dans AEF par exemple). Aucune solution.

2° a est dans l'angle CAE. Aucune solution.

39. Calcul de M_3. — Soient AE, BD les deux diagonales données (*fig.* 27).

Si a est dans l'un des triangles BCD, AEF, par exemple dans

Fig. 27.



BCD, on devra adjoindre aux diagonales données

$$FE, AB \text{ et } DCa \quad \text{ou} \quad DaC$$

ou

$$FA, ED \text{ et } BCa \quad \text{ou} \quad BaC,$$

soit en tout quatre solutions.

Si a est entre les deux diagonales, il faudra adjoindre

$$FE \text{ avec } AaB \text{ et } DC \quad \text{ou avec} \quad AaD \text{ et } BC$$

ou

$$FA \text{ avec } EaB \text{ et } DC \quad \text{ou avec} \quad EaD \text{ et } BC.$$

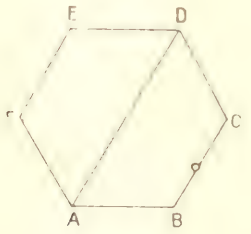
On a encore quatre solutions.

Il existe d'ailleurs trois couples de diagonales analogues à celui que nous avons considéré. On aura donc dans tous les cas

$$M_3 = 3.4 = 12.$$

40. Calcul de M_4. — Soit AD (*fig.* 28) la diagonale donnée.

Fig. 28.



Supposons par exemple que ABCD soit celui des deux quadrilatères qui contient a.

Les lignes à adjoindre seront

FED avec une des lignes ABCa, ABaC, AaBC, AaCB

ou

EFA avec une des lignes DCBa, DCaB, DaCB, DaBC,

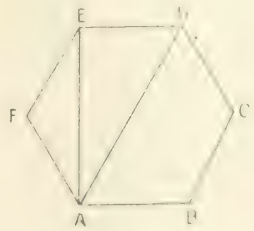
d'où huit solutions.

Or on a trois diagonales telles que AD; donc

$$M_4 = 3.8 = 24.$$

41. Calcul de M_5. — Soient AD et AE les deux diagonales données (*fig.* 29). Trois hypothèses sont possibles :

Fig. 29.



1° a est dans le triangle AEF. Les lignes à adjoindre seront

DCB avec EFa ou EaF,

soit deux solutions;

2° a est dans le quadrilatère ABCD. On aura quatre solutions

FE avec une des lignes DCBa, DCaB, DaCB, DaBC.

3° a est dans l'angle DAE. Aucune solution.

Or il existe douze couples de diagonales analogues à celui que nous venons de considérer. L'un d'eux est formé des diagonales AD et AC. Si nous envisageons successivement ces deux systèmes, nous voyons que l'hypothèse II sera réalisée dans l'un d'eux. L'hypothèse I le sera dans l'autre si a est dans l'un des deux triangles ABC, AEF, de sorte que la somme des solutions sera $(1 + 2 + 0) = 6$. Mais si a est compris dans l'angle CAF, cette somme ne sera plus que $(1 + 2 + 0) = 4$.

Achevons la sommation en considérant successivement les six

couples de diagonales analogues à AC, AE. Nous aurons

$$N_a = 4\alpha + 6(6 - \alpha) = 36 - 2\alpha,$$

α étant le nombre de ceux de ces couples dont les deux côtés comprennent entre eux le point a.

Or on voit par l'inspection de la figure 24 que si a est dans H,

$$\alpha = 6, \qquad \text{d'où} \qquad N_a = 24;$$

s'il est dans une région t,

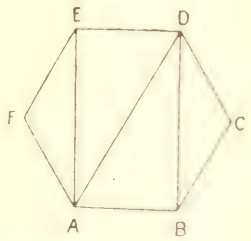
$$\alpha = 5, \qquad \text{d'où} \qquad N_a = 26;$$

s'il est dans une région T,

$$\alpha = 4, \qquad \text{d'où} \qquad N_a = 28.$$

42. Calcul de N_a. — Soient AE, BD, AD les trois diagonales données (*fig.* 30).

Fig. 30.



Si a est dans le quadrilatère ABDE, on n'aura aucune solution.

S'il est dans l'un des triangles AEF, BCD (par exemple dans AEF), on aura les deux solutions

$$BC \text{ avec } EF\alpha \quad \text{ou} \quad EaF.$$

On aurait obtenu le même résultat en considérant le système des trois diagonales AE, BD, BE.

La valeur de N_a sera donc 4β, β désignant parmi les trois quadrilatères analogues à ABDE le nombre de ceux qui ne contiennent pas a.

En se reportant encore à la figure 24, on voit que si a est dans H,

$$\beta = 0, \qquad N_a = 0;$$

s'il est dans t,

$$\beta = 1, \quad N_2 = 4;$$

s'il est dans T,

$$\beta = 2, \quad N_2 = 8.$$

43. Rassemblons les résultats précédents : nous aurons, si a est dans H,

$$N = 60 - 72 + 0 + 12 + 24 - 0 = 168;$$

s'il est dans une région t,

$$N = 60 - 64 + 0 + 12 - 36 - 4 = 166;$$

s'il est dans une région T,

$$N = 60 - 56 + 0 + 12 - 28 - 8 = 164.$$

Errata au Tome II, 1919.

Page 203, ligne 18, *au lieu de* $dH = 0$, *lire* $\frac{\partial H}{\partial v} = 0$ ($\frac{\partial}{\partial v}$ étant symbole de dérivation explicite).

Page 209, ligne 16, *au lieu de* $U - 7S$, *lire* $U - 8S$.

Même page, ligne 25, *au lieu de* nous saurons, *lire* nous aurons.

TABLE DES MATIÈRES.

HUITIÈME SÉRIE. — TOME III.

Les indications qui précèdent le titre de chaque Mémoire de cette Table sont celles adoptées par le Congrès international de Bibliographie des Sciences mathématiques en 1889.

(*Note de la Rédaction.*)

		Pages
[S2]	Quelques problèmes d'Hydrodynamique générale; par M. *Émile Jouguet*	1
[H7]	Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles; par M. *Maurice Janet*	65
[T36]	Sur un cas de diffraction des images des astres circulaires; par M. *Maurice Hamy*	153
[R6]	Sur les équations générales du mouvement des systèmes matériels non holonomes; par M. *L. Isenoff*	175
[Q4a]	Sur quelques lignes brisées; par M. *Camille Jordan*	265
	Errata au Tome II, 1919	299

FIN DU TOME III DE LA HUITIÈME SÉRIE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
Quai des Grands-Augustins, 55.
62080-21

QA
1
J684
sér.8
t.1-3
Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

Journal de mathématiques
pures et appliquées

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY